4L

Análisis matemático

SEGUNDA EDICIÓN

ANÁLISIS MATEMÁTICO

SEGUNDA EDICIÓN

TOM M. APOSTOL
California Institute of Technology

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

Título de la obra original:
Mathematical analysis

Edición original en lengua inglesa publicada por:
Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts

Versión española por:
Dr. José Plá Carrera
Doctor en Matemáticas,
Profesor en la Facultad de Matemáticas en la Universidad de Barcelona

Revisada por:
Dr. Enrique Linés Escardó
Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S.A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 5004 - 8
Depósito Legal: B - 31951 - 1996

Impreso por GERSA, Industria Gráfica
Tambor del Bruc, 6
08970 Sant Joan Despí (Barcelona)

A mis padres

Prólogo

Una ojeada al índice analítico pondrá de manifiesto que este libro de texto trata temas de análisis a nivel de «Cálculo superior». La pretensión ha sido proporcionar un desarrollo de la materia que sea honesto, eficaz, puesto al día y, al mismo tiempo, que no resulte pedante. El libro constituye una transición del Cálculo elemental a cursos más avanzados de la teoría de las funciones real y compleja e introduce al lector un poco en el pensamiento abstracto que ocupa el análisis moderno.

La segunda edición difiere de la primera en muchos aspectos. La topología en conjuntos de puntos se explica al establecer los espacios métricos generales, así como el espacio euclídeo n-dimensional, y se han añadido dos nuevos capítulos sobre la integración de Lebesgue. Se ha suprimido lo referente a integrales lineales, análisis vectorial e integrales de superficie. Se ha cambiado el orden de algunos capítulos, se han escrito totalmente nuevos algunos apartados y se han añadido ejercicios nuevos.

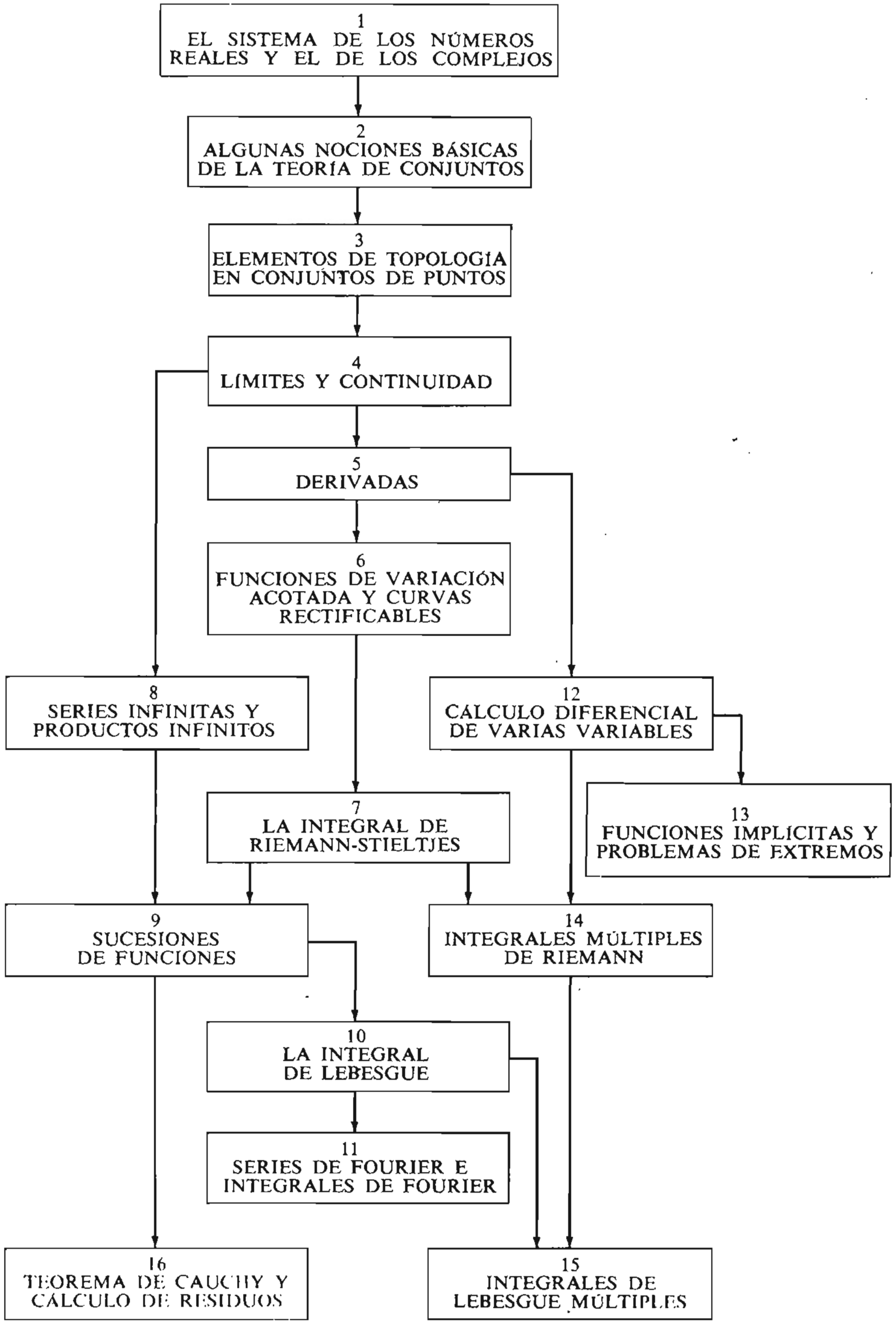
El desarrollo de la integración de Lebesgue se deduce de la propuesta de Riesz-Nagy que se enfoca directamente a las funciones y sus integrales y no depende de la teoría de la medida. El tratamiento aquí está simplificado, puesto a la vista y un tanto reordenado para estudiantes de cursos inferiores.

La primera edición se ha seguido en cursos de matemáticas de distintos niveles, desde el primer curso de estudiantes no graduados al primero de graduados, tanto como libro de texto, como de referencia suplementaria. La segunda edición conserva esa flexibilidad: por ejemplo, los capítulos 1 al 5, 12 y 13 son un curso de cálculo diferencial de funciones con una o más variables; los capítulos 6 al 11, 14 y 15, un curso de teoría de la integración. Son posibles muchas otras combinaciones: cada profesor puede elegir los temas que se acomoden a sus necesidades consultando el diagrama de la página siguiente, que expone la interdependencia lógica de los capítulos.

Quisiera expresar mi gratitud a muchas personas que se tomaron la molestia de escribirme sobre la primera edición. Sus comentarios y sugerencias influyeron en la preparación de la segunda. Debo dar las gracias especialmente al doctor Charalambos Aliprantis, que leyó detenidamente todo el manuscrito de la obra e hizo numerosas observaciones oportunas, además de proporcionarme algunos de los nuevos ejercicios. Por último, quisiera hacer patente mi agradecimiento a los estudiantes de Caltech, cuyo entusiasmo por las matemáticas fue el primer incentivo para esta obra.

T. M. A.

INTERDEPENDENCIA LÓGICA DE LOS CAPÍTULOS



Indice analítico

Análisis matemático

CAPÍTULO 1

El sistema de los números reales y el de los complejos

1.1 INTRODUCCIÓN

El Análisis matemático estudia conceptos relacionados de alguna manera con los números reales; por ello empezaremos nuestro estudio del Análisis con una discusión del sistema de los números reales.

Existen diversos métodos para introducir los números reales. Uno de ellos parte de los enteros positivos 1, 2, 3, ..., que considera conceptos no definidos, utilizándolos para construir un sistema más amplio, los *números racionales* positivos (cocientes de enteros positivos), los negativos y el cero. Los números racionales son utilizados, a su vez, para construir los *números irracionales*, números reales como $\sqrt{2}$ y π, que no son racionales. El sistema de los números reales lo constituye la reunión de los números racionales e irracionales.

A pesar de que estas cuestiones constituyen una parte importante de los fundamentos de la Matemática, no las describiremos aquí con detalle. Es un hecho que, en la mayor parte del Análisis, nos interesarán solamente las *propiedades* de los números reales antes que los métodos utilizados para construirlos. Por lo tanto, consideraremos los números reales mismos como objetos no definidos, sometidos a ciertos axiomas de los que extraeremos ulteriores propiedades. Dado que el lector está, probablemente, familiarizado con la mayoría de las propiedades de los números reales que consideraremos en las páginas que siguen, la exposición será más bien breve. Su propósito es examinar las características más importantes y persuadir al lector de que, de ser necesario, todas las propiedades se podrían deducir a partir de los axiomas. Tratamientos más detallados podrán hallarse en las referencias del final de este capítulo.

Por conveniencia usaremos la notación y la terminología de la teoría de conjuntos elemental. Supongamos que S designa un conjunto (una colección de objetos). La notación $x \in S$ significa que x está en el conjunto S, escribiendo $x \notin S$ para indicar que x no está en S.

Un conjunto S es un *subconjunto* de T si cada elemento de S está también en T. Lo indicaremos escribiendo $S \subseteq T$. Un conjunto es *no vacío* si contiene, por lo menos, un elemento.

Suponemos que existe un conjunto no vacío **R** de elementos, llamados números reales, que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación. Los axiomas se clasifican de manera natural en tres grupos a los que nos referiremos como *axiomas de cuerpo, axiomas de orden y axioma de completitud* (llamado también *axioma del supremo* o *axioma de continuidad*).

1.2 LOS AXIOMAS DE CUERPO

Junto con el conjunto **R** de los números reales admitimos la existencia de dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación*, tales que, para cada par de números reales x e y, la *suma* $x + y$ y el *producto* xy son números reales determinados unívocamente por x e y, satisfaciendo los siguientes axiomas. (En los axiomas que a continuación se exponen, x, y, z representan números reales arbitrarios en tanto no se precise lo contrario.)

Axioma 1. $x + y = y + x, \ xy = yx$ *(leyes conmutativas).*

Axioma 2. $x + (y + z) = (x + y) + z, \ x(yz) = (xy)z$ *(leyes asociativas).*

Axioma 3. $x(y + z) = xy + xz$ *(ley distributiva).*

Axioma 4. *Dados dos números reales cualesquiera x e y, existe un número real z tal que $x + z = y$. Dicho número z se designará por $y - x$; el número $x - x$ se designará por 0. (Se puede demostrar que 0 es independiente de x.) Escribiremos $-x$ en vez de $0 - x$ y al número $-x$ lo llamaremos opuesto de x.*

Axioma 5. *Existe, por lo menos, un número real $x \neq 0$. Si x e y son dos números reales con $x \neq 0$, entonces existe un número z tal que $xz = y$. Dicho número z se desginará por y/x; el número x/x se designará por 1 y puede demostrarse que es independiente de x. Escribiremos x^{-1} en vez de $1/x$ si $x \neq 0$ y a x^{-1} lo llamaremos recíproco o inverso de x.*

De estos axiomas pueden deducirse todas las leyes usuales de la Aritmética; por ejemplo, $-(-x) = x$, $(x^{-1})^{-1} = x$, $-(x - y) = y - x$, $x - y = x + (-y)$, etc. (Para un desarrollo más detallado, ver Referencia 1.1.)

1.3 LOS AXIOMAS DE ORDEN

Suponemos también la existencia de una relación $<$ que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los axiomas siguientes:

Axioma 6. *Se verifica una y sólo una de las relaciones $x = y$, $x < y$, $x > y$.*

NOTA. $x > y$ significa lo mismo que $y < x$.

Axioma 7. *Si $x < y$, entonces, para cada z, es $x + z < y + z$.*

Axioma 8. *Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $xy > 0$.*

Axioma 9. *Si $x > y$ e $y > z$, entonces $x > z$.*

NOTA. Un número real x se llama *positivo* si $x > 0$ y *negativo* si $x < 0$. Designaremos por $\mathbf{R}^+$ el conjunto de todos los números reales positivos y por $\mathbf{R}^-$ el conjunto de todos los números reales negativos.

De estos axiomas pueden deducirse las reglas usuales que rigen las operaciones con desigualdades. Por ejemplo, si tenemos que $x < y$, entonces $xz < yz$ si z es positivo, mientras que $xz > yz$ si z es negativo. Además, si $x > y$ y $z > w$ con y y w positivos, entonces $xz > yw$. (Para una discusión más detallada de estas reglas ver Referencia 1.1.)

NOTA. El simbolismo $x \leq y$ se utiliza para abreviar la afirmación:

$$\text{“}x < y \quad \text{o} \quad x = y.\text{”}$$

Resulta, pues, que $2 \leq 3$ ya que $2 < 3$; y $2 \leq 2$ ya que $2 = 2$. El símbolo $\geq$ se utiliza de forma análoga. Un número real x se llama *no negativo* si $x \geq 0$. Un par simultáneo de desigualdades tales como $x < y$, $y < z$ se abrevia por medio de la expresión $x < y < z$.

El teorema que sigue, que no es más que una consecuencia inmediata de los axiomas precedentes, se utiliza a menudo en las demostraciones del Análisis.

Teorema 1.1. *Sean a y b números reales tales que*

$$a \leq b + \varepsilon \ \textit{para cada} \ \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Entonces $a \leq b$.

Demostración. Si $b < a$, entonces la desigualdad (1) no se satisface para $\varepsilon = (a - b)/2$ puesto que

$$b + \varepsilon = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2} < \frac{a + a}{2} = a.$$

Por lo tanto, por el axioma 6, resulta que $a \leq b$.

El axioma 10, axioma de completitud, será enunciado en la sección 1.11.

1.4. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES

Los números reales son, a menudo, representados geométricamente como puntos de una recta (denominada *recta real* o *eje real*). Se elige un punto para que represente el 0 y otro a la derecha del 0 para que represente el 1, como muestra la Fig. 1.1. Esta elección determina la escala. Con un conjunto apropiado de axiomas para la Geometría euclídea a cada punto de la recta real corresponde un número real y uno sólo y, recíprocamente, cada número real está representado por un punto de la recta real y uno solo. Es usual referirse al *punto* x en vez de referirse al punto correspondiente al número real x.

Figura 1.1

La relación de orden admite una interpretación geométrica simple. Si $x < y$, el punto x está a la izquierda del punto y, como muestra la figura 1.1. Los números positivos están a la derecha del 0 y los números negativos están a la izquierda del 0. Si $a < b$, un punto x satisface las desigualdades $a < x < b$ si, y sólo si, x está *entre* a y b.

1.5 INTERVALOS

El conjunto de todos los puntos comprendidos entre a y b se denomina *intervalo*. A menudo es importante distinguir entre los intervalos que incluyen sus extremos y los intervalos que no los incluyen.

NOTACIÓN. La notación $\{x : x \text{ verifica } P\}$ designa el conjunto de todos los números reales x tales que satisfacen la propiedad P.

Definición 1.2. *Supongamos $a < b$. El intervalo abierto (a, b) se define por*

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}.$$

El intervalo cerrado $[a, b]$ es el conjunto $\{x : a \leq x \leq b\}$. Los intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ se definen análogamente utilizando, respectivamente, las desigualdades $a < x \leq b$ y $a \leq x < b$. Los intervalos infinitos se definen como sigue:

$$(a, +\infty) = \{x : x > a\}, \qquad [a, +\infty) = \{x : x \geq a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x : x < a\}, \qquad (-\infty, a] = \{x : x \leq a\}.$$

Se utiliza a veces el intervalo $(-\infty, +\infty)$ para designar la recta real **R**. Un solo punto es considerado como un intervalo cerrado «degenerado».

NOTA. Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ se utilizan aquí tan sólo por conveniencias de notación y no deben ser considerados como números reales. Más adelante extenderemos el sistema de los números reales incluyendo estos dos símbolos, pero, mientras no lo hagamos, el lector deberá entender que todos los números reales son «finitos».

1.6 LOS ENTEROS

En esta sección se describen los *enteros* como un subconjunto especial de **R**. Antes de definir los enteros conviene introducir la noción de *conjunto inductivo.*

Definición 1.3. *Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si tiene las dos propiedades siguientes:*

a) *El número 1 está en el conjunto.*
b) *Para cada x del conjunto, el número $x + 1$ está también en el conjunto.*

Por ejemplo, **R** es un conjunto inductivo. También lo es $\mathbf{R}^+$. Definiremos los enteros positivos como aquellos números reales que pertenecen a todos los conjuntos inductivos.

Definición 1.4. *Un número real se denomina entero positivo si pertenece a cada uno de los conjuntos inductivos. El conjunto de los enteros positivos se designa por $\mathbf{Z}^+$.*

El conjunto $\mathbf{Z}^+$ es, a su vez, inductivo. Contiene al número 1, al número $1 + 1$ (designado por 2), al número $2 + 1$ (designado por 3), y así sucesivamente. Como $\mathbf{Z}^+$ es subconjunto de cada uno de los conjuntos inductivos consideraremos a $\mathbf{Z}^+$ como el *menor* conjunto inductivo. Esta propiedad de $\mathbf{Z}^+$ se denomina, a menudo, *principio de inducción.* Suponemos al lector familiarizado con las demostraciones por inducción que se basan en este principio. (Ver Referencia 1.1.) Ejemplos de tales demostraciones se dan en la sección siguiente.

Los opuestos de los enteros positivos se llaman *enteros negativos*. Los enteros positivos junto con los enteros negativos y el 0 (cero), forman un conjunto Z que llamaremos, simplemente, *conjunto de los enteros.*

1.7 TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ÚNICA PARA ENTEROS

Si n y d son enteros y si $n = cd$ para algún entero c, diremos que d es un *divisor* de n, o que n es un *múltiplo* de d, y escribiremos $d|n$ (se lee: d divide a n). Un entero n es *primo* si $n > 1$ y si los únicos divisores positivos de n son 1 y n. Si $n > 1$ y n no es primo, entonces n es *compuesto*. El entero 1 no es ni primo ni compuesto.

Esta sección expone algunos resultados elementales acerca de la descomposición de enteros, culminando con el *teorema de descomposición única*, llamado también *el teorema fundamental de la Aritmética.*

El teorema fundamental establece que (1) cada entero $n > 1$ puede ser representado como producto de factores primos y que (2) esta descomposición es única, salvo en el orden de los factores. Es fácil probar la parte (1).

Teorema 1.5. *Cada entero $n > 1$ es primo o producto de primos.*

Demostración. Utilizaremos la inducción sobre n. El teorema se verifica trivialmente para $n = 2$. Supongamos que es cierto para cada entero k con $1 < k < n$. Si n no es primo, admite un divisor d con $1 < d < n$. Por lo tanto, $n = cd$, con $1 < c < n$. Puesto que tanto c como d son $< n$, cada uno es primo o es producto de primos; luego n es un producto de primos.

Antes de probar la parte (2), la unicidad de la descomposición, introduciremos otros conceptos.

Si $d|a$ y $d|b$, diremos que d es un *divisor común* de a y b. El teorema que sigue demuestra que cada par de enteros a y b posee un divisor común que es combinación lineal de a y de b.

Teorema 1.6. *Cada par de enteros a y b admite un divisor común d de la forma*

$$d = ax + by$$

donde x e y son enteros. Además, cada divisor común de a y b divide a d.

Demostración. Supongamos primeramente que $a \geq 0$ y $b \geq 0$ y procedamos por inducción sobre $n = a + b$. Si $n = 0$, entonces $a = b = 0$ y podemos tomar $d = 0$ con $x = y = 0$. Supongamos entonces que el teorema ha sido probado para $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Por simetría podemos suponer $a \geq b$. Si $b = 0$, entonces $d = a$, $x = 1$, $y = 0$. Si $b \geq 1$ podemos aplicar la hipótesis de inducción a $a - b$ y a b, ya que su suma es $a = n - b \leq n - 1$. Por lo tanto existe un divisor común d de $a - b$ y b de la forma $d = (a-b)x + by$. Este entero d

divide también a $(a-b) + b = a$, luego d es un divisor común de a y de b y tenemos que $d = ax + (y-x)b$, es combinación lineal de a y b. Para completar la demostración debemos probar que cada divisor común divide a d. Como un divisor común divide a a y a b, dividirá también a la combinación lineal $ax + (y-x)b = d$. Esto completa la demostración si $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Si uno de ellos o ambos fuesen negativos, aplicaríamos el resultado que acabamos de demostrar a $|a|$ y $|b|$.

NOTA. Si d es un divisor común de a y b de la forma $d = ax + by$, entonces $-d$ es también un divisor común de la misma forma, $-d = a(-x) + b(-y)$. De estos dos divisores comunes sólo el no negativo se denomina el *máximo común divisor* de a y de b y se designa por mcd(a, b) o, simplemente, por (a, b). Si $(a, b) = 1$, se dice que a y b son *primos entre sí.*

Teorema 1.7 (Lema de Euclides). Si $a|bc$ y $(a, b) = 1$, entonces $a|c$.

Demostración. Como $(a, b) = 1$, podemos escribir $1 = ax + by$. Por lo tanto, $c = acx + bcy$. Pero $a|acx$ y $a|bcy$, luego $a|c$.

Teorema 1.8. *Si un número primo p divide a ab, entonces $p|a$ o $p|b$. En general, si un número primo p divide al producto $a_1 \ldots a_k$, entonces p divide a uno de los factores por lo menos.*

Demostración. Supongamos que $p|ab$ y que p no divida a a. Si probamos que $(p, a) = 1$, el lema de Euclides implica que $p|b$. Sea $d = (p, a)$. Entonces $d|p$, luego $d = 1$ o $d = p$. No puede ser que $d = p$ ya que $d|a$, pero p no divide a a. Por lo tanto, $d = 1$. Para demostrar la afirmación más general se procede por inducción sobre el número k de factores. Los detalles se dejan al lector.

Teorema 1.9 (Teorema de descomposición única). *Cada entero $n > 1$ puede ser representado como producto de factores primos, y si se prescinde del orden de los factores la representación es única.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre n. El teorema es cierto para $n = 2$. Supongamos, entonces, que es cierto para todos los enteros mayores que 1 y menores que n. Si n es primo, no hay nada que demostrar. Supongamos, por lo tanto, que n es compuesto y que admite dos descomposiciones en factores primos; a saber

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t. \tag{2}$$

Deseamos probar que $s = t$ y que cada p es igual a algún q. Dado que p_1 divide a $q_1 \cdot q_2 \ldots q_t$, divide por lo menos a uno de los factores. Cambiando los índices de las q, si es necesario, se puede suponer p_1/q_1. Por lo tanto, $p_1 = q_1$ ya que tanto p_1 como q_1 son primos. En (2) simplificamos p_1 en ambos miembros y obtenemos

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \cdots p_s = q_2 \cdots q_t.$$

Como n es compuesto, $1 < n/p_1 < n$; luego por la hipótesis de inducción las dos descomposiciones de n/p_1 son idénticas, si se prescinde del orden de los factores. Por lo tanto, lo mismo es cierto para (2) y la demostración está terminada.

1.8 LOS NÚMEROS RACIONALES

Los cocientes de enteros a/b (donde $b \neq 0$) se llamarán *números racionales.* Por ejemplo, $1/2$, $-7/5$, y 6 son números racionales. El conjunto de los números racionales, que designaremos por $\mathbf{Q}$, contiene a $\mathbf{Z}$ como subconjunto. Observe el lector que todos los axiomas de cuerpo y todos los axiomas de orden se verifican en $\mathbf{Q}$.

Suponemos que el lector está familiarizado con ciertas propiedades elementales de los números racionales. Por ejemplo, si a y b son racionales, su media $(a + b)/2$ también lo es y está comprendida entre a y b. Así pues, entre dos números racionales hay una infinidad de números racionales, lo cual implica que, dado un número racional cualquiera, no sea posible hablar del número racional «inmediato superior».

1.9 LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Los números reales que no son racionales se denominan *irracionales.* Por ejemplo, los números $\sqrt{2}$, e, π y e^π son irracionales.

En general no es fácil probar que un cierto número particular es irracional. No existe ninguna demostración simple de la irracionalidad de e^π, por ejemplo. Sin embargo, la irracionalidad de números tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ no es excesivamente difícil de establecer y, de hecho, probaremos fácilmente el siguiente:

Teorema 1.10. *Si n es un entero positivo que no sea un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional.*

Demostración. Suponemos en primer lugar que n no admite ningún divisor > 1 que sea cuadrado perfecto. Si admitimos que $\sqrt{n}$ es racional, llegamos a contradicción. Supongamos que $\sqrt{n} = a/b$, donde a y b son enteros sin divisores comunes. Entonces $nb^2 = a^2$ y, dado que el primer miembro de esta igualdad es un múltiplo de n, también lo será a^2. Sin embargo, si a^2 es múltiplo de n, a deberá serlo ya que n no admite divisores > 1 que sean cuadrados perfectos. (Esto se ve fácilmente examinando la descomposición de a en factores primos.) Todo ello significa que $a = cn$, donde c es un entero. Entonces la ecuación $nb^2 = a^2$ se transforma en $nb^2 = c^2n^2$, o $b^2 = nc^2$. El mismo argumento prueba que b debe ser asimismo múltiplo de n. Entonces a y b serían ambos múltiplos de n, lo cual contradice el hecho de que a y b carecen de divisores comunes. Esto finaliza la demostración en el caso de que n no admita un divisor > 1 que sea cuadrado perfecto.

Si n admite un factor que sea cuadrado perfecto, podremos escribir $n = m^2k$, donde $k > 1$ y k no admite divisores > 1 que sean cuadrados perfectos. Por lo tanto $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$; y si $\sqrt{n}$ fuese racional, el número $\sqrt{k}$ sería también racional, contradiciendo lo que acabamos de demostrar.

Un tipo distinto de argumentación es preciso para probar que el número e es irracional. (Suponemos cierta familiaridad con la exponencial e^x del Cálculo elemental y su representación como serie infinita.)

Teorema 1.11. *Si $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^n/n! + \dots$, entonces el número e es irracional.*

Demostración. Probaremos que e^{-1} es irracional. La serie e^{-1} es una serie alternada con términos que decrecen constantemente en valor absoluto. En tales series el error cometido al cortar la serie por el n-ésimo término tiene el signo algebraico del primer término que se desprecia y, en valor absoluto, es menor que el del primer término que se desprecia. Por lo tanto, si $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/k!$, tenemos la desigualdad

$$0 < e^{-1} - s_{2k-1} < \frac{1}{(2k)!},$$

de la que se obtiene

$$0 < (2k-1)!\,(e^{-1} - s_{2k-1}) < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}, \qquad (3)$$

para todo entero $k \geq 1$. Ahora bien $(2k-1)!\,s_{2k-1}$ es siempre un entero. Si e^{-1} fuese racional, entonces podríamos elegir k suficientemente grande para que $(2k-1)!\,e^{-1}$ fuese también un entero. A causa de (3) la diferencia entre ambos enteros debería ser un número comprendido entre 0 y $\frac{1}{2}$, lo cual es imposible. Luego e^{-1} no es racional y, por tanto, e tampoco lo es.

NOTA. Para una demostración de la irracionalidad de π, ver Ejercicio 7.33.

Los antiguos griegos sabían de la existencia de los números irracionales allá por el año 500 a.C. Sin embargo, una teoría satisfactoria de tales números no sería desarrollada hasta finales del siglo diecinueve en que tres teorías distintas son introducidas al mismo tiempo por Cantor, Dedekind y Weierstrass. En la Referencia 1.6 puede hallarse información acerca de las teorías de Dedekind y Cantor y sus equivalencias.

1.10 COTAS SUPERIORES; ELEMENTO MÁXIMO, COTA SUPERIOR MÍNIMA (SUPREMO)

Los números irracionales aparecen en Álgebra cuando se pretenden resolver ciertas ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, se desea un número real x tal que $x^2 = 2$. De los nueve axiomas enumerados anteriormente no puede deducirse si en $\mathbf{R}$ existe o no un número x, puesto que $\mathbf{Q}$ satisface también estos nueve axiomas y hemos probado que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. El axioma de completitud nos permitirá introducir los números irracionales en el sistema de los números reales y proporcionar al sistema de los números reales una propiedad de continuidad que es fundamental en muchos de los teoremas de Análisis.

Antes de describir el axioma de completitud, es conveniente introducir una terminología y una notación adicionales.

Definición 1.12. *Sea S un conjunto de números reales. Si existe un número real b tal que $x \leq b$ para todo x de S, diremos que b es una cota superior de S y que S está acotado superiormente por b.*

Decimos *una* cota superior ya que cada número mayor que b también es una cota superior. Si una cota superior b es, además, un elemento de S, b se denomina *último elemento* o *elemento máximo* de S. A lo sumo habrá uno de tales b. Si existe tal número b, escribiremos

$$b = \text{máx } S.$$

Un conjunto carente de cotas superiores se denomina *no acotado superiormente.*

Las definiciones de los términos *cota inferior, acotado inferiormente, primer elemento* (o *elemento mínimo*) pueden formularse análogamente. Si S tiene un elemento mínimo, designaremos a dicho mínimo por mín S.

Ejemplos.

1. El conjunto $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$ es un conjunto no acotado superiormente. No posee ni cotas superiores ni elemento máximo. Está acotado inferiormente por 0, pero no posee elemento mínimo.
2. El intervalo cerrado $S = [0, 1]$ está acotado superiormente por 1 e inferiormente por 0. De hecho, máx $S = 1$ y mín $S = 0$.
3. El intervalo semiabierto $S = [0, 1)$ está acotado superiormente por 1, pero carece de elemento máximo. Su elemento mínimo es 0.

Para conjuntos como los del ejemplo 3 que están acotados superiormente pero que carecen de elemento máximo, existe un concepto que sustituye al de elemento máximo. Se denomina *extremo superior* o *supremo* del conjunto y se define como sigue:

Definición 1.13. *Sea S un conjunto de números reales acotado superiormente. Un número real b se denomina extremo superior de S si verifica las dos propiedades siguientes:*

a) *b es una cota superior de S.*
b) *Ningún número menor que b es cota superior de S.*

Ejemplos. Si $S = [0, 1]$ el elemento máximo 1 es asimismo extremo superior de S. Si $S = [0, 1)$, el número 1 es extremo superior de S, aun cuando S carece de elemento máximo.

Es fácil probar que un conjunto no puede tener dos extremos superiores distintos. Por lo tanto, si existe extremo superior de S, existe sólo uno y puede hablarse *del* extremo superior.

Es corriente, en la práctica, referirse al extremo superior de un conjunto por medio del término más breve de *supremo*, abreviado *sup*. Adoptamos esta convención y escribimos

$$b = \sup S,$$

para indicar que b es el supremo de S. Si S tiene un elemento máximo, entonces máx $S = \sup S$.

El *extremo inferior* o *ínfimo* de S, designado por inf S, se define de forma análoga.

1.11 EL AXIOMA DE COMPLETITUD

Nuestro último axioma del sistema de los números reales involucra la noción de supremo.

Axioma 10. *Todo conjunto no vacío S de números reales que esté acotado superiormente admite un supremo; es decir, existe un número real b tal que $b = \sup S$.*

Como consecuencia de este axioma se obtiene que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente admite un ínfimo.

1.12 ALGUNAS PROPIEDADES DEL SUPREMO

En esta sección se discuten algunas propiedades fundamentales del supremo, que se utilizarán en este texto. Existe un conjunto análogo de propiedades para el ínfimo que el lector formulará por sí mismo.

La primera de ellas establece que todo conjunto de números con un supremo contiene números tan próximos como se quiera a dicho supremo.

Teorema 1.14 (Propiedad de la aproximación). *Sea S un conjunto no vacío de números reales con un supremo que se designa por $b = \sup S$. Entonces, para cada $a < b$, existe un x de S tal que*

$$a < x \leq b.$$

Demostración. Ante todo, $x \leq b$ para todo x de S. Si fuese $x \leq a$ para todo x de S, entonces a sería una cota superior para S menor que el supremo que es la cota superior mínima. Por lo tanto, $x > a$ para un x de S, por lo menos.

Teorema 1.15 (Propiedad aditiva). *Dados dos subconjuntos no vacíos de $\mathbf{R}$, A y B, sea C el conjunto*

$$C = \{x + y : x \in A, \quad y \in B\}.$$

Si tanto A como B tienen un supremo, entonces C tiene un supremo y

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

Demostración. Sea $a = \sup A$, $b = \sup B$. Si $z \in C$, entonces $z = x + y$, donde $x \in A$, $y \in B$, luego $z = x + y \leq a + b$. Por lo tanto $a + b$ es una cota superior de C, luego C admite un supremo, sea $c = \sup C$ y $c \leq a + b$. Veremos ahora que $a + b \leq c$. Elijamos un $\varepsilon > 0$. Por el teorema 1.14 existe un x de A y un y de B tales que

$$a - \varepsilon < x$$

y

$$b - \varepsilon < y.$$

Sumando estas desigualdades, obtenemos

$$a + b - 2\varepsilon < x + y \leq c.$$

Luego, $a + b < c + 2\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$ y, por el teorema 1.1, $a + b \leq c$.

La demostración del teorema que sigue se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 1.16 (Propiedad de la comparación). *Dados dos subconjuntos no vacíos S y T de $\mathbf{R}$ tales que $s \leq t$ para todo s de S y todo t de T, si T tiene supremo, entonces S tiene supremo, y*

$$\sup S \leq \sup T.$$

1.13 PROPIEDADES DE LOS ENTEROS DEDUCIDAS DEL AXIOMA DE COMPLETITUD

Teorema 1.17. *El conjunto $\mathbf{Z}^+$ de los enteros positivos 1, 2, 3, ..., no está acotado superiormente.*

Demostración. Si $\mathbf{Z}^+$ estuviese acotado superiormente, entonces $\mathbf{Z}^+$ admitiría un supremo, tal como $a = \sup \mathbf{Z}^+$. Por el teorema 1.14 tendríamos que $a - 1 < n$ para algún n de $\mathbf{Z}^+$. Por lo tanto $n + 1 > a$ para esta n. Esto contradice el hecho de ser $a = \sup \mathbf{Z}^+$ ya que $n + 1 \in \mathbf{Z}^+$.

Teorema 1.18. *Para cada número real x existe un entero positivo n tal que $n > x$.*

Demostración. Si no fuese así, existiría un x que sería una cota superior para $\mathbf{Z}^+$, en contradicción con el teorema 1.17.

1.14 LA PROPIEDAD ARQUIMEDIANA DEL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

El teorema que sigue enuncia la propiedad arquimediana del sistema de los números reales. Geométricamente dice que todo segmento lineal, por largo que sea, puede recubrirse por medio de un número finito de segmentos lineales de longitud positiva dada, por pequeña que sea.

Teorema 1.19. *Si $x > 0$ y si y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$.*

Demostración. Aplicar el teorema 1.18 sustituyendo x por y/x.

1.15 LOS NÚMEROS RACIONALES CON REPRESENTACIÓN DECIMAL FINITA

Un número real de la forma

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

donde a_0 es un entero no negativo y $a_1, \ldots, a_n$ son enteros que satisfacen $0 \leq a_i \leq 9$, se expresa usualmente de la siguiente forma:

$$r = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Dicha expresión recibe el nombre de *representación decimal finita de r*. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5, \qquad \frac{1}{50} = \frac{2}{10^2} = 0{,}02, \qquad \frac{29}{4} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 7{,}25.$$

Los números reales de este tipo son necesariamente racionales y, de hecho, todos ellos son de la forma $r = a/10^n$, donde a es un entero. Sin embargo, no todos los números racionales pueden expresarse mediante representaciones decimales finitas. Por ejemplo, si 1/3 pudiese expresarse así, tendríamos que $1/3 = a/10^n$ o $3a = 10^n$ para un cierto entero a. Pero esto es imposbile ya que 3 no divide a ninguna potencia de 10.

1.16 APROXIMACIONES DECIMALES FINITAS DE LOS NÚMEROS REALES

Esta sección utiliza el axioma de completitud para demostrar que los números reales pueden aproximarse, con la exactitud que se desee, por medio de números racionales que admitan representación decimal finita.

Teorema 1.20. *Suponemos $x \geq 0$. Entonces, para todo entero $n \geq 1$, existe un decimal finito $r_n = a_0 . a_1 a_2 \ldots a_n$ tal que*

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}.$$

Demostración. Sea S el conjunto de todos los enteros no negativos $\leq x$. S es no vacío, ya que $0 \in S$, y está acotado superiormente por x. Por lo tanto, S admite un supremo: $a_0 = \sup S$. Es fácil ver que $a_0 \in S$; luego a_0 es un entero no negativo. Llamaremos a a_0 el *mayor entero* contenido en x, y escribiremos $a_0 = [x]$. Es claro que

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

Sea ahora $a_1 = [10x - 10a_0]$, el mayor entero contenido en $10x - 10a_0$. Como $0 \leq 10x - 10a_0 = 10(x - a_0) < 10$, tenemos que $0 \leq a_1 \leq 9$ y

$$a_1 \leq 10x - 10a_0 < a_1 + 1.$$

En otras palabras, a_1 es el mayor entero que satisface las desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}.$$

En general, habiendo elegido $a_1, \ldots, a_{n-1}$ con $0 \leq a_i \leq 9$, sea a_n el mayor entero que satisfaga las desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}. \tag{4}$$

Entonces $0 \leq a_n \leq 9$ y tendremos

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n},$$

donde $r_n = a_0 . a_1 a_2 \ldots a_n$. Esto completa la demostración. Es fácil verificar que x es, de hecho, el supremo del conjunto de los números racionales $r_1, r_2, \ldots$

1.17 REPRESENTACIONES DECIMALES INFINITAS DE LOS NÚMEROS REALES

Los enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots$, obtenidos en la demostración del teorema 1.20 pueden utilizarse para definir una representación decimal infinita de x. Escribiremos

$$x = a_0 . a_1 a_2 \cdots$$

para indicar que a_n es el mayor entero que satisface (4). Por ejemplo, si $x = \frac{1}{8}$, obtendremos $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ y $a_n = 0$ para todo $n \geq 4$. Por lo tanto, podemos escribir

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}125000 \cdots$$

Si intercambiamos los signos de desigualdad $\leq$ y $<$ en (4), obtenemos una definición ligeramente diferente de representación decimal. Los decimales finitos r_n satisfacen $r_n < x \leq r_n + 10^{-n}$, sin embargo los dígitos $a_0, a_1, a_2, \ldots$, necesarios no son los mismos que en (4). Por ejemplo, si aplicamos esta segunda definición a $x = \frac{1}{8}$, obtenemos la representación decimal infinita

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}124999 \cdots$$

El que un número real admita dos representaciones decimales distintas es un simple ejemplo del hecho de que dos conjuntos diferentes de números reales pueden tener el mismo supremo.

1.18 VALOR ABSOLUTO Y DESIGUALDAD TRIANGULAR

En Análisis son bastante frecuentes los cálculos con desigualdades. Son de particular importancia las que se relacionan con la noción de *valor absoluto*. Si x es un número real, el valor absoluto de x, desginado por $|x|$, se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Una desigualdad importante concerniente a los valores absolutos viene dada por el siguiente:

Teorema 1.21. *Si $a \geq 0$, entonces tenemos la desigualdad $|x| \leq a$ si, y sólo si, $-a \leq x \leq a$.*

Demostración. De la definición de $|x|$ se obtiene la desigualdad $-|x| \leq x \leq |x|$, ya que $x = |x|$ o $x = -|x|$. Si suponemos que $|x| \leq a$, podemos escribir $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$ y la mitad del teorema queda demostrada. Recíprocamente, si suponemos $-a \leq x \leq a$, entonces, si $x \geq 0$, tenemos que $|x| = x \leq a$, mientras que si $x < 0$, tenemos que $|x| = -x \leq a$. En ambos casos obtenemos que $|x| \leq a$ y el teorema queda demostrado.

Podemos utilizar este teorema para demostrar la *desigualdad triangular*.

Teorema 1.22. *Para números reales arbitrarios x e y se verifica*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \textit{(desigualdad triangular)}$$

Demostración. Tenemos que $-|x| \leq x \leq |x|$ y que $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando obtenemos $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$ y, en virtud del teorema 1.21, concluimos que $|x + y| \leq |x| + |y|$. Esto demuestra el teorema.

A menudo se utilizan otras formas de la desgiualdad triangular. Por ejemplo, si en el teorema 1.22 hacemos $x = a - c$ e $y = c - b$, resulta

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|.$$

Asimismo, del teorema 1.22, obtenemos $|x| \geq |x + y| - |y|$. Haciendo $x = a + b$, $y = -b$, resulta

$$|a + b| \geq |a| - |b|.$$

Intercambiando a y b obtendremos, además, $|a + b| \geq |b| - |a| = -(|a| - |b|)$, y por lo tanto

$$|a + b| \geq \big||a| - |b|\big|.$$

Por inducción podemos probar asimismo las generalizaciones

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

y

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geq |x_1| - |x_2| - \cdots - |x_n|.$$

1.19 LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

Vamos a deducir ahora otra desigualdad usada a menudo en Análisis.

Teorema 1.23 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Si $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ son números reales cualesquiera, se tiene*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Además, la igualdad se verifica si, y sólo si, existe un número real x tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Una suma de cuadrados no puede ser nunca negativa. Por lo tanto tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$$

para todo número real x, y es igualdad si, y sólo si, cada término es cero. Esta desigualdad puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0,$$

donde

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \qquad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Si $A > 0$, hacemos $x = -B/A$ a fin de obtener $B^2 - AC \leq 0$ que es la desigualdad deseada. Si $A = 0$, la demostración es trivial.

NOTA. Utilizando notación vectorial, la desigualdad de Cauchy-Schwarz toma la forma

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \le \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2,$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ son dos vectores n-dimensionales,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

es su producto escalar, y $\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2}$ es la longitud de $\mathbf{a}$.

1.20 MÁS Y MENOS INFINITO Y LA EXTENSIÓN R* DEL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

En esta sección extenderemos el sistema de los números reales adjuntando dos «puntos ideales» designados por los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ («más infinito» y «menos infinito»).

Definición 1.24. *Por sistema ampliado de los números reales,* $\mathbf{R}^*$, *entenderemos el conjunto de los números reales* $\mathbf{R}$ *junto con dos símbolos* $+\infty$ *y* $-\infty$ *que satisfagan las siguientes propiedades:*

a) *Si* $x \in \mathbf{R}$, *tenemos*

$$x + (+\infty) = +\infty, \qquad x + (-\infty) = -\infty,$$
$$x - (+\infty) = -\infty, \qquad x - (-\infty) = +\infty,$$
$$x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0.$$

b) *Si* $x > 0$, *tenemos*

$$x(+\infty) = +\infty, \qquad x(-\infty) = -\infty.$$

c) *Si* $x < 0$, *tenemos*

$$x(+\infty) = -\infty, \qquad x(-\infty) = +\infty.$$

d)

$$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,$$
$$(-\infty) + (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

e) *Si* $x \in \mathbf{R}$, *entonces* $-\infty < x < +\infty$.

NOTACIÓN. Utilizaremos el símbolo $(-\infty, +\infty)$ para designar a $\mathbf{R}$ y $[-\infty, +\infty]$ para designar a $\mathbf{R}^*$. Los puntos de $\mathbf{R}$ se llaman «finitos» para distinguirlos de los puntos «infinitos» $+\infty$ y $-\infty$.

La razón principal para introducir los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ es de pura conveniencia. Por ejemplo, si definimos $+\infty$ como el sup de un conjunto de números no acotado superiormente, resulta que, en $\mathbf{R}^*$, todo subconjunto no vacío de $\mathbf{R}$ tiene un supremo. El supremo es finito si el conjunto está acotado superiormente e infinito si no está acotado superiormente. Análogamente, definimos que el ínfimo de todo compuesto no acotado inferiormente es $-\infty$. Entonces todo subconjunto no vacío de $\mathbf{R}$ tiene ínf en $\mathbf{R}^*$.

Para ciertos trabajos posteriores acerca de los límites, conviene además introducir la siguiente terminología.

Definición 1.25. *Cada intervalo abierto* $(a, +\infty)$ *se dice que es un entorno de* $+\infty$, *o una bola con centro* $+\infty$. *Cada intervalo abierto* $(-\infty, a)$ *se dice que es un entorno de* $-\infty$, *o una bola con centro* $-\infty$.

1.21 LOS NÚMEROS COMPLEJOS

De los axiomas que gobiernan la relación $<$ se deduce que el cuadrado de un número real no es nunca negativo. Entonces, ecuaciones cuadráticas elementales tales como, por ejemplo, $x^2 = -1$ no poseen solución entre los números reales. Un nuevo tipo de números, llamados *números complejos*, debe introducirse para conseguir soluciones de tales ecuaciones. Resulta entonces que la introducción de tales números proporciona, al mismo tiempo, soluciones de las ecuaciones algebraicas generales de la forma

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales cualesquiera. (Este resultado es conocido como *Teorema fundamental del Álgebra.*)

Definiremos ahora los números complejos y los discutiremos con cierto detalle.

Definición 1.26. *Por número complejo entenderemos un par ordenado de números reales, que designaremos por* (x_1, x_2). *La primera componente,* x_1, *se llama parte real del número complejo; la segunda componente,* x_2, *se llama parte imaginaria. Dos números complejos* $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$ *son iguales, y escribiremos* $x = y$, *si, y sólo si,* $x_1 = y_1$ *y* $x_2 = y_2$. *Definimos la suma* $x + y$ *y el producto* xy *por*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \qquad xy = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

NOTA. El conjunto de todos los números complejos será designado por $\mathbf{C}$.

Teorema 1.27. *Las operaciones de suma y multiplicación que acabamos de definir satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva.*

Demostración. Solamente demostraremos la propiedad distributiva; las otras demostraciones son más simples. Si $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ y $z = (z_1, z_2)$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} x(y + z) &= (x_1, x_2)(y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\ &= (x_1y_1 + x_1z_1 - x_2y_2 - x_2z_2, x_1y_2 + x_1z_2 + x_2y_1 + x_2z_1) \\ &= (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1z_1 - x_2z_2, x_1z_2 + x_2z_1) \\ &= xy + xz. \end{aligned}$$

Teorema 1.28.

$$(x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2)(0, 0) = (0, 0),$$
$$(x_1, x_2)(1, 0) = (x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (0, 0).$$

Demostración. Las demostraciones son inmediatas a partir de las definiciones, lo mismo que en los teoremas 1.29, 1.30, 1.32 y 1.33.

Teorema 1.29. *Dados dos números complejos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, existe un número complejo z tal que $x + z = y$. De hecho, $z = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$. Este z se designa por $y - x$. El número complejo $(-x_1, -x_2)$ se designa por $-x$.*

Teorema 1.30. *Para cualquier par de números complejos x e y, tenemos*

$$(-x)y = x(-y) = -(xy) = (-1, 0)(xy).$$

Definición 1.31. *Si $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ e y son números complejos, definimos $x^{-1} = [x_1/(x_1^2 + x_2^2), -x_2/(x_1^2 + x_2^2)]$, e $y/x = yx^{-1}$.*

Teorema 1.32. *Si x e y son números complejos con $x \neq (0, 0)$, existe un número complejo z tal que $xz = y$, a saber, $z = yx^{-1}$.*

Revisten especial interés las operaciones con números complejos cuya parte imaginaria es 0.

Teorema 1.33.

$$(x_1, 0) + (y_1, 0) = (x_1 + y_1, 0),$$
$$(x_1, 0)(y_1, 0) = (x_1y_1, 0),$$
$$(x_1, 0)/(y_1, 0) = (x_1/y_1, 0), \qquad \text{si } y_1 \neq 0.$$

NOTA. Es evidente, que en virtud del teorema 1.33, podemos realizar las operaciones aritméticas de los números complejos de parte imaginaria nula operan-

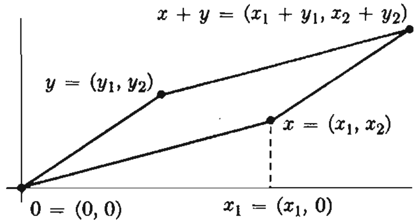


Figura 1.2

do tan sólo con las partes reales por medio de las operaciones de los números reales. Por lo tanto, los números complejos de la forma $(x, 0)$ tienen las mismas propiedades aritméticas que los números reales. Por esta razón es conveniente considerar el sistema de los números reales como un caso particular del sistema de los números complejos, y convendremos en identificar el número complejo $(x, 0)$ con el número real x. Por eso escribiremos $x = (x, 0)$. En particular, $0 = (0, 0)$ y $1 = (1, 0)$.

1.22 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Así como los números reales se representan geométricamente como puntos de una recta, los números complejos se representan como puntos de un plano. El número complejo $x = (x_1, x_2)$ puede ser imaginado como el «punto» de coordenadas (x_1, x_2) Hecho esto, la definición de suma coincide con la suma según la *regla del paralelogramo.* (Ver Fig. 1.2.)

La idea de expresar geométricamente los números complejos como puntos de un plano fue formulada por Gauss en su disertación de 1799 e, indepen-

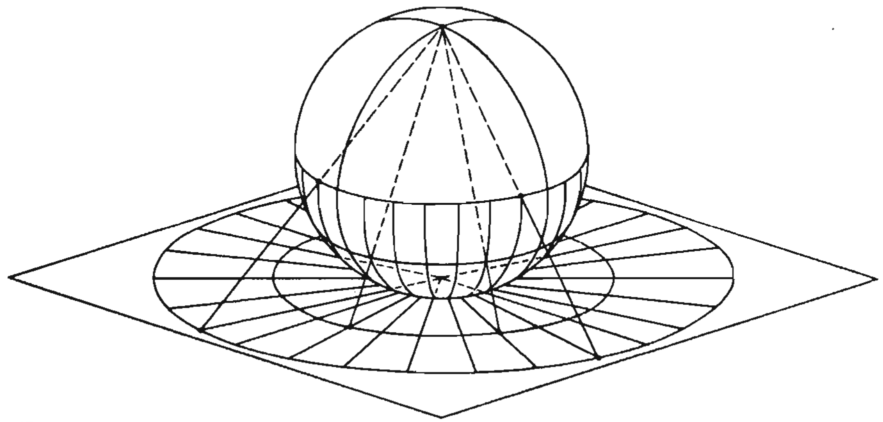


Figura 1.3

dientemente, por Argand en 1806. Más tarde Gauss ideó la expresión un tanto desafortunada de «número complejo». Los números complejos admiten otras representaciones geométricas. En vez de utilizar puntos de un plano, se pueden utilizar puntos de otras superficies. Riemann encontró que la esfera es especialmente adecuada para este propósito. Se proyectan los puntos de la esfera desde el Polo Norte sobre el plano tangente a la esfera en el Polo Sur y entonces a cada punto del plano le corresponde un punto sobre la esfera. Con excepción del Polo Norte, a cada punto de la esfera le corresponde un punto sobre el plano y sólo uno. Esta correspondencia se denomina una *proyección estereográfica*. (Ver Fig. 1.3.)

1.23 LA UNIDAD IMAGINARIA

Conviene a veces considerar el número complejo (x_1, x_2) como un vector bidimensional de componentes x_1 y x_2. Sumar dos números complejos utilizando la definición 1.26 es lo mismo que sumar dos vectores componente a componente. El número complejo $1 = (1, 0)$ juega el mismo papel que el vector unitario de dirección horizontal. El análogo al vector unitario de dirección vertical vamos a introducirlo ahora.

Definición 1.34. *El número complejo* $(0, 1)$ *se representa por* i *y se llama unidad imaginaria.*

Teorema 1.35. *Cada número complejo* $x = (x_1, x_2)$ *puede representarse en la forma* $x = x_1 + ix_2$.

Demostración.

$$x_1 = (x_1, 0), \qquad ix_2 = (0, 1)(x_2, 0) = (0, x_2),$$
$$x_1 + ix_2 = (x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, x_2).$$

El próximo teorema expresa que el número complejo i proporciona una solución para la ecuación $x^2 = -1$.

Teorema 1.36. $i^2 = -1$.

Demostración.

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

1.24 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Vamos a extender ahora el concepto de valor absoluto al sistema de los números complejos.

Definición 1.37. *Si* $x = (x_1, x_2)$, *definimos el módulo, o valor absoluto, de* x *como el número real no negativo* $|x|$ *dado por*

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,.$$

Teorema 1.38.

i) $|(0, 0)| = 0$, *y* $|x| > 0$ *si* $x \neq 0$. ii) $|xy| = |x|\,|y|$.
iii) $|x/y| = |x|/|y|$, *si* $y \neq 0$. iv) $|(x_1, 0)| = |x_1|$.

Demostración. Las afirmaciones (i) y (iv) son inmediatas. Para demostrar (ii), consideremos $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, entonces $xy = x_1y_1 - x_2y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$. La afirmación (ii) se sigue de la relación

$$|xy|^2 = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = |x|^2|y|^2.$$

La ecuación (iii) puede deducirse de (ii) escribiéndola en la forma $|x| = |y|\;|x/y|$.

Geométricamente, $|x|$ representa la longitud del segmento que une el origen con el punto x. En general, $|x - y|$ es la distancia entre los puntos x e y. Utilizando esta interpretación geométrica, el siguiente teorema establece que uno de los lados de un triángulo es menor que la suma de los otros dos lados.

Teorema 1.39. *Si* x *e* y *son números complejos, entonces*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \textit{(desigualdad triangular)}$$

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

1.25 IMPOSIBILIDAD DE ORDENAR LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Todavía no hemos definido ninguna relación de la forma $x < y$, si x e y son números complejos cualesquiera, ya que es imposible dar una definición de $<$ para los números complejos que satisfaga las propiedades dadas por los axiomas 6 al 8. Para justificarlo, supongamos que fuese posible definir una relación de orden $<$ que satisficiera los axiomas 6, 7 y 8. Entonces, como $i \neq 0$, se debiera tener $i > 0$ o $i < 0$, por el axioma 6. Supongamos que $i > 0$. Entonces tomando $x = y = i$ en el axioma 8, tendríamos $i^2 > 0$, o $-1 > 0$. Sumando 1 a ambos miembros (axioma 7), obtendríamos $0 > 1$. Por otro lado, aplicando el axioma 8 a $-1 > 0$, hallaríamos $1 > 0$. Tendríamos, pues, $0 > 1$ y también $1 > 0$, que, por el axioma 6, es imposible. Así pues, suponer que $i > 0$ lleva a contradicción. [¿Por qué la desigualdad $-1 > 0$ no era ya una contradicción?] Un razonamiento análogo prueba que no es posible $i < 0$. Por lo tanto, los números complejos no pueden ser ordenados de tal suerte que se verifiquen los axiomas 6, 7 y 8.

1.26. EXPONENCIALES COMPLEJAS

La exponencial e^x (x real) ha sido mencionada anteriormente. Deseamos definir e^z para z complejo de tal suerte que las principales propiedades de la función exponencial real se conserven. Las citadas propiedades de e^x para x real son la ley de los exponentes, $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, y la ecuación $e^0 = 1$. Daremos una definición de e^z para z complejo que conserve estas propiedades y que se reduzca a la exponencial ordinaria cuando z sea real.

Si escribimos $z = x + iy$ (x, y reales), entonces para que se verifique la ley de los exponentes deberíamos tener $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Queda entonces por definir lo que significa e^{iy}.

Definición 1.40. *Si $z = x + iy$, definimos $e^z = e^{x+iy}$ como el número complejo $e^z = e^x$ (cos $y + i$ sen y).*

Esta definición* coincide claramente con la función exponencial real cuando z es real (esto es, $y = 0$). Probaremos a continuación que la ley de los exponentes se cumple.

Teorema 1.41. *Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ son dos números complejos, entonces tenemos*

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Demostración.

$$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1), \qquad e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2),$$

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}e^{x_2}[\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 + i(\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2)].$$

* Es posible dar muchos argumentos para motivar la ecuación $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Por ejemplo, escribamos $e^{iy} = f(y) + ig(y)$ e intentemos determinar las funciones de variable real f y g a fin de que las leyes usuales de las operaciones con exponenciales reales sean aplicables también a las exponenciales complejas. Diferenciando formalmente se obtiene $e^{iy} = g'(y) - if'(y)$, si suponemos que $(e^{iy})' = ie^{iy}$. Comparando estas dos expresiones para e^{iy}, vemos que f y g deben satisfacer las ecuaciones $f(y) = g'(y)$, $f'(y) = -g(y)$. La eliminación de g conduce a $f(y) = -f''(y)$. Como deseamos que $e^0 = 1$, debemos tener que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$. Ello prueba que $f(y) = \cos y$ y $g(y) = -f'(y) = \operatorname{sen} y$. Por supuesto, este razonamiento *no prueba* nada, pero indica ostensiblemente que la definición $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ es razonable.

Ahora bien, $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, ya que x_1 y x_2 son ambos reales. Además,

$$\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 = \cos(y_1 + y_2)$$

y

$$\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2 = \operatorname{sen}(y_1 + y_2),$$

y por lo tanto

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}.$$

1.27 OTRAS PROPIEDADES DE LAS EXPONENCIALES COMPLEJAS

En los teoremas siguientes z, z_1, z_2 designan números complejos.

Teorema 1.42. *e^z jamás es cero.*

Demostración. $e^z e^{-z} = e^0 = 1$. Por lo tanto, e^z no puede ser cero.

Teorema 1.43. *Si x es real, entonces $|e^{ix}| = 1$.*

Demostración. $|e^{ix}|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, y $|e^{ix}| > 0$.

Teorema 1.44. *$e^z = 1$ si, y sólo si, z es un múltiplo entero de $2\pi i$.*

Demostración. Si $z = 2\pi in$, donde n es un entero, entonces

$$e^z = \cos(2\pi n) + i \operatorname{sen}(2\pi n) = 1.$$

Recíprocamente, supongamos que $e^z = 1$. Esto significa que $e^x \cos y = 1$ y $e^x \operatorname{sen} y = 0$. Como que $e^x \neq 0$, debe ser sen $y = 0$, $y = k\pi$, donde k es un entero. Pero $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Por lo tanto, $e^x = (-1)^k$ ya que $e^x \cos(k\pi) = 1$. Como $e^x > 0$, k debe ser par. Por lo tanto $e^x = 1$ y entonces $x = 0$. Esto prueba el teorema.

Teorema 1.45. *$e^{z_1} = e^{z_2}$ si, y sólo si, $z_1 - z_2 = 2\pi in$ (donde n es un entero).*

Demostración. $e^{z_1} = e^{z_2}$ si, y sólo si, $e^{z_1-z_2} = 1$.

1.28 EL ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Si el punto $z = (x, y) = x + iy$ se representa en cordenadas polares r y θ, podemos escribir $x = r \cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$, es decir, $z = r\cos\theta + ir \operatorname{sen}\theta = re^{i\theta}$. Los dos números r y θ determinan a z de forma única. Recíprocamente, el número positivo r está determinado unívocamente por z; de hecho, $r = |z|$. Sin embargo, z determina el ángulo θ salvo múltiplos de 2π. Hay una infinidad de valores de θ que satisfacen las ecuaciones $x = |z| \cos \theta$, $y = |z| \operatorname{sen} \theta$, pero naturalmente cada dos difieren en un múltiplo de 2π. Cada uno de estos valores de θ se llama *un argumento* de z pero se distingue *uno* de ellos y se denomina *argumento principal* de z.

Definición 1.46. *Sea $z = x + iy$ un número complejo no nulo. El único número real θ que satisface las condiciones*

$$x = |z| \cos \theta, \qquad y = |z| \operatorname{sen} \theta, \qquad -\pi < \theta \leq +\pi$$

se llama el argumento principal de z, y se representa por $\theta = \arg(z)$.

La anterior discusión origina inmediatamente el siguiente teorema:

Teorema 1.47. *Todo número complejo $z \neq 0$ puede ser representado en la forma $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z) + 2\pi n$, siendo n un entero.*

NOTA. Este método de representar a los números complejos es particularmente útil en relación con la multiplicación y la división, ya que se tiene

$$(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \qquad \text{y} \qquad \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Teorema 1.48. *Si $z_1 z_2 \neq 0$, entonces $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi n(z_1, z_2)$, donde*

$$n(z_1, z_2) = \begin{cases} 0, & \textit{si} \ -\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq +\pi, \\ +1, & \textit{si} \ -2\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq -\pi, \\ -1, & \textit{si} \ \ \pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq 2\pi. \end{cases}$$

Demostración. Si $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\theta_1}$, $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\theta_2}$, donde $\theta_1 = \arg(z_1)$ y $\theta_2 = \arg(z_2)$, entonces $z_1 z_2 = |z_1 z_2| e^{i \cdot (\theta_1 - \theta_2)}$. Como $-\pi < \theta_1 \leq +\pi$ y $-\pi < \theta_2 \leq +\pi$, tenemos $-2\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi$. Por lo tanto existe un entero n tal que $-\pi < \theta_1 + \theta_2 + 2\pi n \leq \pi$. Este número n es, precisamente, el $n(z_1, z_2)$ dado en el teorema, y para este n tenemos $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2\pi n$. Esto prueba el teorema.

1.29 POTENCIAS ENTERAS Y RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Definición 1.49. *Dados un número complejo z y un número entero n, definimos la n-ésima potencia de z como sigue:*

$$z^0 = 1, \qquad z^{n+1} = z^n z, \qquad \textit{si } n \geq 0,$$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n, \qquad \textit{si } z \neq 0 \ \ y \ \ n > 0.$$

El teorema 1.50 establece que se verifican las reglas usuales de los exponentes. La demostración, que se puede hacer por inducción, se deja como ejercicio.

Teorema 1.50. *Dados dos enteros m y n, tenemos, para $z \neq 0$,*

$$z^n z^m = z^{n+m} \qquad \text{y} \qquad (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

Teorema 1.51. *Si $z \neq 0$, y si n es un entero positivo, entonces existen exactamente n números complejos distintos $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (llamados raíces n-ésimas de z), tales que*

$$z_k^n = z, \quad \textit{para cada } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Además, estas raíces son dadas por las fórmulas

$$z_k = Re^{i\phi_k}, \qquad \textit{donde} \qquad R = |z|^{1/n},$$

y

$$\phi_k = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

NOTA. Las n raíces n-ésimas de z están igualmente espaciadas sobre el círculo de radio $R = |z|^{1/n}$, con centro en el origen.

Demostración. Los n números complejos $Re^{i\phi_k}$, $0 \leq k \leq n-1$, son distintos y cada uno de ellos es una raíz n-ésima de z, ya que

$$(Re^{i\phi_k})^n = R^n e^{in\phi_k} = |z| e^{i[\arg(z) + 2\pi k]} = z.$$

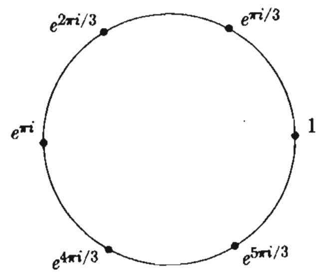


Figura 1.4

Debemos probar ahora que no hay otras raíces n-ésimas de z. Supongamos que $w = Ae^{i\alpha}$ es un número complejo tal que $w^n = z$. Entonces $|w|^n = |z|$, de donde $A^n = |z|$, $A = |z|^{1/n}$. Por lo tanto $w^n = z$ puede escribirse $e^{i\alpha n} = e^{i[\arg(z)]}$, que implica $n\alpha - \arg(z) = 2\pi k$ para algún entero k. Luego $\alpha = [\arg(z) + 2\pi k]/n$. Pero mientras k toma todos los valores, w toma sólo los valores distintos $z_0, \ldots, z_{n-1}$. (Ver Fig. 1.4.)

1.30 LOS LOGARITMOS COMPLEJOS

En virtud del teorema 1.42, e^z nunca es cero. Es natural preguntarse si hay otros valores que e^z no puede tomar jamás. El teorema siguiente prueba que el cero es el único valor excepcional.

Teorema 1.52. *Si z es un número complejo $\neq 0$, existen números complejos w tales que $e^w = z$. Uno de tales w es el número complejo*

$$\log|z| + i\arg(z),$$

y todos los demás tienen la forma

$$\log|z| + i\arg(z) + 2n\pi i,$$

donde n es un entero.

Demostración. Como que $e^{\log|z| + i\arg(z)} = e^{\log|z|}e^{i\arg(z)} = |z|e^{i\arg(z)} = z$, vemos que $w = \log|z| + i\arg(z)$ es una solución de la ecuación $e^w = z$. Pero si w_1 es otra solución, entonces $e^w = e^{w_1}$ y, por lo tanto, $w - w_1 = 2n\pi i$.

Definición 1.53. *Sea $z \neq 0$ un número complejo dado. Si w es un número complejo tal que $e^w = z$, entonces w se denomina un logaritmo de z. El valor particular de w dado por*

$$w = \log|z| + i\arg(z)$$

se llama logaritmo principal de z, y para este w escribiremos

$$w = \operatorname{Log} z.$$

EJEMPLOS

1. Puesto que $|i| = 1$ y $\arg(i) = \pi/2$, $\operatorname{Log}(i) = i\pi/2$.
2. Puesto que $|-i| = 1$ y $\arg(-i) = -\pi/2$, $\operatorname{Log}(-i) = -i\pi/2$.
3. Puesto que $|-1| = 1$ y $\arg(-1) = \pi$, $\operatorname{Log}(-1) = \pi i$.

4. Si $x > 0$, $\operatorname{Log}(x) = \log(x)$, ya que $|x| = x$ y $\arg(x) = 0$.
5. Puesto que $|1 + i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1 + i) = \pi/4$, $\operatorname{Log}(1 + i) = \log\sqrt{2} + i\pi/4$.

Teorema 1.54. *Si $z_1 z_2 \neq 0$, entonces*

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2\pi i n(z_1, z_2),$$

donde $n(z_1, z_2)$ es el entero definido en el teorema 1.48.

Demostración.

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(z_1 z_2) &= \log|z_1 z_2| + i\arg(z_1 z_2)\\ &= \log|z_1| + \log|z_2| + i[\arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi n(z_1, z_2)].\end{aligned}$$

1.31 POTENCIAS COMPLEJAS

Utilizando los logaritmos complejos, podemos dar ahora una definición de las potencias complejas de números complejos.

Definición 1.55. *Si $z \neq 0$ y si w es un número complejo cualquiera, definimos*

$$z^w = e^{w \operatorname{Log} z}.$$

EJEMPLOS

1. $i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$.
2. $(-1)^i = e^{i\operatorname{Log}(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}$.
3. Si n es un entero, entonces $z^{n+1} = e^{(n+1)\operatorname{Log} z} = e^{n \operatorname{Log} z}e^{\operatorname{Log} z} = z^n z$, por lo que la definición 1.55 no se contradice con la definición 1.49.

Los dos teoremas siguientes nos suministran las reglas de cálculo con potencias complejas:

Teorema 1.56. $z^{w_1}z^{w_2} = z^{w_1 + w_2}$ *si* $z \neq 0$.

Demostración.

$$z^{w_1 + w_2} = e^{(w_1 + w_2)\operatorname{Log} z} = e^{w_1 \operatorname{Log} z}e^{w_2 \operatorname{Log} z} = z^{w_1}z^{w_2}.$$

Teorema 1.57. *Si $z_1 z_2 \neq 0$, entonces*

$$(z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w e^{2\pi i w\, n(z_1, z_2)},$$

donde $n(z_1, z_2)$ es el entero definido en el teorema 1.48.

Demostración.

$$(z_1 z_2)^w = e^{w \operatorname{Log}(z_1 z_2)} = e^{w[\operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2\pi i\, n(z_1, z_2)]}.$$

1.32 SENOS Y COSENOS COMPLEJOS

Definición 1.58. *Dado un número complejo z, definimos*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

NOTA. Cuando z es real, estas igualdades concuerdan con la definición 1.40.

Teorema 1.59. *Si $z = x + iy$, entonces tenemos*

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$
$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} 2 \cos z &= e^{iz} + e^{-iz} \\ &= e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x) \\ &= \cos x(e^{y} + e^{-y}) - i \operatorname{sen} x(e^{y} - e^{-y}) \\ &= 2 \cos x \cosh y - 2i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y. \end{aligned}$$

La demostración para sen z es análoga.

Más propiedades de los senos y cosenos se dan en los ejercicios.

1.33 INFINITO Y EL PLANO COMPLEJO AMPLIADO C*

A continuación extendemos el sistema de los números complejos adjuntando un punto ideal designado por el símbolo ∞.

Definición 1.60. *Por sistema de los números complejos ampliado* **C*** *entenderemos el plano complejo* **C** *junto con un símbolo ∞ que satisfaga las siguientes propiedades:*

a) *Si $z \in$ **C**, entonces se tiene $z + \infty = z - \infty = \infty$, $z/\infty = 0$.*
b) *Si $z \in$ **C**, pero $z \neq 0$, entonces $z(\infty) = \infty$ y $z/0 = \infty$.*
c) $\infty + \infty = (\infty)(\infty) = \infty$.

Definición 1.61. *Cada conjunto de* **C** *de la forma $\{z : |z| > r \geq 0\}$ se denomina entorno de ∞, o bola con centro en ∞.*

El lector puede preguntarse por qué a **R** le hemos adjuntado dos símbolos $+\infty$ y $-\infty$, mientras que a **C** sólo le adjuntamos un símbolo, ∞. La respuesta radica en el hecho de que existe una relación de orden $<$ entre números reales, mientras que entre números complejos no sucede lo mismo. Para que ciertas propiedades de los números reales que involucran la relación $<$ se verifiquen sin excepción, es necesario disponer de dos símbolos, $+\infty$ y $-\infty$, tales como los definidos anteriormente. Ya hemos mencionado, por ejemplo, que cada conjunto no vacío tiene un sup en **R***.

En **C** resulta más conveniente disponer de un solo punto ideal. A modo de ilustración, recordemos que la proyección estereográfica establece una correspondencia uno a uno entre los puntos del plano complejo y los puntos de la superficie de la esfera, distintos del Polo Norte. La aparente excepción del Polo Norte puede ser eliminada considerándolo la imagen geométrica del punto ideal ∞. Así conseguiremos una correspondencia uno a uno entre el plano complejo ampliado **C*** y la superficie total de la esfera. Es evidente, desde un punto geométrico, que si el Polo Sur se coloca en el origen del plano complejo, el exterior de un «amplio» círculo en el plano se colocará, por proyección estereográfica, en un «pequeño» casquete esférico alrededor del Polo Norte. Ello ilustra con claridad por qué hemos definido un entorno de ∞ mediante una desigualdad de la forma $|z| > r$.

EJERCICIOS

Enteros

1.1 Demostrar que no existe un primo máximo. (Una demostración era conocida por Euclides.)

1.2 Si n es un entero positivo, probar la identidad algebraica

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

1.3 Si $2^n - 1$ es primo, probar que n es primo. Un primo de la forma $2^p - 1$, donde p es primo, se llama un *primo de Mersenne.*

1.4. Si $2^n + 1$ es primo, entonces n es una potencia de dos. Un primo de la forma $2^{2^m} + 1$ se llama un *primo de Fermat. Indicación:* Utilizar el ejercicio 1.2.

1.5 Los *números de Fibonacci* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., son definidos recursivamente por la fórmula $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, con $x_1 = x_2 = 1$.
Probar que $(x_n, x_{n+1}) = 1$ y que $x_n = (a^n - b^n)/(a - b)$, donde a y b son las raíces de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$.

1.6 Probar que cada conjunto no vacío de números enteros positivos posee primer elemento. Este es el *principio de buena ordenación.*

Números racionaes e irracionales

1.7 Hallar el número racional cuya expresión decimal es 0,3344444...
1.8 Probar que la expresión decimal de x terminará en ceros (o en nueves) si, y sólo si, x es un número racional cuyo denominador es de la forma 2^n5^m, donde m y n son enteros no negativos.
1.9 Probar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.
1.10 Si a, b, c, d son racionales y si x es irracional, probar que $(ax + b)/(cx + d)$ es, en general, irracional. ¿Cuándo se dan las excepciones?
1.11 Dado un número real cualquiera $x > 0$, probar que hay un irracional entre 0 y x.
1.12 Si $a/b < c/d$ con $b > 0$, $d > 0$, probar que $(a + c)/(b + d)$ está entre a/b y c/d.
1.13 Sean a y b enteros positivos. Probar que $\sqrt{2}$ está siempre entre las dos fracciones a/b y $(a + 2b)/(a + b)$. ¿Qué fracción está más próxima a $\sqrt{2}$?
1.14 Probar que $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ es irracional para todo entero $n \geq 1$.
1.15 Dado un número real x y un entero $N > 1$, probar que existen enteros h y k con $0 < k \leq N$ tales que $|kx - h| < 1/N$. *Indicación.* Considerar los $N + 1$ números $tx - [tx]$ para $t = 0, 1, 2, \ldots, N$ y probar que algún par difiere a lo más $1/N$.
1.16 Si x es irracional, probar que existe una infinidad de números racionales h/k con $k > 0$ tales que $|x - h/k| < 1/k^2$. *Indicación.* Suponer que sólo existe un número finito $h_1/k_1, \ldots, h_r/k_r$ y aplicar el ejercicio 1.15 para llegar a contradicción, con $N > 1/\delta$, donde δ es el menor de los números $|x - h_i/k_i|$.
1.17 Sea x un número racional positivo de la forma

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!},$$

donde cada a_k es un entero no negativo con $a_k \leq k - 1$ para $k \geq 2$ y $a_n > 0$. Sea $[x]$ el mayor entero contenido en x. Probar que $a_1 = [x]$, que $a_k = [k!\, x] - k\,[(k-1)!\, x]$ para $k = 2, \ldots, n$, y que n es el menor entero tal que $n!\, x$ es entero. Recíprocamente, probar que cada número racional positivo x puede ser expresado en esta forma de una manera y una sola.

Cotas superiores

1.18 Probar que el sup y el inf de un conjunto, si existen, son únicos.
1.19 Hallar el sup y el inf de cada uno de los siguientes conjuntos de números reales:
a) Todos los números de la forma $2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r}$, donde p, q y r toman todos los valores enteros positivos.

b) $S = \{x : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$.
c) $S = \{x : (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) < 0\}$, donde $a < b < c < d$.

1.20 Probar la propiedad de la comparación para supremos (Teorema 1.16).
1.21 Sean A y B dos conjuntos de números positivos acotados superiormente, y sea $a = \sup A$, $b = \sup B$. Sea C el conjunto de todos los productos de la forma xy, donde $x \in A$ e $y \in B$. Probar que $ab = \sup C$.
1.22 Sean x real > 0 y k entero ≥ 2. Sea a_0 el mayor entero $\leq x$ y, supuestos definidos $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, sea a_n el mayor entero tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k^2} + \cdots + \frac{a_n}{k^n} \leq x.$$

a) Probar que $0 \leq a_i \leq k - 1$ para cada $i = 1, 2, \ldots$
b) Sea $r_n = a_0 + a_1k^{-1} + a_2k^{-2} + \ldots + a_nk^{-n}$ y probar que x es el sup del conjunto de los números racionales $r_1, r_2, \ldots$

NOTA. Cuando $k = 10$ los enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son los dígitos de una representación decimal de x. Para un k cualquiera obtenemos una representación en base k.

Desigualdades

1.23 Probar la identidad de Lagrange para número reales

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

Nótese que esta identidad implica la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
1.24 Probar que para números reales arbitrarios a_k, b_k, c_k tenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^4 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4\right).$$

1.25 Probar la desigualdad de Minkowski:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$$

Es la desigualdad triangular $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ para vectores n dimensionales, donde $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ y

$$\|\mathbf{a}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}.$$

1.26 Si $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$, probar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Indicación. $\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \geq 0$.

Números complejos

1.27 Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + bi$.

a) $(1 + i)^3$ b) $(2 + 3i)/(3 - 4i)$,
c) $i^5 + i^{16}$, d) $\frac{1}{2}(1 + i)/(1 + i^{-8})$.

1.28 En cada caso, determinar todos los valores reales x e y que satisfacen la relación dada.

a) $x + iy = |x - iy|$, b) $x + iy = (x - iy)^2$, c) $\sum_{k=0}^{100} i^k = x + iy$.

1.29 Si $z = x + iy$, x e y reales, el complejo conjugado de z es el número complejo $\bar{z} = x - iy$. Probar que:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, c) $z\bar{z} = |z|^2$,
d) $z + \bar{z} =$ al doble de la parte real de z.
e) $(z - \bar{z})/i =$ al doble de la parte imaginaria de z.

1.30 Describir geométricamente el conjunto de los números complejos z que satisfacen cada una de las condiciones siguientes:

a) $|z| = 1$, b) $|z| < 1$, c) $|z| \le 1$,
d) $z + \bar{z} = 1$, e) $z - \bar{z} = i$, f) $\bar{z} + z = |z|^2$.

1.31 Dados tres números complejos z_1, z_2, z_3 tales que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, probar que estos tres números son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en el círculo unidad y centrado en el origen.

1.32 Si a y b son números complejos, probar que:

a) $|a - b|^2 \le (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$.

b) Si $a \neq 0$, entonces $|a + b| = |a| + |b|$ si, y sólo si, b/a es real y no negativo.

1.33 Si a y b son números complejos, probar que

$$|a - b| = |1 - \bar{a}b|$$

si, y sólo si, $|a| = 1$ o $|b| = 1$. ¿Para qué números a y b es válida la desigualdad $|a - b| < |1 - \bar{a}b|$?

1.34 Si a y c son números reales constantes, b es complejo, probar que la ecuación

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0 \qquad (a \neq 0,\ z = x + iy)$$

representa un círculo en el plano xy.

1.35 Recordemos la definición de la inversa de la tangente: dado un número real t, $\operatorname{tg}^{-1}(t)$ es el único número real θ que satisface las dos condiciones siguientes:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = t.$$

Si $z = x + iy$, probar que

a) $\arg(z) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, si $x > 0$,

b) $\arg(z) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$, si $x < 0$, $y \ge 0$,

c) $\arg(z) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$, si $x < 0$, $y < 0$,

d) $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ si $x = 0$, $y > 0$; $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ si $x = 0$, $y < 0$.

1.36. Definimos el siguiente «pseudo-orden» de números complejos: diremos que $z_1 < z_2$ si tenemos

i) $|z_1| < |z_2|$ o ii) $|z_1| = |z_2|$ y $\arg(z_1) < \arg(z_2)$.

¿Cuáles de los axiomas 6, 7, 8, 9 se satisfacen con esta relación?

1.37 ¿Cuáles de los axiomas 6, 7, 8, 9 se satisfacen si la pseudo-ordenación se define como sigue? Diremos que $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ si tenemos

i) $x_1 < x_2$ o ii) $x_1 = x_2$ e $y_1 < y_2$.

1.38 Establecer y demostrar un teorema análogo al teorema 1.48, expresando arg (z_1/z_2) en función de arg (z_1) y arg (z_2).

1.39 Establecer y demostrar un teorema análogo al teorema 1.54, expresando Log (z_1/z_2) en función de Log (z_1) y Log (z_2).

1.40 Probar que las raíces n-ésimas de 1 (llamadas también raíces n-ésimas de la unidad) vienen dadas por $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$, donde $\alpha = e^{2\pi i/n}$, y probar que las raíces $\neq 1$ satisfacen la ecuación

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = 0.$$

1.41 a) Probar que $|z^i| < e^{\pi}$ para todo complejo $z \neq 0$.
b) Probar que no existe una constante $M > 0$ tal que $|\cos z| < M$ cualquiera que sea z.

1.42 Si $w = u + iv$ (u, v reales), probar que

$$z^w = e^{u\log|z| - v\arg(z)}e^{i[v\log|z| + u\arg(z)]}.$$

1.43 a) Probar que $\operatorname{Log}(z^w) = w \operatorname{Log} z + 2\pi i n$, donde n es un entero.
b) Probar que $(z^w)^\alpha = z^{w\alpha} e^{2\pi i n\alpha}$, donde n es un entero.

1.44 i) Si θ y a son números reales, $-\pi < \theta \le +\pi$, probar que

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^a = \cos(a\theta) + i \operatorname{sen}(a\theta)$$

ii) Probar que, en general, la restricción $-\pi < \theta \le +\pi$ es necesaria en (i) haciendo $\theta = -\pi$ y $a = \frac{1}{2}$.

iii) Si a es un entero, probar que la fórmula de (i) se verifica sin necesidad de imponer restricciones a θ. En este caso se conoce como el teorema de Moivre.

1.45 Utilizar el teorema de Moivre (ejercicio 1.44) para obtener las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta,$$
$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta$$

válidas para todo θ real. ¿Son válidas si θ es complejo?

1.46 Definimos $\operatorname{tg} z = (\operatorname{sen} z)/(\cos z)$ y probar que, para $z = x + iy$, se tiene

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} 2x + i \operatorname{senh} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

1.47 Sea w un número complejo dado. Si $w \neq \pm 1$, probar que existen dos valores de $z = x + iy$ que satisfacen las condiciones $\cos z = w$ y $-\pi < x \leq +\pi$. Hallar estos valores cuando $w = i$ y cuando $w = 2$.

1.48 Demostrar la identidad de Lagrange para números complejos:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 - \sum_{1 \leq k < j \leq n} |a_k \bar{b}_j - a_j \bar{b}_k|^2.$$

Utilizarla para deducir la desigualdad de Cauchy-Schwarz para números complejos.

1.49 a) Probar, utilizando la ecuación de la parte imaginaria de la fórmula de Moivre, que

$$\operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}^n \theta \left\{\binom{n}{1}\operatorname{cotg}^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\operatorname{cotg}^{n-3}\theta + \binom{n}{5}\operatorname{cotg}^{n-5}\theta - + \cdots\right\}.$$

b) Si $0 < \theta < \pi/2$, probar que

$$\operatorname{sen}(2m+1)\theta = \operatorname{sen}^{2m+1}\theta P_m(\operatorname{cotg}^2\theta)$$

donde P_m es el polinomio de grado m dado por

$$P_m(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - + \cdots$$

Utilizar este resultado para demostrar que P_m tiene ceros en los m puntos distintos $x_k = \operatorname{cotg}^2 \{\pi k/(2m+1)\}$ para $k = 1, 2, \ldots, m$.

c) Demostrar que la suma de los ceros de P_m viene dada por

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi k}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3},$$

y que la suma de sus cuadrados viene dada por

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotg}^4 \frac{\pi k}{2m+1} = \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}.$$

NOTA. Estas identidades pueden utilizarse para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4/90$. (Ver ejercicios 8.46 y 8.47.)

1.50 Probar que $z^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} (z - e^{2\pi ik/n})$ para todo complejo z. Utilizar esto para deducir la fórmula

$$\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \quad \text{para } n \geq 2.$$

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

1.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol. 1, 2.ª ed. Ed. Reverté, S. A., Barcelona.
1.2 Birkhoff, G., y MacLane, S., *A Survey of Modern Algebra*, 3.ª ed. Macmillan, New York, 1965. (Hay traducción al castellano. Ed. Vicens Vives, Barcelona.)
1.3 Cohen, L., y Ehrlich, G., *The Structure of the Real-Number System*. Van Nostrand, Princeton, 1963.
1.4 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis*. Addison-Wesley, Reading, 1966.
1.5 Hardy, G. H., *A Course of Pure Mathematics*, 10.ª ed. Cambridge University Press, 1952.
1.6 Hobson, E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, Vol. 1, 3.ª ed. Cambridge University Press, 1927.
1.7 Landau, E., *Foundations of Analysis*, 2.ª ed. Chelsea, New York, 1960.
1.8 Robinson, A., *Non-Standard Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1966.
1.9 Thurston, H. A., *The Number System*. Blackie, London, 1956.
1.10 Wilder, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*. 2.ª ed. Wiley, New York, 1965.

CAPÍTULO 2

Algunas nociones básicas de la teoría de conjuntos

2.1 INTRODUCCIÓN

Al estudiar las distintas ramas de la Matemática es útil manejar la notación y la terminología de la Teoría de conjuntos. Esta teoría, desarrollada por Boole y por Cantor a finales del siglo diecinueve, ha tenido una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas del siglo veinte. Ha unificado muchas ideas, aparentemente desconexas, y ha ayudado a reducir muchos conceptos matemáticos a sus fundamentos lógicos de una manera elegante y metódica.

No daremos un desarrollo sistemático de la teoría de conjuntos; nos limitaremos a discutir algunos de sus conceptos básicos. El lector que desee explorar este terreno más ampliamente puede consultar las referencias del final de este capítulo.

Una colección de objetos, considerados como una sola entidad, se llamará *conjunto*. Los objetos de la colección se llamarán *elementos* o *miembros* del conjunto y diremos que *pertenecen al* conjunto o que *están* contenidos *en él*. El conjunto, a su vez se dice que, los *contiene* o *está compuesto* por sus elementos. Nuestro interés radica, principalmente, en los conjuntos de entes matemáticos; esto es, conjuntos de números, puntos, funciones, curvas, etc. Sin embargo, como la mayor parte de la teoría de conjuntos no depende de la naturaleza de los objetos individuales de la colección, supone una gran economía de imaginación estudiar conjuntos cuyos elementos puedan ser de cualquier tipo. Es a causa de esta cualidad de generalización por lo que la Teoría de conjuntos ha tenido un efecto tan grande en la mayor parte de los desarrollos matemáticos.

2.2 NOTACIONES

Los *conjuntos* los designaremos, usualmente, por medio de letras mayúsculas:

$$A, B, C, \ldots, X, Y, Z,$$

y los *elementos* por medio de letras minúsculas: $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Se escribe $x \in S$ para indicar que «x es un elemento de S», o que «x pertenece a S». Si x no pertenece a S, se escribe $x \notin S$. A veces para designar un conjunto escribiremos sus elementos entre llaves; por ejemplo, el conjunto de los enteros pares positivos menores que 10 se expresa por medio de $\{2, 4, 6, 8\}$. Se escribe $S = \{x : x$ satisface a $P\}$ para indicar que S es la colección de los x para los cuales se verifica la propiedad P.

A partir de un conjunto dado es posible formar nuevos conjuntos, llamados *subconjuntos* del conjunto dado. Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros positivos menores que 10 que son divisibles por 4, es decir, $\{4, 8\}$, es un subconjunto del conjunto de los enteros pares positivos menores que 10. En general, decimos que un conjunto A es subconjunto de B, y se escribe $A \subseteq B$, si todo elemento de A pertenece a B. La afirmación $A \subseteq B$ no elimina la posibilidad de que sea $B \subseteq A$. De hecho, son simultáneas $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ si, y sólo si, A y B tienen los mismos elementos. En este caso, decimos que A y B son iguales y escribimos $A = B$. Si A y B no son iguales, escribimos $A \neq B$. Si $A \subseteq B$, pero $A \neq B$, entonces se dice que A es un *subconjunto propio* de B.

Conviene considerar la posibilidad de un conjunto sin elementos; tal conjunto se llama *conjunto vacío* y se le considera, por convenio, subconjunto de todo conjunto. El lector puede hallar útil imaginar un conjunto como una caja que contiene ciertos objetos, sus elementos. El conjunto vacío es, entonces, una caja vacía. El conjunto vacío se designa por el símbolo $\emptyset$.

2.3 PARES ORDENADOS

Consideremos un conjunto de dos elementos a y b; es decir, el conjunto $\{a, b\}$. En virtud de nuestra definición de igualdad, este conjunto es igual al conjunto $\{b, a\}$, ya que no se halla involucrada la cuestión del orden. Sin embargo, es necesario considerar también conjuntos de dos elementos en los que el orden *sea* importante. Por ejemplo, en Geometría analítica plana, las coordenadas (x, y) de un punto representan un *par ordenado* de números. El *punto* $(3, 4)$ es distinto del punto $(4, 3)$, mientras que el *conjunto* $\{3, 4\}$ es el mismo que el conjunto $\{4, 3\}$. Cuando deseemos considerar un conjunto de dos elementos a y b, *ordenados*, escribiremos los elementos entre paréntesis: (a, b). Entonces a es el primer elemento y b el segundo. Es posible dar una definición de par ordenado de objetos (a, b) que involucre tan sólo el lenguaje de la teoría de conjuntos. Tal definición es la siguiente:

Definición 2.1.

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Esta definición establece que (a, b) es un conjunto que contiene dos elementos $\{a\}$ y $\{a, b\}$. Utilizando dicha definición se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.2. *$(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$.*

Este teorema muestra que la definición 2.1 es una definición «razonable» de par ordenado, en el sentido de que el objeto a se distingue del objeto b. La demostración del teorema 2.2 es un ejercicio instructivo para el lector. (Ver ejercicio 2.1.)

2.4 PRODUCTO CARTESIANO DE DOS CONJUNTOS

Definición 2.3. *Dados dos conjuntos A y B, llamaremos producto cartesiano de A y B, y lo representaremos $A \times B$, al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$.*

Ejemplo. Si $\mathbf{R}$ representa el conjunto de todos los números reales, entonces a $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ le corresponde el conjunto de todos los números complejos.

2.5 RELACIONES Y FUNCIONES

Sean x e y números reales, de modo que el par ordenado (x, y) pueda ser interpretado como las coordenadas rectangulares de un punto del plano xy (o como un número complejo). Encontramos, con frecuencia, expresiones tales como

$$xy = 1, \qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 \leq 1, \qquad x < y. \tag{a}$$

Cada una de estas expresiones determina un cierto conjunto de pares ordenados (x, y) de números reales; es decir, el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) para los que la expresión se satisface. Un tal conjunto de pares orde-

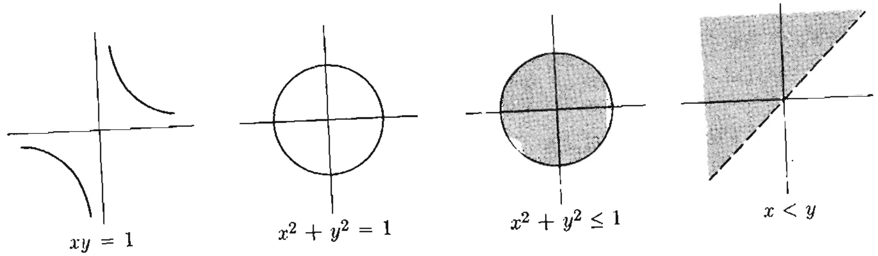


Figura 2.1

nados se llama *relación plana*. Se llama *grafo de la relación* al conjunto de puntos del plano que le corresponde si a cada par ordenado de la relación se le asocia un punto del plano. Los grafos de las relaciones descritas en (a) están dibujados en la Fig. 2.1.

El concepto de relación puede formularse con tal generalidad que los objetos x e y del par (x, y) no hayan de ser, necesariamente, números, sino que puedan ser objetos de cualquier naturaleza.

Definición 2.4. *Se llama relación a todo conjunto de pares ordenados.*

Si S es una relación, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de los pares (x, y) de S se llama *dominio* de S y se designa por $\mathcal{D}(S)$. El conjunto de los segundos elementos y se llama *recorrido* de S y se designa por $\mathcal{R}(S)$.

El primer ejemplo dibujado en la Fig. 2.1 es un tipo especial de relación, conocido con el nombre de *función*.

Definición 2.5. *Una función F es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tienen el mismo primer elemento. Esto es, si $(x, y) \in F$ y $(x, z) \in F$, entonces $y = z$.*

La definición de función requiere que, para cada x del dominio de F, exista exactamente un y tal que $(x, y) \in F$. Es costumbre llamar a y el *valor de F en x* y escribir

$$y = F(x)$$

en vez de $(x, y) \in F$, para indicar que el par (x, y) pertenece al conjunto F.

En lugar de la descripción de una función F mediante la presentación de los pares que contiene, es de ordinario preferible describir el dominio de F y luego para cada x del mismo indicar la manera de obtener el valor $F(x)$. En relación con esto, disponemos del siguiente teorema cuya demostración se deja de ejercicio para el lector.

Teorema 2.6. *Dos funciones F y G son iguales si, y sólo si,*

a) $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(G)$ *(F y G tienen el mismo dominio), y*
b) $F(x) = G(x)$ *para todo x del $\mathcal{D}(F)$.*

2.6 MÁS TERMINOLOGÍA REFERENTE A FUNCIONES

Cuando el $\mathcal{D}(F)$ es un subconjunto de $\mathbf{R}$, entonces F se denomina *función de una variable real*. Si $\mathcal{D}(F)$ es un subconjunto de $\mathbf{C}$, el sistema de los números complejos, entonces F se denomina *función de una variable compleja*.

Si $\mathcal{D}(F)$ es un subconjunto de un producto cartesiano $A \times B$, entonces F es una *función de dos variables*. En este caso los valores de la función se designan por $F(a, b)$ en vez de $F((a, b))$. Una función de dos variables reales es aquella cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Si S es un subconjunto de $\mathcal{D}(F)$, diremos que F está *definida en S*. En este caso, el conjunto de los $F(x)$ con $x \in S$ se denomina *imagen de S por F* y se designa por $F(S)$. Si T es un conjunto cualquiera que contenga a $F(S)$, entonces F se llama también *aplicación de S en T*. Esto se expresa, corrientemente, escribiendo

$$F : S \to T.$$

Si $F(S) = T$, se dice que la aplicación es *sobre T*. Una aplicación de S en sí mismo se denomina a veces *transformación*.

Consideremos, por ejemplo, la función de una variable compleja definida por la ecuación $F(z) = z^2$. Esta función aplica cada sector S de la forma $0 \leq \arg(z) \leq \alpha \leq \pi/2$ del plano complejo z sobre un sector $F(S)$ determinado por las desigualdades $0 \leq \arg [F(z)] \leq 2\alpha$. (Ver Fig. 2.2.)

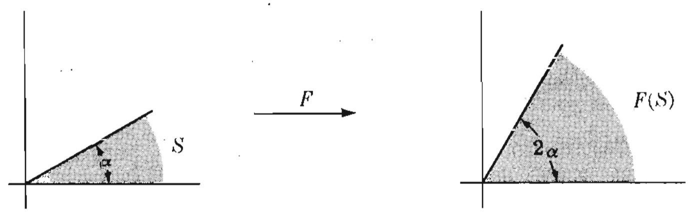


Figura 2.2

Si dos funciones F y G satisfacen la relación de inclusión $G \subseteq F$, se dice que G es una *restricción* de F o que F es una *extensión* de G. En particular, si S es un subconjunto de $\mathcal{D}(F)$ y si G está definida por la ecuación

$$G(x) = F(x) \qquad \text{para todo } x \text{ de } S,$$

entonces se dice que G es la restricción de F a S. La función G consta de los pares de la forma $(x, F(x))$, con $x \in S$. Su dominio es S y su recorrido es $F(S)$.

2.7 FUNCIONES UNO A UNO E INVERSAS

Definición 2.7. *Sea F una función definida en S. Se dice que F es uno a uno en S si, y sólo si, para todo x e y de S,*

$$F(x) = F(y) \qquad \textit{implica } x = y.$$

Esto equivale a decir que una función que es uno a uno en S asigna valores distintos a elementos de S distintos. Estas funciones se llaman también *inyectivas*. Son importantes puesto que, como veremos en seguida, poseen *inversas*. Sin embargo, antes de establecer la definición de inversa de una función, conviene introducir una noción más general, que es la de *inversa* de una relación.

Definición 2.8. *Dada una relación S, la nueva relación $\check{S}$ definida por*

$$\check{S} = \{(a, b) : (b, a) \in S\}$$

se llama la inversa de S.

Así, un par ordenado (a, b) pertenece a $\check{S}$ si, y sólo si, el par con los elementos invertidos, (b, a), pertenece a S. Cuando S es una *relación plana*, esto significa, simplemente, que el grafo de $\check{S}$ es el simétrico del grafo de S con respecto a la recta $y = x$ como eje de simetría. En la relación definida por $x < y$, la relación inversa se define por $y < x$.

Definición 2. 9. *Supongamos que la relación F es una función. Consideremos la relación inversa $\check{F}$, que puede ser o no ser una función. Si $\check{F}$ es también una función, entonces $\check{F}$ se llama inversa de F y se designa por F^{-1}.*

La Figura 2.3(a) ilustra un ejemplo de una función F para la que $\check{F}$ no es función. En la Fig. 2.3(b) tanto F como su inversa son funciones.

El siguiente teorema nos dice que toda función que sea uno a uno en su dominio posee, siempre, una inversa.

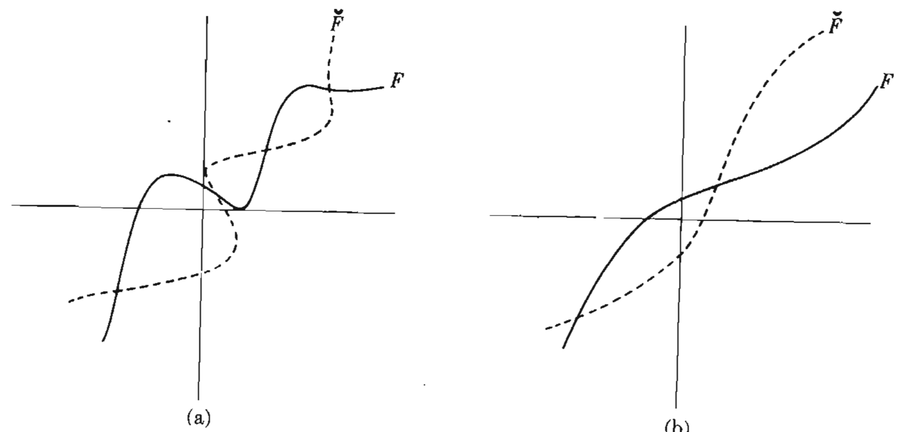


Figura 2.3

Teorema 2.10. *Si la función F es uno a uno en su dominio, entonces $\check{F}$ es también una función.*

Demostración. Para probar que $\check{F}$ es una función, debemos probar que si $(x, y) \in \check{F}$ y $(x, z) \in \check{F}$, entonces $y = z$. Pero $(x, y) \in \check{F}$ significa que $(y, x) \in F$; esto es, $x = F(y)$. Análogamente, $(x, z) \in \check{F}$ significa que $x = F(z)$. Por lo tanto $F(y) = F(z)$ y, como que hemos supuesto que F es uno a uno, ello implica $y = z$. Luego, $\check{F}$ es una función.

NOTA. El mismo argumento prueba que si F es uno a uno en un subconjunto S de $\mathfrak{D}(F)$, entonces la restricción de F a S posee una inversa.

2.8 FUNCIONES COMPUESTAS

Definición 2.11. *Dadas dos funciones F y G tales que $\mathfrak{R}(F) \subseteq \mathfrak{D}(G)$, se puede construir una nueva función, la compuesta $G \circ F$ de F y G, definida como sigue: para cada x del dominio de F, $(G \circ F)(x) = G[F(x)]$.*

Como que $\mathfrak{R}(F) \subseteq \mathfrak{D}(G)$, el elemento $F(x)$ está en el dominio de G, y por lo tanto tiene sentido considerar $G[F(x)]$. En general, no es verdad que $G \circ F = F \circ G$. De hecho, $F \circ G$ sólo tiene sentido si el recorrido de G está contenido en el dominio de F. Sin embargo, la ley asociativa,

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F,$$

se verifica siempre que ambos miembros tengan sentido. (La verificación será un ejercicio interesante para el lector. Ver ejercicio 2.4.)

2.9 SUCESIONES

Entre los ejemplos más importantes de funciones se hallan las que están definidas en subconjuntos de los enteros.

Definición 2.12. *Por sucesión finita de n términos entenderemos una función F cuyo dominio sea el conjunto de números $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

El recorrido de F es el conjunto $\{F(1), F(2), F(3), \ldots, F(n)\}$, ordinariamente desginado por $\{F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n\}$. Los elementos del recorrido se llaman *términos* de la sucesión y, además, pueden ser objetos arbitrarios de cualquier naturaleza.

Definición 2.13. *Por sucesión infinita entenderemos una función F cuyo dominio sea el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$ de todos los enteros positivos. El recorrido* *de F, esto es, el conjunto $\{F(1), F(2), F(3), \ldots\}$, se designa también por $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$, y el valor F_n se llama el término n-ésimo de la sucesión.*

Por motivos de brevedad, usaremos en ocasiones la notación $\{F_n\}$ para designar la sucesión infinita cuyo término n-ésimo es F_n.

Sea $s = \{s_n\}$ una sucesión infinita, y sea k una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos y cuyo recorrido es un subconjunto del conjunto de los enteros positivos. Supongamos que k «conserva el orden» o, con otras palabras, «es creciente», esto es, supongamos que

$$k(m) < k(n), \qquad \text{si } m < n.$$

La función compuesta $s \circ k$ está definida para todo entero $n \geq 1$, y para cada uno de tales n se tiene

$$(s \circ k)(n) = s_{k(n)}.$$

Una tal función compuesta se llama una *subsucesión* de s. De nuevo, por motivos de brevedad, utilizaremos a menudo, lo notación $\{s_{k(n)}\}$ o $\{s_{k_n}\}$ para designar la subsucesión de $\{s_n\}$ cuyo n-ésimo término es $s_{k(n)}$.

Ejemplo. Sea $s = \{1/n\}$ y sea k definida por $k(n) = 2^n$. Entonces $s \circ k = \{1/2^n\}$.

2.10 CONJUNTOS COORDINABLES (EQUIPOTENTES)

Definición 2.14. *Dos conjuntos A y B son coordinables, o equipotentes, y se escribe $A \backsim B$ si, y sólo si, existe una función uno a uno F cuyo dominio es el conjunto A y cuyo recorrido es el conjunto B.*

Se dice también que F establece una *correspondencia uno a uno* entre los conjuntos A y B. Es claro que cada conjunto A es coordinable consigo mismo (tomar como F la función «identidad» definida por $F(x) = x$ para todo x de A). Además, si $A \backsim B$ entonces $B \backsim A$, ya que si F es una función uno a uno que hace a A coordinable con B, entonces F^{-1} hará B coordinable con A. También, si $A \backsim B$ y si $B \backsim C$, entonces $A \backsim C$. (La demostración se deja al lector.)

2.11 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Se dice que un conjunto S es *finito* y que contiene n elementos si

$$S \sim \{1, 2, \ldots, n\}.$$

El entero n se llama *número cardinal* o simplemente *cardinal* de S. Es un ejercicio fácil demostrar que si $\{1, 2, \ldots, n\} \backsim \{1, 2, \ldots, m\}$ entonces $m = n$. Por

lo tanto, el cardinal de un conjunto finito está bien definido. El conjunto vacío se considera también finito. Su cardinal se define por 0.

Los conjuntos que no son finitos se llaman *infinitos*. La diferencia principal entre ambos es que un conjunto infinito puede ser semejante a alguno de sus subconjuntos propios, mientras que un conjunto finito nunca podrá ser semejante a uno de sus subconjuntos propios. (Ver ejercicio 2.13.) Por ejemplo, el conjunto $\mathbf{Z}^+$ de todos los enteros positivos es semejante al subconjunto propio $\{2, 4, 8, 16, \ldots\}$ formado por las potencias de 2. La función uno a uno F que los hace semejantes está definida por $F(x) = 2^x$ para cada x de $\mathbf{Z}^+$.

2.12 CONJUNTOS NUMERABLES Y NO NUMERABLES

Un conjunto S se dice que es *infinito numerable* si es coordinable con el conjunto de todos los enteros positivos; esto es, si

$$S \sim \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

En este caso existe una función f que establece una correspondencia uno a uno entre los enteros positivos y los elementos de S; por consiguiente, el conjunto S puede ser descrito como sigue:

$$S = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\}.$$

A menudo se utilizan subíndices y $f(k)$ se designa por a_k (o por otra notación semejante) y se escribe, entonces, $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Lo importante aquí es que la correspondencia nos permite utilizar los enteros positivos como «etiquetas» de los elementos de S. Un conjunto infinito numerable se dice que tiene cardinal $\aleph_0$ (léase: *álef subcero*).

Definición 2.15. *Un conjunto S es numerable si es o bien finito o bien infinito numerable. Un conjunto que no sea numerable se llama no numerable.*

Las palabras *numerable* y *no numerable* son sustituidas a veces por *contable* y *no contable.*

Teorema 2.16. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Demostración. Sea S un conjunto numerable dado y supongamos que $A \subseteq S$. Si A es finito, no hay nada que demostrar, por lo tanto podemos suponer que A es infinito (lo cual significa que S también lo es). Sea $s = \{s_n\}$ una sucesión infinita de términos todos distintos tal que

$$S = \{s_1, s_2, \ldots\}.$$

Se define una función en el conjunto de los enteros positivos como sigue:

Sea $k(1)$ el menor entero positivo m tal que $s_m \in A$. Suponiendo que $k(1)$, $k(2)$, ..., $k(n-1)$ han sido definidas, sea $k(n)$ el menor entero positivo $m > k(n-1)$ tal que $s_m \in A$. Entonces k conserva el orden: $m > n$ implica $k(m) > k(n)$. Se forma entonces la función compuesta $s \circ k$. El dominio de $s \circ k$ es el conjunto de los enteros positivos y el recorrido de $s \circ k$ es A. Además, $s \circ k$ es uno a uno, ya que

$$s[k(n)] = s[k(m)],$$

implica

$$s_{k(n)} = s_{k(m)},$$

que significa $k(n) = k(m)$, y esto implica $n = m$. Esto prueba el teorema.

2.13 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES NO ES NUMERABLE

El siguiente teorema demuestra que existen conjuntos infinitos no numerables.

Teorema 2.17. *El conjunto de todos los números reales no es numerable.*

Demostración. Es suficiente demostrar que el conjunto de los x que satisfacen $0 < x < 1$ es no numerable. Si los números reales de este intervalo fuesen numerables, existiría una sucesión $s = \{s_n\}$ cuyos términos constituirían todo el intervalo. Probaremos que esto es imposible construyendo, dentro del intervalo, un número real que no sea término de esta sucesión. Una vez escritos los s_n como decimales infinitos:

$$s_n = 0.u_{n,1}u_{n,2}u_{n,3}\ldots,$$

donde cada $u_{n,i}$ es 0, 1, ..., o 9, consideramos el número real y cuya expresión decimal es

$$y = 0.v_1v_2v_3\ldots,$$

donde

$$v_n = \begin{cases} 1, & \text{si } u_{n,n} \neq 1, \\ 2, & \text{si } u_{n,n} = 1. \end{cases}$$

Entonces ningún término de la sucesión $\{s_n\}$ puede ser igual a y, ya que y difiere de s_1 en el primer decimal, de s_2 en el segundo decimal, ..., de s_n en el n-ésimo decimal. (Una situación como $s_n = 0{,}1999\ldots$ e $y = 0{,}2000\ldots$ no puede darse por la manera como han sido elegidas las v_n.) Como $0 < y < 1$, el teorema queda demostrado.

Teorema 2.18. *Si $\mathbf{Z}^+$ designa al conjunto de todos los enteros positivos, entonces el producto cartesiano $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ es numerable.*

Demostración. Se define la función f en $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ como sigue:

$$f(m, n) = 2^m 3^n, \qquad \text{si } (m, n) \in \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+.$$

Entonces f es uno a uno en $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ y el recorrido de f es un subconjunto de $\mathbf{Z}^+$.

2.14 ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A_1 y A_2, definimos un nuevo conjunto, llamado *reunión* de A_1 y A_2, designado $A_1 \cup A_2$, como sigue:

Definición 2.19. *La reunión $A_1 \cup A_2$ es el conjunto cuyos elementos son los elementos que pertenecen a A_1 o a A_2 o a ambos.*

Esto es lo mismo que decir que $A_1 \cup A_2$ consta de los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos A_1, A_2. Como en esta definición no se hallan involucradas cuestiones de orden, la reunión $A_1 \cup A_2$ es la misma que $A_2 \cup A_1$; esto es, la reunión de conjuntos es conmutativa. La definición está dada de tal manera que la reunión de conjuntos es asociativa:

$$A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3.$$

La definición de reunión puede extenderse a colecciones finitas o infinitas de conjuntos:

Definición 2.20. *Si F es una colección arbitraria de conjuntos, entonces la reunión de todos los elementos de F se define como el conjunto de los elementos que pertenecen a uno, por lo menos, de los conjuntos de F, y se designa por*

$$\bigcup_{A \in F} A.$$

Si F es una colección finita de conjuntos, $F = \{A_1, \ldots, A_n\}$, se escribe

$$\bigcup_{A \in F} A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Si F es una colección numerable, $F = \{A_1, A_2, \ldots\}$, se escribe

$$\bigcup_{A \in F} A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

Definición 2.21. *Si F es una colección arbitraria de conjuntos, la intersección de F se define como el conjunto cuyos elementos son los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de F, y se designa por*

$$\bigcap_{A \in F} A.$$

La intersección de dos conjuntos A_1 y A_2 se desgina por $A_1 \cap A_2$ y consta de los elementos comunes a ambos conjuntos. Si A_1 y A_2 no tienen elementos comunes, entonces $A_1 \cap A_2$ es el conjunto vacío y A_1 y A_2 se llaman *disjuntos*. Si F es una colección finita (como más arriba), se escribe

$$\bigcap_{A \in F} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$$

y si F es una colección numerable, se escribe

$$\bigcap_{A \in F} A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

Si los conjuntos de la colección carecen de elementos comunes, su intersección es el conjunto vacío. Nuestras definiciones de reunión e intersección son, además, aplicables cuando F no es numerable. Por el modo como se han definido las reuniones y las intersecciones, las leyes conmutativas y asociativas se satisfacen automáticamente.

Definición 2.22. *El complemento de A relativamente a B, designado por $B - A$, se define como el conjunto*

$$B - A = \{x : x \in B, \text{ pero } x \notin A\}.$$

Nótese que $B - (B - A) = A$ siempre que $A \subseteq B$. Nótese también que $B - A = B$ si $B \cap A$ es vacío.

Las nociones de reunión, intersección, y complementario están ilustradas en la Fig. 2.4.

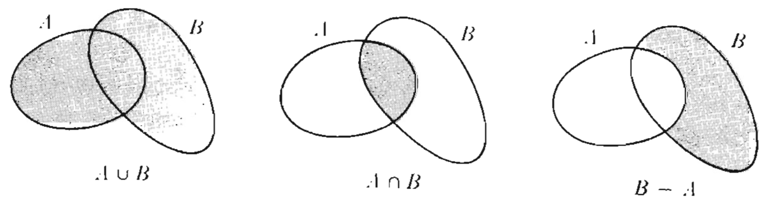


Figura 2.4

Teorema 2.23. *Sea F una colección de conjuntos. Entonces para cada conjunto B, se tiene*

$$B - \bigcup_{A \in F} A = \bigcap_{A \in F} (B - A),$$

y

$$B - \bigcap_{A \in F} A = \bigcup_{A \in F} (B - A).$$

Demostración. Sea $S = \bigcup_{A \in F} A$, $T = \bigcap_{A \in F} (B - A)$. Si $x \in B - S$, entonces $x \in B$, pero $x \notin S$. Por lo tanto, no es cierto que x pertenezca a uno, por lo menos, de los A de F; por lo tanto x no pertenece a ninguno de los A de F. Luego, para cada A de F, $x \in B - A$. Pero esto implica que $x \in T$, luego $B - S \subseteq T$. Deshaciendo los pasos, se obtiene que $T \subseteq B - S$, y esto demuestra que $B - S = T$. Para demostrar la segunda afirmación, utilizar un argumento semejante.

2.15 COLECCIONES NUMERABLES DE CONJUNTOS NUMERABLES

Definición 2.24. *Si F es una colección de conjuntos tal que, cada dos conjuntos de F distintos, son disjuntos, se dice entonces que F es una colección de conjuntos disjuntos.*

Teorema 2.25. *Si F es una colección numerable de conjuntos disjuntos, tal como $F = \{A_1, A_2, \ldots\}$, en la que cada conjunto A_n es numerable, entonces la reunión $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ es también numerable.*

Demostración. Sea $A_n = \{a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n} \ldots\}$, $n = 1, 2, \ldots$, y sea $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ Entonces todo elemento x de S está en uno de los conjuntos de F y, por lo tanto, $x = a_{m,n}$ para un cierto par de enteros (m, n). El par (m, n) está unívocamente determinado por x, ya que F es una colección de conjuntos disjuntos. Por lo tanto la función f definida por $f(x) = (m, n)$ si $x = a_{m,n}$, $x \in S$, tiene dominio S. El recorrido $f(S)$ es un subconjunto de $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ (donde $\mathbf{Z}^+$ es el conjunto de los enteros positivos) y por lo tanto es numerable. Pero f es uno a uno y por consiguiente $S \sim f(S)$, que equivale a decir que S es numerable.

Teorema 2.26. *Si $F = \{A_1, A_2, \ldots\}$ es una colección numerable de conjuntos, sea $G = \{B_1, B_2, \ldots\}$, donde $B_1 = A_1$ y, para $n > 1$,*

$$B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Entonces G es una colección de conjuntos disjuntos, y se tiene que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Demostración. Cada conjunto B_n se ha construido de forma que carezca de elementos comunes con los conjuntos anteriores $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$. Por lo tanto G es una colección de conjuntos disjuntos. Sea $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Probaremos que $A = B$. Ante todo, si $x \in A$, entonces $x \in A_k$ para un cierto k. Si n es el menor de estos k, entonces $x \in A_n$ pero $x \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, lo cual significa que $x \in B_n$, y entonces $x \in B$. Por consigueinte $A \subseteq B$. Recíprocamente, si $x \in B$, entonces $x \in B_n$ para algún n, y entonces $x \in A_n$ para este mismo n. Luego $x \in A$ y esto prueba que $B \subseteq A$.

Utilizando los teoremas 2.25 y 2.26, se obtiene inmediatamente el

Teorema 2.27. *Si F es una colección numerable de conjuntos numerables, entonces la reunión de todos los conjuntos de F es un conjunto numerable.*

Ejemplo 1. El conjunto **Q** de todos los números racionales es un conjunto numerable.

Demostración. Sea A_n el conjunto de todos los números racionales positivos que tienen denominador n. El conjunto de todos los números racionales positivos es igual a $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. De aquí se sigue que **Q** es numerable, ya que cada A_n lo es.

Ejemplo 2. El conjunto S de intervalos con extremos racionales es numerable.

Demostración. Sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ el conjunto de números racionales y sea A_n el conjunto de todos los intervalos cuyo extremo izquierdo es x_n y cuyo extremo derecho es un número racional. Entonces A_n es numerable y lo es $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

EJERCICIOS

2.1 Demostrar el teorema 2.2. *Indicación.* $(a, b) = (c, d)$ significa $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Recuérdese ahora la definición de conjuntos iguales.

2.2 Sea S una relación y sea $\mathcal{D}(S)$ su dominio. La relación S se llama

i) *reflexiva* si $a \in \mathcal{D}(S)$ implica $(a, a) \in S$,
ii) *simétrica* si $(a, b) \in S$ implica $(b, a) \in S$,
iii) *transitiva* si $(a, b) \in S$ y $(b, c) \in S$ implica $(a, c) \in S$.

Una relación que sea reflexiva, simétrica y transitiva se llama *relación de equivalencia.* Determinar cuál de estas propiedades satisface S, si S es el conjunto de todos los pares de números reales (x, y) tales que

a) $x \leq y$, b) $x < y$, c) $x < |y|$,
d) $x^2 + y^2 = 1$, e) $x^2 + y^2 < 0$, f) $x^2 + x = y^2 + y$.

2.3 Las siguientes funciones F y G están definidas para todo número real x por las ecuaciones dadas. En cada uno de los casos en que la función compuesta $G \circ F$ pueda definirse, dar el dominio de $G \circ F$ y una fórmula (o fórmulas) para $(G \circ F)(x)$.

a) $F(x) = 1 - x$, $\quad G(x) = x^2 + 2x$.
b) $F(x) = x + 5$, $\quad G(x) = |x|/x$, si $x \neq 0$, $G(0) = 1$.
c) $F(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{en los casos restantes,} \end{cases}$ $\quad G(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en los casos restantes.} \end{cases}$

Hallar $F(x)$ si $G(x)$ y $G[F(x)]$ vienen dados por:

d) $G(x) = x^3$, $\quad G[F(x)] = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
e) $G(x) = 3 + x + x^2$, $\quad G[F(x)] = x^2 - 3x + 5$.

2.4 Dadas tres funciones F, G, H, ¿qué restricciones deben imponerse a sus dominios para que las cuatro funciones compuestas que siguen estén definidas?

$$G \circ F, \qquad H \circ G, \qquad H \circ (G \circ F), \qquad (H \circ G) \circ F.$$

Suponiendo que sea posible definir $H \circ (G \circ F)$ y $(H \circ G) \circ F$, probar la ley asociativa

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F.$$

2.5 Probar las siguientes identidades de la teoría de conjuntos para reuniones e intersecciones:

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
c) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.
d) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
e) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.
f) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.
g) $(A - B) \cup B = A$ si, y sólo si, $B \subseteq A$.

2.6 Sea $f: S \to T$ una función. Si A y B son subconjuntos arbitrarios de S, probar que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \qquad \text{y} \qquad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Generalizar este resultado al caso de reuniones e intersecciones arbitrarias.

2.7 Sea $f:S\to T$ una función. Si $Y\subseteq T$, se designa por $f^{-1}(Y)$ al mayor subconjunto de S que f aplica en Y. Esto es,

$$f^{-1}(Y)=\{x: x\in S \ \text{ y } \ f(x)\in Y\}.$$

El conjunto $f^{-1}(Y)$ se llama la *antiimagen* de Y por f. Probar las propiedades siguientes para subconjuntos arbitrarios X de S e Y de T.

a) $X\subseteq f^{-1}[f(X)]$, b) $f[f^{-1}(Y)]\subseteq Y$,

c) $f^{-1}[Y_1\cup Y_2]=f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)$,

d) $f^{-1}(Y_1\cap Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$,

e) $f^{-1}(T-Y)=S-f^{-1}(Y)$.

f) Generalizar (c) y (d) para reuniones e intersecciones arbitrarias.

2.8 Aludimos al ejercicio 2.7. Probar que $f[f^{-1}(Y)]=Y$ para cada subconjunto Y de T si, y sólo si, $T=f(S)$.

2.9 Sea $f:S\to T$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) f es uno a uno en S.

b) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ para todos los subconjuntos A, B de S,

c) $f^{-1}[f(A)]=A$ para cada subconjunto A de S,

d) Para todos los subconjuntos disjuntos A y B de S, las imágenes $f(A)$ y $f(B)$ son disjuntas,

e) Para todos los subconjuntos A y B de S con $B\subseteq A$, tenemos

$$f(A-B)=f(A)-f(B).$$

2.10 Probar que si $A\sim B$ y $B\sim C$, entonces $A\sim C$.

2.11 Si $\{1, 2, \ldots, n\}\sim\{1, 2, \ldots, m\}$, entonces $n=m$.

2.12 Si S es un conjunto infinito, probar que S contiene un subconjunto infinito numerable. *Indicación.* Elíjase un elemento a_1 de S y considérese $S-\{a_1\}$.

2.13 Probar que cada conjunto infinito S contiene un subconjunto propio equipotente a S.

2.14 Si A es un conjunto numerable y B es un conjunto no numerable, probar que $B-A$ es equipotente a B.

2.15 Un número real se llama *algebraico* si es raíz de una ecuación algebraica $f(x)=0$, donde $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ es un polinomio con coeficientes enteros. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros es numerable y deducir que el conjunto de todos los números algebraicos es asimismo numerable.

2.16 Sea S un conjunto finito de n elementos y sea T la colección de todos los subconjuntos de S. Probar que T es un conjunto finito y hallar el número de elementos de T.

2.17 Sea $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales y sea S el conjunto de todas las funciones a valores reales cuyo dominio es $\mathbf{R}$. Probar que S y $\mathbf{R}$ no son coordinables. *Indicación.* Supongamos que $S\sim\mathbf{R}$ y sea f una función uno a uno tal que $f(\mathbf{R})=S$. Si $a\in\mathbf{R}$, sea $g_a=f(a)$ la función a valores reales de S que corresponde al número real a. Definimos ahora h por medio de la ecuación $h(x)=1+g_x(x)$ si $x\in\mathbf{R}$, y probar que $h\notin S$.

2.18 Sea S la colección de todas las sucesiones cuyos términos sean los enteros 0 y 1. Probar que S es no numerable.

2.19 Probar que los siguientes conjuntos son numerables:

a) el conjunto de todos los círculos del plano complejo de radio racional y de centro de coordenadas racionales,

b) toda colección de intervalos disjuntos de longitud positiva.

2.20 Sea f una función a valores reales definida para todo x del intervalo $0\le x\le 1$. Supongamos que existe un número positivo M que verifica la siguiente propiedad: para cada elección, con un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del intervalo $0\le x\le 1$, la suma

$$|f(x_1)+\cdots+f(x_n)|\le M.$$

Sea S el conjunto de los x de $0\le x\le 1$ para los que $f(x)\neq 0$. Probar que S es numerable.

2.21 Hallar la falacia de la siguiente «demostración» de que el conjunto de todos los intervalos de longitud positiva es numerable.

Sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ el conjunto numerable de todos los números racionales y sea I un intervalo de longitud positiva. Entonces I contiene una infinidad de puntos racionales x_n, pero de entre estos habrá uno que tendrá un *índice n mínimo*. Definimos una función F por medio de la ecuación $F(I)=n$, si x_n es el número racional de menor índice que pertenece al intervalo I. Esta función establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todos los intervalos y un subconjunto de los enteros positivos. Por lo tanto el conjunto de todos los intervalos es numerable.

2.22 Sea S la colección de todos los subconjuntos de un conjunto dado T. Sea $f:S\to\mathbf{R}$ una función a valores reales definida en S. Se dice que la función f es *aditiva* si $f(A\cup B)=f(A)+f(B)$ siempre que A y B sean subconjuntos disjuntos de T. Si f es aditiva, probar que, para todo par de subconjuntos A y B, se tiene

$$f(A\cup B)=f(A)+f(B-A) \qquad \text{y} \qquad f(A\cup B)=f(A)+f(B)-f(A\cap B).$$

2.23 Aludimos al ejercicio 2.22. Suponemos que f es aditiva y suponemos además que las siguientes relaciones se verifican para dos subconjuntos particulares A y B de T:

$$f(A\cup B)=f(A')+f(B')-f(A')f(B')$$

$$f(A\cap B)=f(A)f(B), \qquad f(A)+f(B)\neq f(T),$$

donde $A'=T-A$, $B'=T-B$. Probar que estas relaciones determinan $f(T)$, y calcular el valor de $f(T)$.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

2.1 Boas, R. P., *A Primer of Real Funcions.* Carus Monograph No. 13. Wiley, New York, 1960.

2.2 Fraenkel, A., *Abstract Set Theory*, 3.ª ed. North-Holland, Amsterdam, 1965.
2.3 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis*. Addison-Wesley, Reading, 1966.
2.4 Halmos, P. R., *Naive Set Theory*. Van Nostrand, New York, 1960. (Hay traducción francesa. Ed. Gauthier Villars. Hay traducción castellana).
2.5 Kamke, E., *Theory of Sets*. F. Bagemihl, translator. Dover, New York, 1950.
2.6 Kaplansky, I., *Set Theory and Metric Spaces*. Allyn and Bacon, Boston, 1972.
2.7 Rotman B., y Kneebone, G. T., *The Theory of Sets and Transfinite Numbers*. Elsevier, New York, 1968.

CAPÍTULO 3

Elementos de topología en conjuntos de puntos

3.1 INTRODUCCIÓN

La mayor parte del capítulo anterior trata de conjuntos «abstractos», esto es, conjuntos de objetos cualesquiera. En este capítulo consideraremos conjuntos de números reales, conjuntos de números complejos y, en general, conjuntos en espacios de más dimensiones.

En este estudio es conveniente y útil utilizar la terminología geométrica. Así, hablaremos de conjuntos de puntos de la recta real, conjuntos de puntos del plano, o conjuntos de puntos de espacios de mayor número de dimensiones. Más adelante estudiaremos funciones definidas en conjuntos de puntos, y es conveniente poseer un cierto conocimiento acerca de algunos tipos fundamentales de conjuntos de puntos, tales como conjuntos *abiertos*, conjuntos *cerrados* y conjuntos *compactos*, antes de abordar el estudio de las funciones. El estudio de estos conjuntos se llama *topología en conjuntos de puntos*.

3.2 EL ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbf{R}^n$

Un punto del espacio bidimensional es un par ordenado de números reales (x_1, x_2). Análogamente, un punto en un espacio tridimensional es una terna ordenada de números reales: (x_1, x_2, x_3). Es, pues, adecuado considerar una n-pla ordenada de números reales y referirnos a él como a un punto del espacio n-dimensional.

Definición 3.1. *Sea $n > 0$ un entero. Un conjunto ordenado de n números reales $(x_1, x\ , \ldots, x_n)$ se llama punto n dimensional o vector con n componentes. Los puntos o vectores se designarán por medio de una sola letra en negrita; por ejemplo,*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

o

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

El número x_k se llama k-ésima coordenada del punto $\mathbf{x}$ *o k-ésima componente del vector* $\mathbf{x}$. *El conjunto de todos los puntos n-dimensionales se llama espacio euclídeo n-dimensional o simplemente n-espacio, y se designa por* $\mathbf{R}^n$.

Puede ocurrir que el lector se pregunte qué ventajas presenta trabajar en espacios de más de tres dimensiones. En realidad, el lenguaje de los n-espacios hace fácilmente comprensibles cuestiones más complicadas. El lector quizás esté lo suficientemente familiarizado con análisis vectorial de tres dimensiones, para percatarse de la ventaja que representa el poder escribir las ecuaciones de un movimiento que posee tres grados de libertad por medio de una sola ecuación vectorial en vez de tener que utilizar tres ecuaciones escalares. Existe una ventaja análoga cuando el sistema posee n grados de libertad.

Otra ventaja que se obtiene estudiando n-espacios para un n cualquiera es que, de una vez, se estudian todas las propiedades que son comunes a los 1-espacios, 2-espacios, 3-espacios, etc., esto es, propiedades independientes de la dimensión del espacio

Los espacios de más dimensiones se presentan como algo totalmente natural en campos tales como la Relatividad, y la Mecánica estadística y cuántica. Incluso espacios de infinitas dimensiones son corrientes en Mecánica cuántica.

Definiremos ahora las operaciones algebraicas con puntos n-dimensionales:

Definición 3.2. *Sean* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ *elementos de* $\mathbf{R}^n$. *Definimos:*

a) *Igualdad:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ si, y sólo si, } x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n.$$

b) *Suma:*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

c) *Multpilicación por números reales (escalares):*

$$a\mathbf{x} = (ax_1, \ldots, ax_n) \qquad (a \text{ real}).$$

d) *Diferencia:*

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}.$$

e) *Vector nulo u origen:*

$$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0).$$

f) *Producto interior o producto escalar:*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

g) *Norma o longitud:*

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2}$$

La norma $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ se llama *distancia entre* $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

NOTA. Usando la terminología del Álgebra lineal, $\mathbf{R}^n$ es un ejemplo de *espacio vectorial* (o *lineal*).

Teorema 3.3. *Designemos por* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *dos puntos de* $\mathbf{R}^n$. *Entonces se tiene:*

a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, *y* $\|\mathbf{x}\| = 0$ *si, y sólo si,* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
b) $\|a\mathbf{x}\| = |a|\,\|\mathbf{x}\|$ *para todo número real a.*
c) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.
d) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ *(desigualdad de Cauchy-Schwarz).*
e) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *(desigualdad triangular)*

Demostración. Las afirmaciones (a), (b) y (c) se deducen inmediatamente de la definición, y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se demostró en el teorema 1.23. La afirmación (e) se sigue de (d) ya que

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + 2x_k y_k + y_k^2)$$
$$= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

NOTA. A veces la desigualdad triangular se escribe en la forma

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

Esta expresión se deduce de (e) reemplazando $\mathbf{x}$ por $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}$ por $\mathbf{y} - \mathbf{z}$.

$$\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Definición 3.4. *El vector coordenado unidad* $\mathbf{u}_k$ *de* $\mathbf{R}^n$ *es el vector cuya k-ésima componente es 1 y todas las restantes son cero. Así,*

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \qquad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{u}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ entonces $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n$ y $x_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1$, $x_2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2$, $\ldots$, $x_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n$. Los vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ se llaman también *vectores base*.

3.3 BOLAS ABIERTAS Y CONJUNTOS ABIERTOS DE $\mathbf{R}^n$

Sea $\mathbf{a}$ un punto de $\mathbf{R}^n$ y sea r un número positivo dado. El conjunto de todos los puntos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ tales que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r,$$

se denomina *n-bola* abierta de radio r y centro $\mathbf{a}$. Designamos este conjunto por $B(\mathbf{a})$ o por $B(\mathbf{a}; r)$.

La bola $B(\mathbf{a}; r)$ consta de todos los puntos cuya distancia a $\mathbf{a}$ es menor que r. En $\mathbf{R}^1$ este conjunto es un intervalo abierto con centro en $\mathbf{a}$. En $\mathbf{R}^2$ es un disco circular, y en $\mathbf{R}^3$ es una esfera sólida con centro en $\mathbf{a}$ y radio r.

3.5. Definición de punto interior. *Sea S un subconjunto de $\mathbf{R}^n$, y supongamos que $\mathbf{a} \in S$. Entonces $\mathbf{a}$ se denomina punto interior de S si existe una n-bola abierta con centro en $\mathbf{a}$, contenida en S.*

En otras palabras, cada uno de los puntos interiores $\mathbf{a}$ de S puede ser rodeado por una n-bola $B(\mathbf{a}) \subseteq S$. El conjunto de todos los puntos interiores de S se llama *interior* de S y se designa por int S. Cada conjunto que contiene una bola con centro en $\mathbf{a}$ se denomina *entorno* de $\mathbf{a}$.

3.6. Definición de conjunto abierto. *Un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ es abierto si todos sus puntos son interiores. En otras palabras, S es abierto si, y sólo si, $S = int\ S$.* (Véase ejercicio 3.9.)

Ejemplos. En $\mathbf{R}^1$ el tipo más simple de conjunto abierto es un intervalo abierto. La unión de dos o más intervalos abiertos es también abierta. Un intervalo cerrado $[a, b]$ no es un conjunto abierto ya que sus extremos a y b no son puntos interiores del intervalo.

Ejemplos de conjuntos abiertos en el plano son: el interior de un disco; el producto cartesiano de dos intervalos abiertos unidimensionales. El lector debe tener en cuenta que un intervalo abierto de $\mathbf{R}^1$, considerado como subconjunto del plano, no es un conjunto abierto. De hecho, *ningún* subconjunto de $\mathbf{R}^1$ (salvo el conjunto vacío) puede ser abierto en $\mathbf{R}^2$, ya que tales conjuntos no pueden contener una 2-esfera.

En $\mathbf{R}^n$, tanto el conjunto vacío (¿Por qué?) como el mismo espacio $\mathbf{R}^n$, son conjuntos abiertos. El producto cartesiano

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

de intervalos abiertos unidimensionales $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ es un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ llamado *intervalo abierto n-dimensional*. Lo designaremos por $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, donde $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

Los dos teoremas siguientes demuestran cómo a partir de conjuntos abiertos de $\mathbf{R}^n$ es posible obtener nuevos conjuntos abiertos.

Teorema 3.7. *La reunión de una colección arbitraria de conjuntos abiertos es abierta.*

Demostración. Sea F una colección de conjuntos abiertos y sea S su reunión, $S = \bigcup_{A \in F} A$. Supongamos que $\mathbf{x} \in S$. Entonces $\mathbf{x}$ debe estar en uno, por lo menos, de los conjuntos de F. Sea $\mathbf{x} \in A$. Como A es abierto, existe una n-bola abierta $B(\mathbf{x}) \subseteq A$. Pero $A \subseteq S$, luego $B(\mathbf{x}) \subseteq S$ y por lo tanto $\mathbf{x}$ es un punto interior de S. Dado que cada punto de S es un punto interior, S es abierto.

Teorema 3.8. *La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es abierta.*

Demostración. Sea $S = \bigcap_{k=1}^{m} A_k$, donde cada A_k es abierto. Supongamos que $\mathbf{x} \in S$. (Si S es vacío, no hay nada que demostrar.) Entonces $\mathbf{x} \in A_k$ para todo $k = 1, 2, \ldots, m$, y por lo tanto existe una n-bola abierta $B(\mathbf{x}; r_k) \subseteq A_k$. Sea r el menor de los números positivos $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Entonces $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}; r) \subseteq S$. Esto es, $\mathbf{x}$ es un punto interior y por lo tanto S es abierto.

Vemos entonces que, a partir de conjuntos abiertos dados, se pueden formar nuevos conjuntos abiertos haciendo reuniones arbitrarias o intersecciones finitas. Las intersecciones arbitrarias, en cambio, no siempre producirán conjuntos abiertos. Por ejemplo, la intersección de todos los intervalos abiertos de la forma $(-1/n, 1/n)$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$, es el conjunto reducido únicamente a 0.

3.4 LA ESTRUCTURA DE LOS CONJUNTOS ABIERTOS DE $\mathbf{R}^1$

En $\mathbf{R}^1$ la reunión de una colección numerable de intervalos abiertos disjuntos es un conjunto abierto y, sorprendentemente, cada conjunto abierto de $\mathbf{R}^1$ no vacío se puede obtener de esta manera. Esta sección está destinada a demostrar esta afirmación.

Ante todo introduciremos el concepto de intervalo componente.

3.9. Definición de intervalo componente. *Sea S un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^1$. Un intervalo abierto I (que puede ser finito o infinito) se llamará intervalo componente de S si $I \subseteq S$ y si no existe ningún otro intervalo abierto $J \neq I$ tal que $I \subseteq J \subseteq S$.*

En otras palabras, un intervalo componente de S no puede ser un subconjunto propio de ningún otro intervalo abierto contenido en S.

Teorema 3.10. *Cada punto de un conjunto abierto no vacío S pertenece a un intervalo componente de S y a uno solo.*

Demostración. Supongamos que $x \in S$. Entonces x está contenido en algún intervalo abierto I con $I \subseteq S$. Existen muchos de tales intervalos pero el «mayor» de ellos será el intervalo componente deseado. Dejamos para el lector la demostración de que este intervalo es $I_x = (a(x), b(x))$, donde

$$a(x) = \inf \{a : (a, x) \subseteq S\}, \qquad b(x) = \sup \{b : (x, b) \subseteq S\}.$$

Puede ocurrir que $a(x)$ sea $-\infty$ y puede ocurrir que $b(x)$ sea $+\infty$. Es claro que no existe ningún intervalo abierto J tal que $I_x \subseteq J \subseteq S$, luego I_x es un intervalo componente de S que contiene a x. Si J_x fuese otro intervalo componente de S conteniendo a x, entonces la reunión $I_x \cup J_x$ sería un intervalo contenido en S y que contendría a I_x y a J_x. Por lo tanto, por definición de intervalo componente, se tendría $I_x \cup J_x = I_x$ e $I_x \cup J_x = J_x$, luego $I_x = J_x$.

Teorema 3.11 (Teorema de representación para los conjuntos abiertos de la recta real). *Cada conjunto abierto no vacío S de $\mathbf{R}^1$ es la reunión de una colección numerable de intervalos componentes de S, disjuntos.*

Demostración. Si $x \in S$, sea I_x el intervalo componente de S que contiene a x. La reunión de todos los intervalos I_x es, evidentemente, S. Si dos de ellos, I_x e I_y, tienen un punto en común, entonces su reunión $I_x \cup I_y$ es un intervalo abierto contenido en S y que contiene a I_x y a I_y. Por lo tanto, $I_x \cup I_y = I_x$ e $I_x \cup I_y = I_y$, luego $I_x = I_y$. Por lo tanto los intervalos I_x forman una colección disjunta.

Resta demostrar que forman una colección numerable. A este fin, supongamos que $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ designa el conjunto numerable de los números racionales. En cada intervalo componente I_x habrá una infinidad de x_n, pero entre ellos uno sólo con el menor índice n. Definiremos entonces una aplicación F por medio de la ecuación $F(I_x) = n$, si x_n es el número racional de I_x con el menor índice n. Esta función F es uno a uno ya que $F(I_x) = F(I_y) = n$ implica que I_x e I_y tienen en común a x_n y ello implica que $I_x = I_y$. Por tanto F establece una correspondencia uno a uno entre los intervalos I_x y un cierto subconjunto de los números naturales. Esto termina la demostración.

NOTA. Esta representación de S es única. De hecho, si S es reunión de intervalos abiertos disjuntos, entonces estos intervalos serán necesariamente los intervalos componentes de S. Es una consecuencia inmediata del teorema 3.10.

Si S es un intervalo abierto, entonces la representación contiene sólo un intervalo componente, a saber, S mismo. Por lo tanto, ningún intervalo abierto de $\mathbf{R}^1$ puede expresarse como reunión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos. Esta propiedad se designa también diciendo que un intervalo abierto es *conexo*. El concepto de conexión en conjuntos de $\mathbf{R}^n$ se estudia más ampliamente en la sección 4.16.

3.5 CONJUNTOS CERRADOS

3.12 Definición de conjunto cerrado. *Un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ es cerrado si su complementario $\mathbf{R}^n - S$ es abierto.*

Ejemplos. Un intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbf{R}^1$ es un conjunto cerrado. El producto cartesiano

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

de n intervalos cerrados unidimensionales es un conjunto cerrado de $\mathbf{R}^n$, llamado *intervalo cerrado* $[a, b]$ *n-dimensional.*

El siguiente teorema, consecuencia inmediata de los teoremas 3.7 y 3.8, muestra cómo construir nuevos conjuntos cerrados a partir de conjuntos cerrados dados.

Teorema 3.13. *La reunión de una colección finita de conjuntos cerrados es cerrada, y la intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.*

Otra relación entre conjuntos abiertos y cerrados es la que expresa el siguiente teorema.

Teorema 3.14. *Si A es abierto y B cerrado, entonces $A - B$ es abierto y $B - A$ es cerrado.*

Demostración. Basta observar que $A - B = A \cap (\mathbf{R}^n - B)$ es la intersección de dos conjuntos abiertos, y que $B - A = B \cap (\mathbf{R}^n - A)$ es la intersección de dos conjuntos cerrados.

3.6 PUNTOS ADHERENTES. PUNTOS DE ACUMULACIÓN

Los conjuntos cerrados pueden definirse por medio de los puntos adherentes y por medio de los puntos de acumulación.

3.15 *Definición de punto adherente.* *Sea S un subconjunto de* $\mathbf{R}^n$, *y sea* $\mathbf{x}$ *un punto de* $\mathbf{R}^n$, *no necesariamente de S. Entonces se dice que* $\mathbf{x}$ *es adherente a S si toda n-bola* $B(\mathbf{x})$ *contiene un punto de S, por lo menos.*

Ejemplos

1. Si $\mathbf{x} \in S$, entonces $\mathbf{x}$ es adherente a S, ya que cada n-esfera $B(\mathbf{x})$ contiene a $\mathbf{x}$.
2. Si S es un subconjunto de $\mathbf{R}$ acotado superiormente, entonces el sup S es adherente a S.

Ciertos puntos son adherentes a S porque cada bola $B(\mathbf{x})$ contiene puntos de S *distintos* de $\mathbf{x}$. Estos puntos se llamarán puntos de acumulación.

3.16. *Definición de punto de acumulación.* *Si* $S \subseteq \mathbf{R}^n$ *y* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, *entonces* $\mathbf{x}$ *se llama punto de acumulación de S si cada n-bola* $B(\mathbf{x})$ *contiene por lo menos un punto de S distinto de* $\mathbf{x}$.

En otras palabras, $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de S si, y sólo si, $\mathbf{x}$ es adherente a $S - \{\mathbf{x}\}$. Si $\mathbf{x} \in S$ pero $\mathbf{x}$ no es un punto de acumulación de S, se dice que $\mathbf{x}$ es un *punto aislado* de S.

Ejemplos

1. El conjunto de los números de la forma $1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ tienen al cero como punto de acumulación.
2. El conjunto de los números racionales tiene a cada racional como punto de acumulación.
3. Cada punto del intervalo cerrado $[a, b]$ es un punto de acumulación del conjunto de los números del intervalo abierto (a, b).

Teorema 3.17. *Si* $\mathbf{x}$ *es un punto de acumulación de S, entonces toda n-bola* $B(\mathbf{x})$ *contiene infinitos puntos de S.*

Demostración. Supongamos lo contrario; es decir, que exista una n-bola $B(\mathbf{x})$ que contenga sólo un número finito de puntos de S distintos de $\mathbf{x}$; llamémosles $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Si r es el menor de los números positivos

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_1\|, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_2\|, \quad \ldots, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_m\|,$$

entonces $B(\mathbf{x}; r/2)$ será una n-bola de centro $\mathbf{x}$ que no contendrá ningún punto de S distinto de $\mathbf{x}$. Contradicción.

Este teorema implica, en particular, que un conjunto que no posea una infinidad de puntos carece de puntos de acumulación. El recíproco, sin embargo, es falso. Por ejemplo, el conjunto de los enteros $\{1, 2, 3, \ldots\}$ es un conjunto infinito que carece de puntos de acumulación. En una sección posterior demostraremos que los conjuntos infinitos contenidos en una esfera posean siempre un punto de acumulación. Éste es un resultado importante conocido como teorema de Bolzano-Weierstrass.

3.7. CONJUNTOS CERRADOS Y PUNTOS ADHERENTES

Un conjunto cerrado se ha definido como el complementario de un conjunto abierto. El teorema siguiente presenta otra definición de conjunto cerrado.

Teorema 3.18. *Un conjunto S de* $\mathbf{R}^n$ *es cerrado si, y sólo si, contiene todos sus puntos adherentes.*

Demostración. Supongamos que S es cerrado y que $\mathbf{x}$ es adherente a S. Deseamos probar que $\mathbf{x} \in S$. Supongamos que $\mathbf{x} \notin S$ y llegaremos a una contradicción. Si $\mathbf{x} \notin S$, entonces $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n - S$ y, como que $\mathbf{R}^n - S$ es abierto, alguna n-bola $B(\mathbf{x})$ está contenida en $\mathbf{R}^n - S$. Entonces $B(\mathbf{x})$ no contiene puntos de S, en contradicción con el hecho de que $\mathbf{x}$ es adherente a S.

Para probar el recíproco, supongamos que S contiene todos sus puntos adherentes y demostraremos entonces que S es cerrado. Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n - S$. Entonces $\mathbf{x} \notin S$, luego $\mathbf{x}$ no es adherente a S. Por lo tanto, existe una bola $B(\mathbf{x})$ que no corta a S, por consiguiente $B(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{R}^n - S$. Así pues, $\mathbf{R}^n - S$ es abierto y, entonces, S es cerrado.

3.19. *Definición de adherencia.* *El conjunto de todos los puntos adherentes de un conjunto dado S se llama adherencia de S y se designa por* $\bar{S}$.

Para todo conjunto se tiene que $S \subseteq \bar{S}$ ya que todo punto de S es adherente a S. El teorema 3.18 prueba que la inclusión opuesta $\bar{S} \subseteq S$ se verifica si, y sólo si, S es cerrado. Por lo tanto se tiene:

Teorema 3.20. *Un conjunto S es cerrado si, y sólo si,* $S = \bar{S}$.

3.21. *Definición de conjunto derivado.* *El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto S se llama conjunto derivado de S y se designa por* S'.

Es claro que, para todo conjunto S, $\bar{S} = S \cup S'$. Por lo tanto, el teorema 3.20 implica que S es cerrado si, y sólo si, $S' \subseteq S$. En otras palabras, se tiene:

Teorema 3.22. *Un conjunto S de* $\mathbf{R}^n$ *es cerrado si, y sólo si, contiene todos sus puntos de acumulación.*

3.8 TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

3.23. *Definición de conjunto acotado.* *Se dice que un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ está acotado si está contenido totalmente en una n-bola $B(\mathbf{a}; r)$ para algún $r > 0$ y algún $\mathbf{a}$ de $\mathbf{R}^n$.*

Teorema 3.24 (Bolzano-Weierstrass). *Si un conjunto acotado S de $\mathbf{R}^n$ contiene una infinidad de puntos, entonces existe por lo menos un punto de $\mathbf{R}^n$ que es un punto de acumulación de S.*

Demostración. Para fijar ideas daremos primero la demostración en el caso $\mathbf{R}^1$. Como S es un conjunto acotado, está contenido en un cierto intervalo $[-a, a]$. Uno, por lo menos, de los subintervalos $[-a, 0]$, $[0, a]$ contiene un subconjunto infinito de S. Llamemos a este subintervalo $[a_1, b_1]$. Dividamos $[a_1, b_1]$ en dos partes iguales y obtendremos un subintervalo $[a_2, b_2]$ que contendrá un subconjunto de S, infinito; y continuemos este proceso. De esta manera hemos obtenido una colección numerable de intervalos tales que el n-ésimo intervalo $[a_n, b_n]$ tiene longitud $b_n - a_n = a/2^{n-1}$. Es claro que el sup de los puntos extremos de la izquierda a_n y el inf. de los puntos extremos de la derecha b_n coinciden; llamémosle x. [¿Por qué son iguales?] El punto x será de acumulación de S ya que, si r es un número positivo, el intervalo $[a_n, b_n]$ estará contenido en $B(x; r)$ siempre que n sea suficientemente grande para que $b_n - a_n < r/2$. El intervalo $B(x; r)$ contiene un punto de S distinto de x y, por lo tanto, x es un punto de acumulación de S. Esto prueba el teorema para $\mathbf{R}^1$. (Obsérvese que el punto de acumulación x puede pertenecer o no a S.)

Ahora daremos una demostración para $\mathbf{R}^n$, $n > 1$, extendiendo las ideas seguidas al tratar el caso $\mathbf{R}^1$. (El lector podrá seguir la demostración en el caso $\mathbf{R}^2$ recurriendo a la Fig. 3.1.)

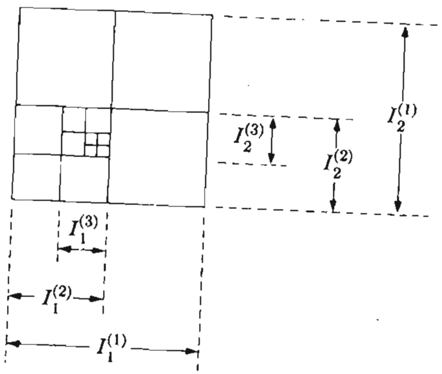


Figura 3.1

Como S está acotado, S podrá ser incluido en una cierta n-bola $B(\mathbf{0}; a)$, $a > 0$, y por lo tanto en el intervalo n-dimensional J_1 definido por las desigualdades

$$-a \leq x_k \leq a \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Aquí J_1 designa el producto cartesiano

$$J_1 = I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)};$$

esto es, el conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_n)$, donde $x_k \in I_k^{(1)}$ y donde cada $I_k^{(1)}$ es un intervalo unidimensional $-a \leq x_k \leq a$. Cada intervalo $I_k^{(1)}$ se puede subdividir en dos subintervalos $I_{k,1}^{(1)}$ e $I_{k,2}^{(1)}$ definidos por las desigualdades

$$I_{k,1}^{(1)}: -a \leq x_k \leq 0; \qquad I_{k,2}^{(1)}: 0 \leq x_k \leq a.$$

Ahora, consideramos todos los productos cartesianos de la forma

$$I_{1,k_1}^{(1)} \times I_{2,k_2}^{(1)} \times \cdots \times I_{n,k_n}^{(1)}, \tag{a}$$

donde cada $k_i = 1$ o 2. Hay, exactamente, 2^n productos de este tipo y, además, cada uno de ellos es un intervalo n-dimensional. La reunión de estos 2^n intervalos es el intervalo original J_1, que contiene a S; y por lo tanto, uno por lo menos de los 2^n intervalos (a) contiene una infinidad de puntos de S. Elijamos uno de los que verifican esta propiedad y llamémosle J_2; podrá expresarse también

$$J_2 = I_1^{(2)} \times I_2^{(2)} \times \cdots \times I_n^{(2)},$$

donde cada $I_k^{(2)}$ es uno de los subintervalos de $I_k^{(1)}$ de longitud a. Procedamos ahora con J_2 de la misma manera como hemos procedido con J_1, dividiendo cada intervalo $I_k^{(2)}$ en dos partes iguales y obteniendo un intervalo n-dimensional J_3 que contenga una infinidad de puntos de S. Si continuamos este proceso, obtendremos una colección numerable de intervalos n-dimensionales $J_1, J_2, J_3, \dots$, tales que el intervalo m-ésimo J_m verifica la propiedad de contener un subconjunto infinito de S y se puede expresar en la forma

$$J_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}, \qquad \text{donde } I_k^{(m)} \subseteq I_k^{(1)}.$$

Escribiendo

$$I_k^{(m)} = [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}],$$

tenemos

$$b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{a}{2^{m-2}} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Para cada k fijo, el sup de todos los extremos de la izquierda $a_k^{(m)}$, $(m = 1, 2, \ldots)$, deberá ser igual al inf de todos los extremos de la derecha $b_k^{(m)}$, $(m = 1, 2, \ldots)$, y este valor común lo designaremos por t_k. Afirmamos ahora que el punto $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es un punto de acumulación de S. Para verlo, basta tomar una n-bola $B(\mathbf{t}; r)$. El punto $\mathbf{t}$ pertenece a cada uno de los intervalos $J_1, J_2, \ldots$, construidos anteriormente, y cuando m es tal que $a/2^{m-2} < r/2$, el entorno incluirá a J_m. Pero como J_m contiene una infinidad de puntos de S, también los contendrá $B(\mathbf{t}; r)$, lo que demuestra que $\mathbf{t}$ es, realmente, un punto de acumulación de S.

3.9 TEOREMA DE ENCAJE DE CANTOR

Como aplicación del teorema de Bolzano-Weierstrass, demostraremos el teorema de encaje de Cantor.

Teorema 3.25. *Sea $\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ una colección numerable de conjuntos, no vacíos, de $\mathbf{R}^n$ tales que:*

i) $Q_{k+1} \subseteq Q_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$.
ii) *Cada uno de los conjuntos Q_k es cerrado y Q_1 está acotado.*

Entonces la intersección $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$. es cerrada y no vacía.

Demostración. Sea $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ Entonces S es cerrado en virtud del teorema 3.13. Para probar que S es no vacío, bastará encontrar un punto $\mathbf{x}$ que pertenzca a S. Podemos suponer que cada uno de los Q_k contiene una infinidad de puntos de S; en otro caso la demostración es trivial. Formemos entonces una colección de puntos distintos $A = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$, donde $\mathbf{x}_k \in Q_k$. Como A es un conjunto infinito contenido en el conjunto acotado Q_1, poseerá un punto de acumulación; llamémosle $\mathbf{x}$. Probaremos que $\mathbf{x} \in S$ verificando que, para cada k, $\mathbf{x} \in Q_k$. Es suficiente probar que $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de cada uno de los Q_k, ya que todos ellos son conjuntos cerrados. Pero cada entorno de $\mathbf{x}$ contiene una infinidad de puntos de A, y como todos excepto (quizás) un número finito de los puntos de A pertenecen a Q_k, este entorno contiene una infinidad de puntos de Q_k. Por lo tanto, $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de Q_k y el teorema queda demostrado.

3.10 TEOREMA DEL RECUBRIMIENTO DE LINDELÖF

En esta sección introducimos el concepto de *recubrimiento* de un conjunto y demostramos el *teorema del recubrimiento de Lindelöf*. La utilidad de este concepto se hará patente en algunos trabajos posteriores.

3.26. Definición de recubrimiento. *Una colección de conjuntos F se denomina recubrimiento de un conjunto dado S si $S \subseteq \bigcup_{A \in F} A$. Se dice también que la colección F recubre a S. Si F es una colección de conjuntos abiertos, entonces F se denomina recubrimiento abierto de S.*

Ejemplos

1. La colección de todos los intervalos de la forma $1/n < x < 2/n$, $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, es un recubrimiento abierto del intervalo $0 < x < 1$. Es un ejemplo de recubrimiento numerable.
2. La recta real $\mathbf{R}^1$ está recubierta por la colección de todos los intervalos abiertos (a, b). Este recubrimiento es no numerable. Sin embargo, contiene un recubrimiento numerable de $\mathbf{R}^1$, a saber, todos los intervalos de la forma $(n, n+2)$, donde n recorre los valores enteros.
3. Sea $S = \{(x, y): x > 0,\ y > 0\}$. La colección F de todos los discos circulares con centros en (x, x) y radios x, $x > 0$, es un recubrimiento de S. Este recubrimiento no es numerable. Sin embargo contiene un recubrimiento numerable de S, a saber, todos los círculos para los que x es racional. (Ver ejercicio 3.18.)

El teorema del recubrimiento de Lindelöf establece que todo recubrimiento abierto de un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ contiene una subcolección numerable que también recubre a S. La demostración utiliza el siguiente resultado preliminar:

Teorema 3.27. *Sea $G = \{A_1, A_2, \ldots\}$ la colección numerable de todas las n-bolas de radio racional y con centro en puntos de coordenadas racionales. Supongamos que $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ y sea S un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ que contenga a $\mathbf{x}$. Entonces una, por lo menos, de las n-bolas de G contiene a $\mathbf{x}$ y está contenida en S. Esto es, se tiene*

$$\mathbf{x} \in A_k \subseteq S \quad \textit{para algún } A_k \textit{ de } G.$$

Demostración. La colección G es numerable en virtud del teorema 2.27. Si $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ y si S es un conjunto abierto que contiene a $\mathbf{x}$, entonces existe una n-bola $B(\mathbf{x}; r) \subseteq S$. Encontramos un punto $\mathbf{y}$ de S, de coordenadas racionales, «próximo» a $\mathbf{x}$ y, tomándolo como centro, hallaremos entonces un entorno en G interior a $B(\mathbf{x}; r)$ y que contenga a $\mathbf{x}$. Si

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

sea y_k un número racional tal que $|y_k - x_k| < r/(4n)$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \le |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n| < \frac{r}{4}.$$

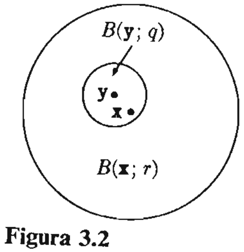


Figura 3.2

A continuación consideremos un número racional q tal que $r/4 < q < r/2$. Entonces $\mathbf{x} \in B(\mathbf{y}; q)$ y $B(\mathbf{y}; q) \subseteq B(\mathbf{x}; r) \subseteq S$. Pero $B(\mathbf{y}; q) \in G$ y por lo tanto el teorema queda demostrado. (Ver Fig. 3.2 para el caso $\mathbf{R}^2$.)

Teorema 3.28 (teorema del recubrimiento de Lindelöf). *Supongamos que $A \subseteq \mathbf{R}^n$ y que F es un recubrimiento abierto de A. Entonces existe una subcolección numerable de F que también recubre a A.*

Demostración. Sea $G = \{A_1, A_2, \dots\}$ la colección numerable de todas las n-bolas de centros y radios racionales. Este conjunto G se utilizará para extraer de F una subcolección numerable que recubra a A.

Supongamos que $\mathbf{x} \in A$. Entonces existe un conjunto abierto S de F tal que $\mathbf{x} \in S$. Por el teorema 3.27, existe una n-bola A_k de G tal que $\mathbf{x} \in A_k \subseteq S$. Para cada S existe una infinidad numerable de tales A_k, pero sólo elegiremos una de entre todas, por ejemplo la de índice más pequeño; llamémosle $m = m(\mathbf{x})$. Tenemos entonces que $\mathbf{x} \in A_{m(\mathbf{x})} \subseteq S$. El conjunto de todas las n-bolas $A_{m(\mathbf{x})}$ obtenidas cuando $\mathbf{x}$ recorre todos los elementos de A es una colección numerable de conjuntos abiertos que recubre a A. A fin de lograr una subcolección numerable de F que recubra a A, hacemos corresponder a cada conjunto $A_{k(\mathbf{x})}$ uno de los conjuntos S de F que contenga a $A_{k(\mathbf{x})}$. Esto acaba la demostración.

3.11 TEOREMA DEL RECUBRIMIENTO DE HEINE-BOREL

El teorema del recubrimiento de Lindelöf establece que de un recubrimiento abierto de un conjunto arbitrario A de $\mathbf{R}^n$ se puede extraer un recubrimiento numerable. El teorema de Heine-Borel nos dice que si, además, A es cerrado y acotado, entonces podemos reducir el recubrimiento a un recubrimiento finito. La demostración requiere el teorema de encaje de Cantor.

Teorema 3.29 (Heine-Borel). *Sea F un recubrimiento abierto de un conjunto A de $\mathbf{R}^n$, cerrado y acotado. Entonces existe una subcolección finita de F que también recubre a A.*

Demostración. Una subcolección numerable de F, llamémosla $\{I_1, I_2, \dots\}$, recubre a A, en virtud del teorema 3.28. Consideremos, para $m \geq 1$, la reunión finita

$$S_m = \bigcup_{k=1}^{m} I_k.$$

Es abierta, ya que es reunión de conjuntos abiertos. Probaremos que, para algún valor de m, la reunión S_m recubre a A.

A este fin consideremos el complementario $\mathbf{R}^n - S_m$, que es cerrado. Definimos una colección numerable de conjuntos $\{Q_1, Q_2, \dots\}$ de la siguiente manera: $Q_1 = A$, y para $m > 1$,

$$Q_m = A \cap (\mathbf{R}^n - S_m).$$

Esto es, Q_m consta de todos los puntos de A que están fuera de S_m. Si podemos probar que, para algún valor de m, el conjunto Q_m es vacío, habremos demostrado que, para este valor de m, ningún punto de A está fuera de S_m; en otras palabras, habremos probado que existe un S_m que recubre a A.

Observemos las siguientes propiedades de los conjuntos Q_m: Cada conjunto Q_m es cerrado, ya que es intersección del conjunto cerrado A y el conjunto cerrado $\mathbf{R}^n - S_m$. Los conjuntos Q_m son decrecientes, ya que los conjuntos S_m son crecientes; esto es, $Q_{m+1} \subseteq Q_m$. Los conjuntos Q_m, por ser subconjuntos de A, están acotados. Por lo tanto, si ninguno de los conjuntos Q_m es vacío, podemos aplicar el teorema de encaje de Cantor para concluir que la intersección $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ tampoco es vacía. Ello implica la existencia de un cierto punto de A que pertenezca a todos los conjuntos Q_m, o, lo que es equivalente, la existencia de un punto de A que esté fuera de todos los conjuntos S_m. Pero esto es imposible, ya que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. Por lo tanto algún Q_m debe ser vacío, y esto termina la demostración.

3.12 COMPACIDAD EN $\mathbf{R}^n$

Acabamos de ver que, si un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ es cerrado y acotado, entonces todo recubrimiento abierto de S puede reducirse a un recubrimiento finito. Es natural preguntarse si podrían existir conjuntos distintos de los cerrados y acotados que verificasen también esta propiedad. Tales conjuntos se llamarán *compactos*.

3.30. Definición de conjunto compacto. *Un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ se llama compacto si, y sólo si, cada recubrimiento abierto de S contiene un subrecubrimiento finito; esto es, una subcolección finita que también recubra a S.*

El teorema de Heine-Borel establece que todo conjunto de $\mathbf{R}^n$, cerrado y acotado, es compacto. Probaremos ahora el recíproco.

Teorema 3.31. *Sea S un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) *S es compacto.*
b) *S es cerrado y acotado.*
c) *Todo subconjunto infinito de S tiene un punto de acumulación en S.*

Demostración. Como se indicó antes, (b) implica (a). Si probamos que (a) implica (b), que (b) implica (c) y que (c) implica (b), habremos establecido la equivalencia de las tres afirmaciones.

Supongamos que se verifica (a). Probaremos primero que S está acotado. Elijamos un punto $\mathbf{p}$ de S. La colección de n-bolas $B(\mathbf{p}; k)$, $k = 1, 2, \ldots$, es un recubrimiento abierto de S. Por compacidad, una subcolección finita también recubre a S y, por lo tanto, S está acotado.

A continuación probaremos que S es cerrado. Supongamos que no lo fuese. Existiría un punto $\mathbf{y}$ que sería un punto de acumulación de S y tal que $\mathbf{y} \notin S$. Si $\mathbf{x} \in S$, sea $r_x = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/2$. Cada r_x es positivo ya que $\mathbf{y} \notin S$ y la colección $\{B(\mathbf{x}; r_x): \mathbf{x} \in S\}$ es un recubrimiento abierto de S. Por compacidad, un número finito de estos entornos recubre a S, por lo que es

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} B(\mathbf{x}_k; r_k).$$

Designemos por r al menor de los radios $r_1, r_2, \ldots, r_p$. Es fácil comprobar que la bola $B(\mathbf{y}; r)$ no tiene puntos en común con ninguna de las bolas $B(\mathbf{x}_k; r_k)$. De hecho, si $\mathbf{x} \in B(\mathbf{y}; r)$, entonces $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r \leq r_k$, y por la desigualdad triangular tenemos que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|$, luego

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_k\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 2r_k - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > r_k.$$

Por lo tanto, $\mathbf{x} \notin B(\mathbf{x}_k; r_k)$. Resulta, pues, que $B(\mathbf{y}; r) \cap S$ es vacío, en contradicción con el hecho de que $\mathbf{y}$ es un punto de acumulación de S. Esta contradicción prueba que S es cerrado y, por lo tanto, que (a) implica (b).

Supongamos que se verifica (b). En este caso la demostración de (c) es inmediata, ya que si T es un subconjunto infinito de S, entonces T está acotado (puesto que S lo está), y por el teorema de Bolzano-Weierstrass T posee un punto de acumulación que llamaremos $\mathbf{x}$. Ahora bien, $\mathbf{x}$ es también punto de acumulación de S y por lo tanto $\mathbf{x} \in S$, dado que S es cerrado. Por todo lo cual (b) implica (c).

Supongamos que se verifica (c). Probaremos (b). Si S no estuviese acotado, entonces para cada $m > 0$ existiría un punto $\mathbf{x}_m$ de S tal que $\|\mathbf{x}_m\| > m$. La colección $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ constituiría un subconjunto infinito de S y entonces, por (c), T admitiría un punto de acumulación en S. Pero para $m > 1 + \|\mathbf{y}\|$ tenemos

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}_m\| - \|\mathbf{y}\| > m - \|\mathbf{y}\| > 1,$$

en contradicción con el hecho de que $\mathbf{y}$ sea un punto de acumulación de T. Todo ello prueba que S está acotado.

Para terminar la demostración tenemos que probar que S es un conjunto cerrado. Sea $\mathbf{x}$ un punto de acumulación de S. Como cada entorno de $\mathbf{x}$ contiene infinitos puntos de S, podemos considerar los entornos $B(\mathbf{x}; 1/k)$, donde $k = 1, 2, \ldots$, obteniendo así un conjunto numerable de puntos distintos, que llamaremos $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$, contenido en S, tal que $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}; 1/k)$. El punto $\mathbf{x}$ también es un punto de acumulación de T. Como T es un subconjunto infinito de S, la parte (c) del teorema nos dice que T debe poseer un punto de acumulación en S. Si podemos demostrar que $\mathbf{x}$ es el único punto de acumulación de T habremos terminado la demostración del teorema.

Para ello supongamos que $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Entonces, por la desigualdad triangular tendremos que

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_k\| + 1/k, \quad \text{si } \mathbf{x}_k \in T.$$

Si k_0 se toma suficientemente grande para que $1/k < \frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ siempre que $k \geq k_0$, la última desigualdad conduce a la siguiente: $\frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_k\|$. Esto prueba que $\mathbf{x}_k \notin B(\mathbf{y}; r)$ donde $k \geq k_0$, si $r = \frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. Por lo tanto $\mathbf{y}$ no puede ser un punto de acumulación de T, con lo cual queda demostrado que (c) implica (b).

3.13 ESPACIOS MÉTRICOS

Las demostraciones de algunos de los teoremas de este capítulo dependen tan sólo de unas pocas propiedades de la distancia entre puntos y no dependen en absoluto del hecho de que los puntos sean de $\mathbf{R}^n$. Cuando estas propiedades de la distancia se estudian en abstracto conducen al concepto de espacio métrico.

3.32. Definición de espacio métrico. *Un espacio métrico es un conjunto M, no vacío, de objetos (que llamaremos puntos) dotado de una función d de $M \times M$ en $\mathbf{R}$ (que llamaremos la métrica del espacio) que satisface las cuatro propiedades siguientes, cualesquiera que sean los puntos x, y, z de M:*

1. $d(x, x) = 0$.
2. $d(x, y) > 0$ *si* $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

El número no negativo $d(x, y)$ puede considerarse como la distancia entre x e y. En estos términos el significado intuitivo de las propiedades 1 a 4 es claro. La propiedad 4 se llama la *desigualdad triangular*.

Un espacio métrico se designa, a menudo, por medio de (M, d) a fin de recalcar que en la definición de espacio métrico tanto el conjunto M como la métrica d juegan su papel.

Ejemplos

1. $M = \mathbf{R}^n$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Esta métrica se llama *métrica euclídea*. Cuando nos refiramos al espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$, se sobreentenderá que su métrica es la euclídea si no se especifica alguna otra.
2. $M = \mathbf{C}$, el plano complejo; $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Como espacio métrico, $\mathbf{C}$ no se distingue del espacio euclídeo $\mathbf{R}^2$ puesto que consta de los mismos puntos y de la misma métrica.
3. M es un conjunto no vacío; $d(x, y) = 0$ si $x = y$, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Esta métrica se llama *métrica discreta*, y (M, d) se llama *espacio métrico discreto*.
4. Si (M, d) es un espacio métrico y si S es un subconjunto no vacío de M, entonces (S, d) es también un espacio métrico con la misma métrica o, mejor aún, con la métrica resultante de restringir d a $S \times S$. Se llama a menudo la *métrica relativa* inducida por d sobre S, y S es un *subespacio métrico* de M. Por ejemplo, los números racionales $\mathbf{Q}$ con la métrica $d(x, y) = |x - y|$ constituyen un subespacio métrico de $\mathbf{R}$.
5. $M = \mathbf{R}^2$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 4(x_2 - y_2)^2}$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. El espacio métrico (M, d) no es un subespacio del espacio euclídeo $\mathbf{R}^2$ ya que la métrica es distinta.
6. $M = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, la circunferencia unidad de $\mathbf{R}^2$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$ la longitud del menor de los arcos que sobre la circunferencia unidad unen a los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
7. $M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, es la superficie esférica unidad en $\mathbf{R}^3$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$ la menor de las longitudes de los arcos que, sobre la superficie esférica unidad, une a los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
8. $M = \mathbf{R}^n$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$.
9. $M = \mathbf{R}^n$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$.

3.14 TOPOLOGÍA EN ESPACIOS MÉTRICOS

Las nociones básicas de la topología en conjuntos de puntos se pueden extender a un espacio métrico arbitrario (M, d).

Si $a \in M$, la *bola* $B(a; r)$ de centro en a y radio $r > 0$ es el conjunto de todos los puntos x de M tales que

$$d(x, a) < r.$$

Algunas veces designaremos a esta bola por medio de $B_M(a; r)$ a fin de recalcar que sus puntos pertenecen a M. Si S es un subespacio métrico de M, la bola $B_S(a; r)$ es la intersección de S con la bola $B_M(a; r)$.

Ejemplos. En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^1$ la bola $B(0; 1)$ es el intervalo abierto $(-1, 1)$. En el subespacio métrico $S = [0, 1]$ la bola $B_S(0; 1)$ es el intervalo semiabierto $[0, 1)$.

NOTA. La apariencia geométrica de una bola de $\mathbf{R}^n$ no es necesariamente «esférica» si la métrica no es la métrica euclídea. (Ver ejercicio 3.27.)

Si $S \subseteq M$, un punto a de S se llama *punto interior de S* si alguna de las bolas $B_M(a; r)$ está contenida en S. El *interior de S*, int S, es el conjunto de los puntos interiores a S. Un conjunto S es *abierto* en M si todos sus puntos son interiores; es *cerrado* en M si $M - S$ es abierto en M.

Ejemplos

1. Cada bola $B_M(a; r)$ de un espacio métrico M es abierta en M.
2. En un espacio métrico discreto M *cada* subconjunto S es abierto. De hecho, si $x \in S$, la bola $B(x; \frac{1}{2})$ consta sólo de puntos de S (ya que sólo contiene a x), luego S es abierto. ¡Por lo tanto cada subconjunto de M es también cerrado!
3. En el subespacio métrico $S = [0, 1]$ del espacio métrico euclídeo $\mathbf{R}^1$, cada intervalo de la forma $[0, x)$ o $(x, 1]$, donde $0 < x < 1$, es un conjunto abierto en S. Estos conjuntos no son abiertos en $\mathbf{R}^1$.

El ejemplo 3 muestra que, si S es un subespacio métrico de M, los conjuntos abiertos en S no son necesariamente abiertos en M. El siguiente teorema describe la relación que existe entre los conjuntos abiertos en M y los conjuntos abiertos en S.

Teorema 3.33. *Sea (S, d) un subespacio métrico de (M, d), y sea X un subconjunto de S. Entonces X es abierto en S si, y sólo si,*

$$X = A \cap S$$

para algún conjunto A abierto en M.

Demostración. Supongamos que A es abierto en M y sea $X = A \cap S$. Si $x \in X$, entonces $x \in A$ y por lo tanto $B_M(x; r) \subseteq A$ para algún $r > 0$. Por lo tanto $B_S(x; r) = B_M(x; R) \cap S \subseteq A \cap S = X$, luego X es abierto en S.

Recíprocamente, supongamos que X es abierto en S. Probaremos que $X = A \cap S$ para un conjunto A, abierto en M. Para todo x de X existe una bola $B_S(x; r_x)$ contenida en X. Ahora bien, $B_S(x; r_x) = B_M(x; r_x) \cap S$. Si hacemos

$$A = \bigcup_{x \in X} B_M(x; r_x),$$

entonces A es abierto en M y es fácil verificar que $A \cap S = X$.

Teorema 3.34. Sea (S, d) un subespacio métrico de (M, d) y sea Y un subconjunto de S. Entonces Y es cerrado en S si, y sólo si, $Y = B \cap S$ para algún conjunto B cerrado en M.

Demostración. Si $Y = B \cap S$, donde B es cerrado en M, entonces $B = M - A$ donde A es abierto en M, luego $Y = S \cap B = S \cap (M - A) = S - A$; de ahí que Y sea cerrado en S.

Recíprocamente, si Y es cerrado en S, sea $X = S - Y$. Entonces X es abierto en S, luego $X = A \cap S$, donde A es abierto en M y

$$Y = S - X = S - (A \cap S) = S - A = S \cap (M - A) = S \cap B,$$

donde $B = M - A$ es cerrado en M.

Si $S \subseteq M$, un punto x de M se llama *punto adherente* de S si cada bola $B_M(x; r)$ contiene un punto de S, por lo menos. Si x es adherente de $S - \{x\}$, entonces se dice que x es un *punto de acumulación* de S. La *clausura* $\bar{S}$ de S es el conjunto de todos los puntos adherentes de S, y el *conjunto derivado* S' es el conjunto de todos los puntos de acumulación de S. Entonces, $\bar{S} = S \cup S'$.

Los teoremas que se dan a continuación son válidos en cada espacio métrico (M, d) y se demuestran exactamente igual a como se demostraron en el caso del espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$. En las demostraciones, la distancia euclídea $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ deberá ser reemplazada por la métrica $d(x, y)$.

Teorema 3.35. (a) *La reunión de una colección arbitraria de conjuntos abiertos es abierta, y la intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es abierta.*

b) *La reunión de una colección finita de conjuntos cerrados es cerrada, y la intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.*

Teorema 3.36. *Si A es abierto y B es cerrado, entonces $A - B$ es abierto y $B - A$ es cerrado.*

Teorema 3.37. *Para cada uno de los subconjuntos S de M las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *S es cerrado en M.*
b) *S contiene a todos sus puntos adherentes.*
c) *S contiene a todos sus puntos de acumulación.*
d) *$S = \bar{S}$.*

Ejemplo. Sea $M = \mathbf{Q}$ el conjunto de números racionales con la métrica euclídea de $\mathbf{R}^1$. Sea S el conjunto de todos los números racionales en el intervalo abierto (a, b), donde tanto a como b son irracionales. Entonces S es un subconjunto cerrado de $\mathbf{Q}$.

En nuestras demostraciones del teorema de Bolzano-Weierstrass, del teorema de encaje de Cantor, y de los teoremas del recubrimiento de Lindelöf y de Heine-Borel hemos utilizado no sólo las propiedades métricas del espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$, sino también propiedades especiales de $\mathbf{R}^n$ que, en general, no son válidas en un espacio métrico arbitrario (M, d). Para poder extender estos teoremas a los espacios métricos habrá que imponer a M ciertas restricciones posteriores. Una de estas extensiones se esboza en el ejercicio 3.34.

La sección siguiente describe la compacidad en un espacio métrico arbitrario.

3.15 SUBCONJUNTOS COMPACTOS DE UN ESPACIO MÉTRICO

Sea (M, d) un espacio métrico y sea S un subconjunto de M. Una colección F de subconjuntos abiertos de M se llama *recubrimiento abierto* de S si $S \subseteq \bigcup_{A \in F} A$.

Un subconjunto S de M se llama *compacto* si cada recubrimiento abierto de S contiene un subrecubrimiento finito. S se dice que *está acotado* si $S \subseteq B(a; r)$ para algún $r > 0$ y algún a de M.

Teorema 3.38. *Sea S un subconjunto compacto de un espacio métrico M. Entonces:*

i) *S es cerrado y acotado.*
ii) *Cada subconjunto infinito de S posee un punto de acumulación en S.*

Demostración. Para demostrar (i) reharemos la demostración del teorema 3.31 y usaremos la parte de la argumentación que demostraba que (a) implica (b). El único cambio que debemos realizar consiste en reemplazar la distancia euclídea $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ por la métrica $d(x, y)$ a lo largo de toda la demostración.

Para probar (ii) se procede por contradicción. Sea T un subconjunto infinito de S y supongamos que S no contiene ningún punto de acumulación de T. Entonces, para cada punto x de S, existirá una bola $B(x)$ que no contendrá ningún punto de T (si $x \notin T$) o un punto de T solamente (el mismo x, cuando $x \in T$). Cuando x recorre S, la reunión de estas bolas $B(x)$ es un recubrimiento abierto de S. Como S es compacto, una subcolección finita recubre a S y por lo tanto también recubre a T. Pero esto contradice el hecho de que T sea infinito y cada una de las bolas contenga a lo sumo un punto de T.

NOTA. En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$, cada una de las propiedades (i) y (ii) es equivalente a la compacidad (teorema 3.31). En un espacio métrico general, la propiedad (ii) es equivalente a la compacidad (para una demostración, ver la referencia 3.4), pero en cambio la propiedad (i) no lo es. El ejercicio 3.42 nos suministra un ejemplo de un espacio métrico M en el que ciertos subconjuntos cerrados y acotados no son compactos.

Teorema 3.39. *Sea X un subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto M. Entonces X es compacto.*

Demostración. Sea F un recubrimiento abierto de X, es decir $X \subseteq \bigcup_{A \in F} A$. Probaremos que un número finito de los conjuntos A recubre a X. Como que X es cerrado su complementario $M - X$ es abierto, luego $F \cup \{(M - X)\}$ es un recubrimiento abierto de M. Pero M es compacto, luego este recubrimiento contiene un subrecubrimiento finito que podemos suponer que incluye $M - X$. Por lo tanto

$$M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_p \cup (M - X).$$

Este subrecubrimiento recubre también a X y, como que $M - X$ no contiene puntos de X, podemos suprimir el conjunto $M - X$ del subrecubrimiento y, a pesar de todo, sigue recubriendo a X. Entonces $X \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_p$, luego X es compacto.

3.16 FRONTERA DE UN CONJUNTO

Definición 3.40. *Sea S un subconjunto de un espacio métrico M. Un punto x de M se llama punto frontera de S si cada bola $B_M(x; r)$ contiene, por lo menos, un punto de S y, por lo menos, un punto de $M - S$. El conjunto de todos los puntos frontera de S se llama frontera de S y se designa por ∂S.*

El lector puede verificar fácilmente que

$$\partial S = \bar{S} \cap \overline{M - S}.$$

Esta fórmula prueba que ∂S es cerrado en M.

Ejemplo. En $\mathbf{R}^n$, la frontera de una bola $B(\mathbf{a}; r)$ es el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r$. En $\mathbf{R}^1$, la frontera del conjunto de los números racionales es todo en $\mathbf{R}^1$.

En los ejercicios y también en el capítulo 4 se desarrollan otras propiedades de los espacios métricos.

EJERCICIOS

Conjuntos abiertos y cerrados en $\mathbf{R}^1$ y $\mathbf{R}^2$

3.1 Probar que un intervalo abierto de $\mathbf{R}^1$ es un conjunto abierto y que un intervalo cerrado es un conjunto cerrado.

3.2 Determinar todos los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos de $\mathbf{R}^1$ y decidir cuándo los conjuntos son abiertos o cerrados (o cuándo no lo son).

a) Todos los enteros.
b) El intervalo $(a, b]$
c) Todos los números de la forma $1/n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.
d) Todos los números racionales.
e) Todos los números de la forma $2^{-n} + 5^{-m}$, $(m, n = 1, 2, \ldots)$.
f) Todos los números de la forma $(-1)^n + (1/m)$, $(m, n = 1, 2, \ldots)$.
g) Todos los números de la forma $(1/n) + (1/m)$, $(m, n = 1, 2, \ldots)$.
h) Todos los números de la forma $(-1)^n/[1 + (1/n)]$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

3.3 Lo mismo que en el ejercicio 3.2 para los siguientes conjuntos de $\mathbf{R}^2$:

a) Todos los números complejos z tales que $|z| > 1$.
b) Todos los números complejos z tales que $|z| \geq 1$.
c) Todos los números complejos de la forma $(1/n) + (i/m)$, $(m, n = 1, 2, \ldots)$.
d) Todos los puntos (x, y) tales que $x^2 - y^2 < 1$.
e) Todos los puntos (x, y) tales que $x > 0$.
f) Todos los puntos (x, y) tales que $x \geq 0$.

3.4 Probar que cada conjunto abierto no vacío S de $\mathbf{R}^1$ contiene números racionales e irracionales.

3.5 Probar que los únicos conjuntos de $\mathbf{R}^1$ que son a la vez abiertos y cerrados son el conjunto vacío y $\mathbf{R}^1$. ¿Existe una afirmación análoga para $\mathbf{R}^2$?

3.6 Probar que cada conjunto cerrado en $\mathbf{R}^1$ es la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos.

3.7 Probar que un conjunto cerrado y acotado, no vacío, S de $\mathbf{R}^1$ o bien es un intervalo cerrado o bien S podrá obtenerse a partir de un intervalo cerrado suprimiendo una colección disjunta numerable de intervalos abiertos cuyos extremos pertenecen a S.

Conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbf{R}^n$

3.8 Probar que las n-bolas abiertas y los intervalos abiertos n-dimensionales son conjuntos abiertos en $\mathbf{R}^n$.

3.9 Probar que el interior de un conjunto de $\mathbf{R}^n$ es abierto en $\mathbf{R}^n$.

3.10 Si $S \subseteq \mathbf{R}^n$, probar que int S es la reunión de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^n$ que están contenidos en S. Esto se describe diciendo que int S es el mayor de los subconjuntos abiertos de S.

3.11 Si S y T son subconjuntos de $\mathbf{R}^n$, probar que

$$(\text{int } S) \cap (\text{int } T) = \text{int } (S \cap T), \qquad \text{y} \qquad (\text{int } S) \cup (\text{int } T) \subseteq \text{int } (S \cup T).$$

3.12 Sean S' y $\bar{S}$, respectivamente, el conjunto derivado y la clausura de un conjunto S de $\mathbf{R}^n$. Probar que:

a) S' es cerrado en $\mathbf{R}^n$; esto es, $(S')' \subseteq S'$.
b) Si $S \subseteq T$, entonces $S' \subseteq T'$.
c) $(S \cup T)' = S' \cup T'$.
d) $(\bar{S})' = S'$.

e) $\bar{S}$ es cerrado en $\mathbf{R}^n$.
f) $\bar{S}$ es la intersección de todos los subconjuntos cerrados de $\mathbf{R}^n$ que contienen a S. Esto es, $\bar{S}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a S.

3.13 Sean S y T subconjuntos de $\mathbf{R}^n$. Probar que $\overline{S \cap T} \subseteq \bar{S} \cap \bar{T}$ y que $S \cap \bar{T} \subseteq \overline{S \cap T}$ si S es abierto.

NOTA. Las afirmaciones de los ejercicios 3.9 hasta 3.13 son verdaderas en cualquier espacio métrico.

3.14 Un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ se llama *convexo* si, para cada par de puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de S y cada número real θ que satisfaga $0 < \theta < 1$, se verifica que $\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y} \in S$. Dar una interpretación geométrica de esta definición (en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$) y probar que:
a) Cada n-bola de $\mathbf{R}^n$ es convexa.
b) Cada intervalo abierto n-dimensional es convexo.
c) El interior de un conjunto convexo es convexo.
d) La clausura de un conjunto convexo es convexa.

3.15 Sea F una colección de conjuntos de $\mathbf{R}^n$, y sea $S = \bigcup_{A\in F} A$ y $T = \bigcap_{A\in F} A$. Para cada una de las siguientes afirmaciones dar una demostración o un contraejemplo.
a) Si $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de T, entonces $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de cada uno de los conjuntos A de F.
b) Si $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de S, entonces $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de uno, por lo menos, de los conjuntos A de F.

3.16 Probar que el conjunto S de los números racionales del intervalo $(0, 1)$ no puede expresarse como la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos. *Indicación*. Expresemos $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$, supongamos que $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$, donde cada uno de los S_k es abierto, y construyamos una sucesión $\{Q_n\}$ de intervalos cerrados tales que $Q_{n+1} \subseteq Q_n \subseteq S_n$ y tales que $x_n \notin Q_n$. Entonces, utilizar el teorema de la intersección de Cantor para obtener una contradicción.

Teoremas acerca de los recubrimientos en $\mathbf{R}^n$

3.17 Si $S \subseteq \mathbf{R}^n$, probar que la colección de puntos aislados de S es numerable.

3.18 Probar que el conjunto de los discos abiertos del plano xy con centro en (x, x) y radio $x > 0$, x racional, es un recubrimiento numerable del conjunto $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

3.19 La colección F de los intervalos abiertos de la forma $(1/n, 2/n)$, donde $n = 2, 3, \ldots$, es un recubrimiento abierto del intervalo $(0, 1)$. Probar (sin utilizar el teorema 3.31) que ninguna subcolección finita de F recubre a $(0, 1)$.

3.20 Dar un ejemplo de un conjunto S que sea cerrado pero no acotado y encontrar un recubrimiento abierto numerable F tal que ningún subconjunto finito de F recubra a S.

3.21 Dar un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ que verifique la siguiente propiedad: para cada $\mathbf{x}$ de S, existe una n-bola $B(\mathbf{x})$ tal que $B(\mathbf{x}) \cap S$ es numerable. Probar que S es numerable.

3.22 Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbf{R}^n$ es necesariamente numerable. Dar un ejemplo de colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

3.23 Supongamos que $S \subseteq \mathbf{R}^n$. Un punto $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si toda n-bola $B(\mathbf{x})$ tiene la propiedad que $B(\mathbf{x}) \cap S$ no es numerable. Probar que si S no es numerable, entonces existe un punto $\mathbf{x}$ en S de modo que $\mathbf{x}$ es un punto de condensación de S.

3.24 Supongamos que $S \subseteq \mathbf{R}^n$ y que S no es numerable. Sea T el conjunto de puntos de condensación de S. Probar que:
a) $S - T$ es numerable,
b) $S \cap T$ no es numerable,
c) T es un conjunto cerrado,
d) T no posee puntos aislados.

Nótese que el ejercicio 3.23 es un caso especial de (b).

3.25 Un conjunto de $\mathbf{R}^n$ se llama *perfecto* si $S = S'$, esto es, si S es un conjunto cerrado que carece de puntos aislados. Probar que, si F es un conjunto cerrado no numerable de $\mathbf{R}^n$, puede expresarse en la forma $F = A \cup B$, donde A es perfecto y B es numerable *(teorema de Cantor-Bendixon)*.
Indicación. Utilizar el ejercicio 3.24.

Espacios métricos

3.26 Probar que, en todo espacio métrico (M, d), tanto el conjunto vacío $\emptyset$ como el espacio entero M son, a la vez, abiertos y cerrados.

3.27 Considerar en $\mathbf{R}^n$ las dos métricas siguientes:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|, \qquad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

En cada uno de los espacios métricos siguientes, probar que la bola $B(\mathbf{a}; r)$ tiene la apariencia geométrica que se indica:
a) en $(\mathbf{R}^2, d_1)$, un cuadrado de lados paralelos a los ejes de coordenadas.
b) en $(\mathbf{R}^2, d_2)$, un cuadrado cuyas diagonales son paralelas a los ejes.
c) Un cubo en $(\mathbf{R}^3, d_1)$.
d) Un octaedro en $(\mathbf{R}^3, d_2)$.

3.28 Sean d_1 y d_2 las métricas definidas en el ejercicio 3.27 y sea $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ la métrica euclídea usual. Comprobar que se verifican las siguientes desigualdades, cualesquiera que sean los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbf{R}^n$:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{y} \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le \sqrt{n}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le n d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

3.29 Si (M, d) es un espacio métrico, se define

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Probar que d' también es una métrica para M. Obsérvese que $0 \le d'(x, y) < 1$ para todo x, y de M.

3.30 Probar que cada subconjunto finito de un espacio métrico es cerrado.

3.31 En un espacio métrico (M, d), el conjunto $\bar{B}(a; r) = \{x : d(x, a) \le r\}$ se llama *bola cerrada* de radio $r > 0$ y centro en el punto a de M.

a) Probar que $\bar{B}(a;\ r)$ es un conjunto cerrado.
b) Dar un ejemplo de un espacio métrico en el que $\bar{B}(a;\ r)$ no sea la adherencia de la bola abierta $B(a;\ r)$.

3.32 En un espacio métrico M, si ciertos subconjuntos verifican $A \subseteq S \subseteq \bar{A}$, donde $\bar{A}$ es la adherencia de A, entonces se dice que A es denso en S. Por ejemplo, el conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbf{R}$. Si A es denso en S y S es denso en T, probar que A es denso en T.

3.33 Con referencia al ejercicio 3.32, diremos que un espacio métrico M es *separable* si posee un subconjunto *numerable* A que sea denso en M. Por ejemplo, $\mathbf{R}$ es separable ya que el conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales es un subconjunto denso numerable. Probar que cada espacio euclídeo $\mathbf{R}^k$ es separable.

3.34 Con referencia al ejercicio 3.33, probar que el teorema del recubrimiento de Lindelöf (teorema 3.28) es válido en todo espacio métrico separable.

3.35 Con referencia al ejercicio 3.32, si A es denso en S y si B es abierto en S, probar que $B \subseteq \overline{A \cap B}$. *Indicación.* Ejercicio 3.13.

3.36 Con referencia al ejercicio 3.32, probar que $A \cap B$ es denso en S en el supuesto de que A y B sean densos en S y de que B sea abierto en S.

3.37 Dados dos espacios métricos $(S_1,\ d_1)$ y $(S_2,\ d_2)$, es posible construir una métrica ρ en el producto cartesiano $S_1 \times S_2$, a partir de d_1 y de d_2, de varias maneras. Por ejemplo, si $x = (x_1,\ x_2)$ e $y = (y_1,\ y_2)$ son elementos de $S_1 \times S_2$, sea $\rho(x,\ y) = d_1(x_1,\ y_1) + d_2(x_2,\ y_2)$. Probar que ρ es una métrica para $S_1 \times S_2$ y construir otras.

Subconjuntos compactos de un espacio métrico

Probar cada una de las afirmaciones siguientes, concernientes a un espacio métrico arbitrario $(M,\ d)$ y a subconjuntos $S,\ T$ de M.

3.38 Supongamos que $S \subseteq T \subseteq M$. Entonces S es compacto en $(M,\ d)$ si, y sólo si, S es compacto en el subespacio métrico $(T,\ d)$.

3.39 Si S es cerrado y T es compacto, entonces $S \cap T$ es compacto.

3.40 La intersección de una colección arbitraria de subconjuntos compactos de M, es compacta.

3.41 La reunión de un número finito de subconjuntos compactos de M es compacta.

3.42 Consideremos el espacio métrico $\mathbf{Q}$ de los números racionales con la métrica euclídea de $\mathbf{R}$. Sea S el conjunto de todos los números racionales del intervalo abierto $(a,\ b)$, donde a y b son irracionales. Entonces S es un subconjunto de $\mathbf{Q}$, cerrado y acotado, que no es compacto.

Miscelánea de propiedades del interior y de la frontera

Si A y B designan subconjuntos cualesquiera de un espacio métrico M, probar que:

3.43 $\operatorname{int} A = M - \overline{M - A}$.

3.44 $\operatorname{int}(M - A) = M - \bar{A}$.

3.45 $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$.

3.46 a) $\operatorname{int}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (\operatorname{int} A_i)$, donde cada $A_i \subseteq M$.
b) $\operatorname{int}(\bigcap_{A \in F} A) \subseteq \bigcap_{A \in F} (\operatorname{int} A)$, si F es una colección infinita de subconjuntos de M.
c) Dar un ejemplo en el que la igualdad de (b) no se verifique.

3.47 a) $\bigcup_{A \in F} (\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int}(\bigcup_{A \in F} A)$.
b) Dar un ejemplo de una colección finita F que no satisfaga la igualdad en (a).

3.48 a) $\operatorname{int}(\partial A) = \emptyset$ si A es abierto o si A es cerrado en M.
b) Dar un ejemplo para el que $\operatorname{int}(\partial A) = M$.

3.49 Si $\operatorname{int} A = \operatorname{int} B = \emptyset$ y si A es cerrado en M, entonces $\operatorname{int}(A \cup B) = \emptyset$.

3.50 Dar un ejemplo en el que $\operatorname{int} A = \operatorname{int} B = \emptyset$, pero para el que $\operatorname{int}(A \cup B) = M$.

3.51 $\partial A = \bar{A} \cap \overline{M - A}$ y $\partial A = \partial(M - A)$.

3.52 Si $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, entonces $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

3.1 Boas, R. P., *A Primer of Real Functions.* Carus Monograph No. 13. Wiley, New York, 1960.
3.2 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis*, Addison-Wesley, Reading, 1966.
3.3 Kaplansky, I., *Set Theory and Metric Spaces.* Allyn and Bacon, Boston, 1972.
3.4 Simmons, G .F., *Introduction to Topology and Modern Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1963.

CAPÍTULO 4

Límites y continuidad

4.1 INTRODUCCIÓN

Suponemos al lector ya familiarizado con el concepto de límites tal como es introducido en el Cálculo elemental donde es corriente presentar varios tipos de límites. Por ejemplo, el *límite de una sucesión* de números reales $\{x_n\}$, que simbolizamos cuando escribimos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A,$$

significa que para cada número $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$|x_n - A| < \varepsilon \quad \text{siempre que } n \geq N.$$

Este límite pretende transmitir la idea intuitiva de que x_n puede estar suficientemente próximo a A en el supuesto de que n sea suficientemente grande. También se da el *límite de una función*, indicado por medio de la notación

$$\lim_{x \to p} f(x) = A,$$

que significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe otro número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta.$$

Esta definición expresa la idea de que $f(x)$ puede conseguirse tan próxima a A como queramos, siempre que x se tome lo suficientemente próximo a p.

Las aplicaciones del Cálculo a los problemas geométricos y físicos del espacio tridimensional y a las funciones de varias variables nos obligan a extender estos conceptos a $\mathbf{R}^n$. Es tan necesario como fácil dar un paso más e introducir límites en el marco más general de los espacios métricos. Esto simplifica la teoría puesto que elimina restricciones innecesarias y al mismo tiempo cubre casi todos los aspectos necesarios del Análisis.

Primeramente discutiremos los límites de las sucesiones de puntos de un espacio métrico y después discutiremos los límites de funciones y el concepto de continuidad.

4.2 SUCESIONES CONVERGENTES EN UN ESPACIO MÉTRICO

Definición 4.1. *Una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (S, d) es convergente si existe un punto p de S que satisfaga la siguiente propiedad:*

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$d(x_n, p) < \varepsilon \quad \textit{siempre que } n \geq N.$$

Diremos también que $\{x_n\}$ converge hacia p y escribiremos $x_n \to p$ cuando $n \to \infty$, o simplemente $x_n \to p$. Si no existe un tal número p de S, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ es divergente.

NOTA. La definición de convergencia implica que

$$x_n \to p \quad \text{si, y sólo si,} \quad d(x_n, p) \to 0.$$

La convergencia de la sucesión $\{d(x_n, p)\}$ hacia 0 se realiza en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^1$.

Ejemplos

1. En un espacio euclídeo $\mathbf{R}^1$, una sucesión $\{x_n\}$ se llama *creciente* si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n. Si una sucesión creciente está acotada superiormente (esto es, si $x_n \leq M$ para un $M > 0$ y para todo n), entonces $\{x_n\}$ converge hacia el supremo de su recorrido, sup $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Análogamente, $\{x_n\}$ se llama *decreciente* si $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n. Cada sucesión decreciente acotada inferiormente converge hacia el ínfimo de su recorrido. Por ejemplo, $\{1/n\}$ converge hacia 0.
2. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones reales que convergen hacia 0, entonces $\{a_n + b_n\}$ también converge hacia 0. Si $0 \leq c_n \leq a_n$ para todo n y si $\{a_n\}$ converge hacia 0, entonces $\{c_n\}$ también converge hacia 0. Estas propiedades elementales de las sucesiones de $\mathbf{R}^1$ pueden ser útiles para simplificar algunas de las demostraciones concernientes a límites de un espacio métrico general.
3. En el plano complejo $\mathbf{C}$, sea $z_n = 1 + n^{-2} + (2 - 1/n)i$. Entonces $\{z_n\}$ converge hacia $1 + 2i$ puesto que

$$d(z_n, 1 + 2i)^2 = |z_n - (1 + 2i)|^2 = \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

luego $d(z_n, 1+2i) \to 0$.

Teorema 4.2. *Una sucesión $\{x_n\}$ de un espacio métrico (S, d) puede converger hacia un punto de S, a lo sumo.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to p$ y que $x_n \to q$. Probaremos que $p = q$. En virtud de la desigualdad triangular se tiene

$$0 \leq d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q).$$

Como $d(p, x_n) \to 0$ y $d(x_n, q) \to 0$ se tiene que $d(p, q) = 0$, luego $p = q$.

Si una sucesión $\{x_n\}$ converge, el único punto hacia el que converge se llama *límite* de la sucesión y se designa por medio de lim x_n o por medio de $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Ejemplo. En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^1$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. La misma sucesión en el subespacio métrico $T = (0, 1]$ *no* converge puesto que el único candidato para el límite es 0 y $0 \notin T$. Este ejemplo muestra que la convergencia o divergencia de una sucesión depende tanto del espacio elegido como de la métrica.

Teorema 4.3. *En un espacio métrico (S, d), suponemos que $x_n \to p$ y que $T = \{x_1, x_2, \ldots\}$ es el recorrido de $\{x_n\}$. Entonces:*
a) T está acotado.
b) p es un punto de adherencia de T.

Demostración. a) Sea N el entero que corresponde a $\varepsilon = 1$ en la definición de convergencia. Entonces todo x_n con $n \geq N$ está en la esfera $B(p; 1)$, luego cada punto de T está en la esfera $B(p; r)$, donde

$$r = 1 + \max\{d(p, x_1), \ldots, d(p, x_{N-1})\}.$$

Por lo tanto, T está acotado.

b) Como cada esfera $B(p; \varepsilon)$ contiene un punto de T, p es adherente a T.

NOTA. Si T es *infinito,* cada bola $B(p; \varepsilon)$ contendrá una infinidad de puntos de T, luego p será punto de acumulación de T.

El teorema siguiente prueba el recíproco de la parte (b).

Teorema 4.4. *Dado un espacio métrico (S, d) y un subconjunto $T \subseteq S$, si p es un punto de S adherente de T, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de T que converge hacia p.*

Demostración. Para cada entero $n \geq 1$ existe un punto x_n de T tal que $d(p, x_n) \leq 1/n$. Por lo tanto $d(p, x_n) \to 0$, luego $x_n \to p$.

Teorema 4.5. *En un espacio métrico (S, d) una sucesión $\{x_n\}$ converge hacia p si, y sólo si, cada subsucesión $\{x_{k(n)}\}$ converge hacia p.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to p$ y consideremos una subsucesión $\{x_{k(n)}\}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $n \geq N$ implica $d(x_n, p) < \varepsilon$. Como

$\{x_{k(n)}\}$ es una subsucesión, existe un entero M tal que $k(n) \geq N$ para $n \geq M$. Por lo tanto, $n \geq M$ implica $d(x_{k(n)}, p) < \varepsilon$, que prueba que $x_{k(n)} \to p$. El recíproco se verifica trivialmente, ya que $\{x_n\}$ es una subsucesión de sí misma.

4.3 SUCESIONES DE CAUCHY

Si una sucesión $\{x_n\}$ converge hacia el límite p, sus términos avanzados deben aproximarse a p y por lo tanto aproximarse entre sí. Esta propiedad está enunciada más formalmente en el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *Supongamos que $\{x_n\}$ converge en un espacio métrico (S, d). Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{siempre que } n \geq N \text{ y } m \geq N.$$

Demostración. Sea $p = \lim x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, sea N tal que $d(x_n, p) < \varepsilon/2$ siempre que $n \geq N$. Entonces $d(x_m, p) < \varepsilon/2$ si $m \geq N$. Si tanto n como m son mayores o iguales que N por la desigualdad triangular tenemos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, p) + d(p, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4.7. Definición de la sucesión de Cauchy. *Una sucesión $\{x_n\}$ de un espacio métrico se llama sucesión de Cauchy si satisface la siguiente condición (llamada la condición de Cauchy):*

Para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{siempre que } n \geq N \text{ y } m \geq N.$$

El teorema 4.6 establece que toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. El recíproco, en general, es falso en un espacio métrico general. Por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ es una sucesión de Cauchy en el subespacio euclídeo $T = (0, 1]$ de $\mathbf{R}^1$, pero en cambio dicha sucesión no converge en T. Sin embargo, el recíproco del teorema 4.6 es cierto en cada espacio euclídeo $\mathbf{R}^k$.

Teorema 4.8. *En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^k$ toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Demostración. Sea $\{\mathbf{x}_n\}$ una sucesión de Cauchy de $\mathbf{R}^k$ y sea $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ el recorrido de la sucesión. Si T es finito, entonces todos los términos de $\{\mathbf{x}_n\}$ excepto un número finito son iguales y por lo tanto $\{\mathbf{x}_n\}$ converge hacia este valor común.

Supongamos ahora que T es infinito. Utilizaremos el teorema de Bolzano-Weierstrass para demostrar que T posee un punto de acumulación $\mathbf{p}$, y a continuación probaremos que $\{\mathbf{x}_n\}$ converge hacia $\mathbf{p}$. Debemos probar, ante todo, que T está acotado. Esto se sigue de la condición de Cauchy. En efecto, cuando $\varepsilon = 1$ existe un N tal que $n \geq N$ implica $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_N\| < 1$. Esto significa que todos los puntos $\mathbf{x}_n$ con $n \geq N$ pertenecen a la bola de radio 1 y centro $\mathbf{x}_N$, luego T está contenido en una bola de radio $1 + M$ y centro O, si M designa al mayor de los números $\|\mathbf{x}_n\|, \ldots, \|\mathbf{x}_N\|$. De donde, al ser T un conjunto infinito acotado, admitirá un punto de acumulación $\mathbf{p}$ en $\mathbf{R}^k$ (en virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass). Probaremos ahora que $\{\mathbf{x}_n\}$ converge hacia $\mathbf{p}$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon/2$ siempre que $n \geq N$ y $m \geq N$. La bola $B(\mathbf{p}; \varepsilon/2)$ contiene un punto $\mathbf{x}_m$ con $m \geq N$. Luego, si $n \geq N$, se tiene

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{x}_n - x_m\| + \|\mathbf{x}_m - \mathbf{p}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

luego $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{p}$. Esto termina la demostración.

Ejemplos

1. El teorema 4.8 es, a veces, útil para probar la convergencia de una sucesión cuyo límite no se conoce de antemano. Por ejemplo, consideremos la sucesión de $\mathbf{R}^1$ definida por

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Si $m > n \geq N$, obtenemos (agrupando los términos sucesivos en pares) que

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots \pm \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N},$$

luego $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ siempre que $N > 1/\varepsilon$. Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y por consiguiente converge hacia un cierto límite. Puede probarse (ver el ejercicio 8.18) que este límite es log 2, lo cual no es obvio a simple vista.

2. Dada una sucesión real $\{a_n\}$ tal que $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|$ para todo $n \geq 1$, podemos probar que $\{a_n\}$ converge sin necesidad de conocer su límite. Sea $b_n = |a_{n+1} - a_n|$. Entonces $0 \leq b_{n+1} \leq b_n/2$ luego, por inducción, $b_{n+1} \leq b_1/2^n$. Por lo tanto $b_n \to 0$. Así pues, si $m > n$ tenemos

$$a_m - a_n = \sum_{k=n}^{m-1} (a_{k+1} - a_k);$$

luego

$$|a_m - a_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} b_k \leq b_n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1-n}}\right) < 2b_n.$$

Ello implica que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy, luego $\{a_n\}$ es convergente.

4.4 ESPACIOS MÉTRICOS COMPLETOS

Definición 4.9. *Un espcio métrico (S, d) se llama completo si toda sucesión de Cauchy de S converge en S. Un subconjunto T de S se llama completo si el subespacio métrico (T, d) es completo.*

Ejemplo 1. Cada uno de los espacios euclídeos $\mathbf{R}^k$ es completo (teorema 4.8). En particular, $\mathbf{R}^1$ es completo, pero el subespacio $T = (0, 1]$ no es completo.
Ejemplo 2. El espacio $\mathbf{R}^n$ con la métrica $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$ es completo.

El teorema que damos a continuación relaciona la completitud con la compacidad.

Teorema 4.10. *En todo espacio métrico (S, d), cada subconjunto compacto T es completo.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en T y sea $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ el recorrido de $\{x_n\}$. Si A es finito, entonces $\{x_n\}$ converge hacia uno de los puntos de A, luego $\{x_n\}$ converge en T.

Si A es infinito, el teorema 3.38 nos asegura que A admite un punto de acumulación p en T puesto que T es compacto. Probaremos ahora que $x_n \to p$. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N tal que $n \ge N$ y $m \ge N$ implique $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. La bola $B(p; \varepsilon/2)$ contiene un punto x_m con $m \ge N$. Por lo tanto si $n \ge N$ la desigualdad triangular nos conduce a

$$d(x_n, p) \le d(x_n, x_m) + d(x_m, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

luego $x_n \to p$. De lo cual se deduce que toda sucesión de Cauchy en T admite límite en T, luego T es completo.

4.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

En esta sección consideraremos dos espacios métricos (S, d_S) y (T, d_T), donde d_S y d_T designan las métricas respectivas. Sea A un subconjunto de S y sea $f\colon A \to T$ una función de A en T.

Definición 4.11. *Si p es un punto de acumulación de A y si $b \in T$, la notación*

$$\lim_{x \to p} f(x) = b, \tag{1}$$

significa lo siguiente:

Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$d_T(f(x), b) < \varepsilon \quad \textit{siempre que } x \in A, x \ne p, \text{ y } d_S(x, p) < \delta.$$

El símbolo dado en (1) se lee «el límite de $f(x)$, cuando x tiende hacia p, es b», o «$f(x)$ es próximo a b cuando x es próximo a p». A menudo indicaremos esto escribiendo $f(x) \to b$ cuando $x \to p$.

La definición formaliza la idea intuitiva de que $f(x)$ puede hacerse tan próximo a b como se desee siempre que se elija x suficientemente próximo a p (ver Fig. 4.1). Se requiere que p sea un punto de acumulación de A a fin de

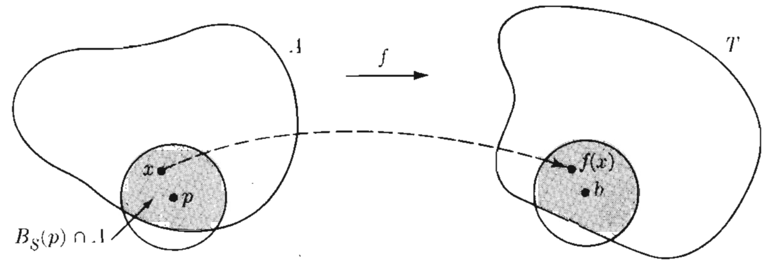


Figura 4.1

que tenga sentido considerar puntos x de A suficientemente próximos a p, con $x \ne p$. Sin embargo, no es necesario que p pertenezca al dominio de f, y tampoco lo es que b deba pertenecer al recorrido de f.

NOTA. La definición puede ser formulada en términos de bolas. Así, (1) se verifica si, y sólo si, para toda bola $B_T(b)$ existe una bola $B_S(p)$ tal que $B_S(p) \cap A$ sea no vacío y, además,

$$f(x) \in B_T(b) \quad \text{siempre que } x \in B_S(p) \cap A, x \ne p.$$

Formulando de esta manera, la definición tiene sentido cuando p o b (o ambos) pertenecen al sistema ampliado de los números reales $\mathbf{R}^*$ o al sistema ampliado de los números complejos $\mathbf{C}^*$. Sin embargo, en lo venidero, entenderemos que p y b son finitos salvo que se indique explícitamente que pueden ser infinitos.

El teorema que sigue a continuación relaciona los límites de funciones con los límites de sucesiones convergentes.

Teorema 4.12. *Supongamos que p es un punto de acumulación de A y que $b \in T$. Entonces*

$$\lim_{x \to p} f(x) = b, \tag{2}$$

si, y sólo si,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \tag{3}$$

para toda sucesión $\{x_n\}$ *de puntos de* $A - \{p\}$ *que sea convergente hacia* p.

Demostración. Si se verifica (2), entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$d_T(f(x), b) < \varepsilon \quad \text{siempre que } x \in A \text{ y } 0 < d_S(x, p) < \delta. \tag{4}$$

Como p es adherente a $A - \{p\}$, por el teorema 4.4, existe una sucesión $\{x_n\}$ en $A - \{p\}$ convergente hacia p. Para el δ que interviene en (4), existe un entero N tal que $n \geq N$ implica $d_S(x_n, p) < \delta$. Entonces (4) implica que $d_T(f(x_n), b) < \varepsilon$ para $n \geq N$, y por lo tanto $\{f(x_n)\}$ converge hacia b. Así pues, (2) implica (3).

Para probar el recíproco supondremos que se verifica (3) y que (2) es falso, llegando a una contradicción. Si (2) es falso, entonces para algún $\varepsilon > 0$ y todo $\delta > 0$ existe un punto x de A (donde x puede depender de δ) tal que

$$0 < d_S(x, p) < \delta \quad \text{pero} \quad d_T(f(x), b) \geq \varepsilon. \tag{5}$$

Tomando $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, esto significa que existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A - \{p\}$ tal que

$$0 < d_S(x_n, p) < 1/n \quad \text{pero} \quad d_T(f(x_n), b) \geq \varepsilon.$$

Es evidente entonces que hemos obtenido una sucesión $\{x_n\}$ que converge hacia p pero en cambio la sucesión $\{f(x_n)\}$ no converge hacia b, lo cual contradice a (3).

NOTA. Los teoremas 4.12 y 4.2 prueban que una función no puede tener dos límites diferentes cuando $x \to p$.

4.6 LÍMITES DE FUNCIONES CON VALORES COMPLEJOS

Sea (S, d) un espacio métrico, sea A un subconjunto de S, y consideremos dos funciones f y g definidas sobre A y con valores complejos,

$$f: A \to \mathbf{C}, \qquad g: A \to \mathbf{C}$$

La suma $f + g$ se define como la función cuyo valor en cada punto x de A es el número complejo $f(x) + g(x)$. La *diferencia* $f - g$, el *producto* $f \cdot g$, y el *cociente* f/g se definen análogamente. Es sabido que el cociente sólo está definido en aquellos puntos x en los que $g(x) \neq 0$.

Las reglas usuales para el cálculo con límites vienen dadas en el teorema que sigue.

Teorema 4.13. *Sean f y g dos funciones con valores complejos definidas en un subconjunto A de un espacio métrico (S, d). Sea p un punto de acumulación de A, y supongamos que*

$$\lim_{x\to p} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to p} g(x) = b.$$

Entonces tendremos también:

a) $\lim_{x\to p} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$,

b) $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = ab$,

c) $\lim_{x\to p} f(x)/g(x) = a/b$ *si* $b \neq 0$.

Demostración. Probaremos (b), dejando las otras partes como ejercicio. Dado ε con $0 < \varepsilon < 1$, sea ε' un segundo número que satisfaga $0 < \varepsilon' < 1$, que dependerá de ε en la forma que precisaremos más adelante. Existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $d(x, p) < \delta$, entonces

$$|f(x) - a| < \varepsilon' \quad \text{y} \quad |g(x) - b| < \varepsilon'.$$

Entonces

$$|f(x)| = |a + (f(x) - a)| < |a| + \varepsilon' < |a| + 1.$$

Haciendo $f(x)g(x) - ab = f(x)g(x) - bf(x) + bf(x) - ab$, tenemos

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &\leq |f(x)|\,|g(x) - b| + |b|\,|f(x) - a| \\ &< (|a| + 1)\varepsilon' + |b|\varepsilon' = \varepsilon'(|a| + |b| + 1). \end{aligned}$$

Si elegimos $\varepsilon' = \varepsilon/(|a| + |b| + 1)$, veremos que $|f(x)g(x) - ab| < \varepsilon$ siempre que $x \in A$ y $d(x, p) < \delta$, y esto demuestra (b).

4.7 LÍMITES DE FUNCIONES CON VALORES VECTORIALES

De nuevo, sea (S, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de S. Consideremos dos funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$, definidas sobre A, con valores vectoriales tomados en $\mathbf{R}^k$,

$$\mathbf{f}: A \to \mathbf{R}^k, \qquad \mathbf{g}: A \to \mathbf{R}^k.$$

El cociente de funciones con valores vectoriales no está definido (si $k \geq 2$), pero es posible definir la *suma* $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, el *producto* $\lambda\mathbf{f}$ (si λ es real) y el *producto escalar* $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ por medio de las fórmulas

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x), \qquad (\lambda\mathbf{f})(x) = \lambda\mathbf{f}(x), \qquad (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)$$

para todo x de A. Se tienen entonces las siguientes reglas para calcular los límites de funciones con valores vectoriales.

Teorema 4.14. *Sea p un punto de acumulación de A y supongamos que*

$$\lim_{x\to p} \mathbf{f}(x) = \mathbf{a}, \qquad \lim_{x\to p} \mathbf{g}(x) = \mathbf{b}.$$

Entonces se tiene también:

a) $\lim_{x\to p} [\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)] = \mathbf{a} + \mathbf{b}$,

b) $\lim_{x\to p} \lambda\mathbf{f}(x) = \lambda\mathbf{a}$ *para cada escalar* λ,

c) $\lim_{x\to p} \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$,

d) $\lim_{x\to p} \|\mathbf{f}(x)\| = \|\mathbf{a}\|$.

Demostración. Probaremos sólo las partes (c) y (d). Para probar (c) hagamos

$$\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = [\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}]\cdot[\mathbf{g}(x) - \mathbf{b}] + \mathbf{a}\cdot[\mathbf{g}(x) - \mathbf{b}] + \mathbf{b}\cdot[\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}].$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular nos dan

$$\begin{aligned} 0 &\le |\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \\ &\le \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\|\,\|\mathbf{g}(x) - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{g}(x) - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\|. \end{aligned}$$

Cada uno de los términos de la derecha tiende a 0 cuando $x\to p$, luego $\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)\to\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Esto prueba (c). Para demostrar (d), obsérvese que

$$|\,\|\mathbf{f}(x)\| - \|\mathbf{a}\|\,| \le \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\|.$$

NOTA. Sean $f_1, \ldots, f_n$ n funciones con valores reales definidas sobre A, y sea $\mathbf{f}\colon A \to \mathbf{R}^n$ la función con valores vectoriales definida por

$$\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \quad \text{si } x \in A.$$

Entonces $f_1, \ldots, f_n$ se llaman componentes de $\mathbf{f}$, y se escribe $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ para indicar dicha relación.

Si $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces para cada $r = 1, 2, \ldots, n$ tenemos

$$|f_r(x) - a_r| \le \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\| \le \sum_{r=1}^{n} |f_r(x) - a_r|.$$

Estas desigualdades demuestran que $\lim_{x\to p} \mathbf{f}(x) = \mathbf{a}$ si, y sólo si, $\lim_{x\to p} f_r(x) = a_r$ para cada r.

4.8 FUNCIONES CONTINUAS

La definición de continuidad que se da en Cálculo elemental puede extenderse a funciones definidas de un espacio métrico a otro.

Definición 4.15. *Sean (S, d_S) y (T, d_T) espacios métricos y sea $f\colon S\to T$ una función de S en T. La función f se llama continua en un punto p de S si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon \quad \textit{siempre que } d_S(x, p) < \delta.$$

Si f es continua en todos los puntos del subconjunto A de S, se dice que f es continua en A.

Esta definición refleja la idea intuitiva de que puntos cercanos a p se aplican, por medio de f, en puntos cercanos a $f(p)$. Puede expresarse, también, en términos de bolas: una función f es continua en p sí, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(B_S(p;\ \delta)) \subseteq B_T(f(p);\ \varepsilon).$$

Aquí $B_S(p;\ \delta)$ designa una bola de S; su imagen, por medio de f, debe estar contenida en la bola $B_T(f(p);\ \varepsilon)$ de T. (Ver Fig. 4.2.)

Si p es un punto de acumulación de S, la definición de continuidad implica que

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p).$$

Si p es un punto aislado de S (un punto de S que no es de acumulación de S), entonces toda f definida en p será continua en p ya que para δ suficientemente pequeño existe un único x que satisface $d_S(x, p) < \delta$, a saber $x = p$, y $d_T(f(p), f(p)) = 0$.

Teorema 4.16. *Sea $f\colon S\to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro espacio métrico (T, d_T), y supongamos que $p \in S$. Entonces f es continua*

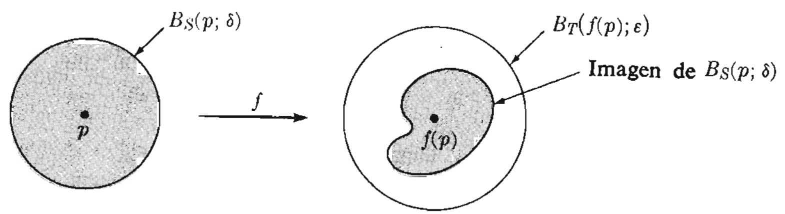


Figura 4.2

en p si, y sólo si, para cada sucesión $\{x_n\}$ de S convergente en p, la sucesión $\{f(x_n)\}$ de T converge hacia f(p); en símbolos,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 4.12 y se deja de ejercicio para el lector. (El resultado puede deducirse también del teorema 4.12 pero el hecho de que algunos de los términos de la sucesión $\{x_n\}$ puedan ser iguales a p presenta una dificultad de orden menor en el razonamiento.)

El teorema se enuncia a veces, diciendo que para funciones continuas el símbolo de límite y el símbolo de la función pueden intercambiarse. En estos intercambios es preciso un cierto cuidado, ya que algunas veces $\{f(x_n)\}$ converge a pesar de que $\{x_n\}$ es divergente.

Ejemplo. Si $x_n \to x$ e $y_n \to y$ en un espacio métrico (S, d), entonces $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$. (Ejercicio 4.7.) El lector puede verificar que d es continua sobre el espacio métrico $(S \times S, \rho)$, donde ρ es la métrica del ejercicio 3.37 con $S_1 = S_2 = S$.

NOTA. La continuidad de una función f en un punto p recibe el nombre de *propiedad local* de f, puesto que depende sólo del comportamiento de f en las inmediaciones del punto p. Una propiedad de f referente al dominio entero de f se denomina *propiedad global*. Así, la continuidad de f en su dominio es una propiedad global.

4.9 LA CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS

Teorema 4.17. *Sean (S, d_S), (T, d_T) y (U, d_U) espacios métricos. Sean $f: S \to T$ y $g: f(S) \to U$ funciones, y sea h la función compuesta definida sobre S por medio de la ecuación*

$$h(x) = g(f(x)) \quad \text{para todo } x \text{ de } S.$$

Si f es continua en p y si g es continua en f(p), entonces h es continua en p.

Demostración. Sea $b = f(p)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$d_U(g(y), g(b)) < \varepsilon \quad \text{siempre que } d_T(y, b) < \delta.$$

Para este δ existe un δ' tal que

$$d_T(f(x), f(p)) < \delta \quad \text{siempre que } d_S(x, p) < \delta'.$$

Combinando estas dos desigualdades y haciendo $y = f(x)$, obtenemos

$$d_U(h(x), h(p)) < \varepsilon \quad \text{siempre que } d_S(x, p) < \delta',$$

luego h es continua en p.

4.10 FUNCIONES COMPLEJAS Y FUNCIONES VECTORIALES, CONTINUAS

Teorema 4.18. *Sean f y g dos funciones con valores complejos, continuas en un punto p de un espacio métrico (S, d). Entonces $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son todas ellas continuas en p. El cociente f/g también es continuo en p si $g(p) \neq 0$.*

Demostración. El resultado es trivial si p es un punto aislado de S. Si p es un punto de acumulación de S, el resultado se sigue del teorema 4.13.

Existe, además, un teorema análogo para las funciones con valores vectoriales, que se demuestra de la misma manera, utilizando el teorema 4.14.

Teorema 4.19. *Sean* **f** *y* **g** *dos funciones continuas en un punto p de un espacio métrico (S, d), y supongamos que* **f** *y* **g** *toman sus valores en $\mathbf{R}^n$. Entonces cada una de las siguientes funciones es continua en p: la suma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, el producto $\lambda\mathbf{f}$ para cada número real λ, el producto escalar $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$, y la norma $\|\mathbf{f}\|$.*

Teorema 4.20. *Sean $f_1, \ldots, f_n$, n funciones reales definidas sobre un subconjunto A de un espacio métrico (S, d_S) y sea $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Entonces* **f** *es continua en un punto p de A si, y sólo si, cada una de las funciones $f_1, \ldots, f_n$ es continua en p.*

Demostración. Si p es un punto aislado de A no hay nada que demostrar. Si p es un punto de acumulación, obsérvese que $\mathbf{f}(x) \to \mathbf{f}(p)$ cuando $x \to p$ si, y sólo si, $f_k(x) \to f_k(p)$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

4.11 EJEMPLOS DE FUNCIONES CONTINUAS

Sea $S = \mathbf{C}$, el plano complejo. Es un ejercicio trivial demostrar que las siguientes funciones con valores complejos son continuas en $\mathbf{C}$:

a) las funciones constantes, definidas por $f(z) = c$ para todo z de $\mathbf{C}$;
b) la función identidad, definida por $f(z) = z$ para todo z de $\mathbf{C}$.

Aplicando repetidamente el teorema 4.18 se establece la continuidad de los polinomios

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

donde los a_i son números complejos.

Si S es un subconjunto de $\mathbf{C}$ en el que el polinomio f no se anula, entonces $1/f$ es continua en S. Por lo tanto una función racional g/f, donde g y f son polinomios, es continua en cada uno de los puntos de **C** en los que el denominador sea no nulo.

Las funciones reales del Cálculo elemental, tales como la función exponencial, trigonométrica, logarítmica, son continuas en todos los puntos en que están definidas. La continuidad de estas funciones elementales justifica la práctica común de calcular ciertos límites substituyendo la «variable independiente» por el valor límite; por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1.$$

La continuidad de las funciones exponencial y trigonométrica complejas es una consecuencia de la continuidad de las funciones reales correspondientes y del teorema 4.20.

4.12 CONTINUIDAD Y ANTIIMÁGENES DE CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS

El concepto de antiimagen es útil para dar dos importantes caracterizaciones globales de las funciones continuas.

4.21. ***Definición de imagen inversa.*** *Sea $f\colon S\to T$ una función de un cierto conjunto S en otro conjunto T. Si Y es un subconjunto de T, la antiimagen de Y por f, designada por $f^{-1}(Y)$, se define como el mayor de los subconjuntos de S que se aplica en Y por medio de f; esto es,*

$$f^{-1}(Y) = \{x\colon x\in S \ \text{y}\ f(x)\in Y\}.$$

NOTA. Si f admite función inversa f^{-1}, la antiimagen de Y por medio de f coincide con la imagen directa de Y por medio de f^{-1}, y en este caso no hay ambigüedad en la notación $f^{-1}(Y)$. Nótese también que $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$ si $A\subseteq B\subseteq T$.

Teorema 4.22. *Sea $f\colon S\to T$ una función de S en T. Si $X\subseteq S$ e $Y\subseteq T$, tenemos:*

a) *$X = f^{-1}(Y)$ implica $f(X)\subseteq Y$.*
b) *$Y = f(X)$ implica $X\subseteq f^{-1}(Y)$.*

La demostración del teorema 4.22 es inmediata por cuanto no es más que una traducción directa de la definición de los símbolos $f^{-1}(Y)$ y $f(X)$, y se deja al lector. Obsérvese que, en general, no es posible concluir que $Y = f(X)$ implice $X = f^{-1}(Y)$. (Ver el ejemplo en la Fig. 4.3.)

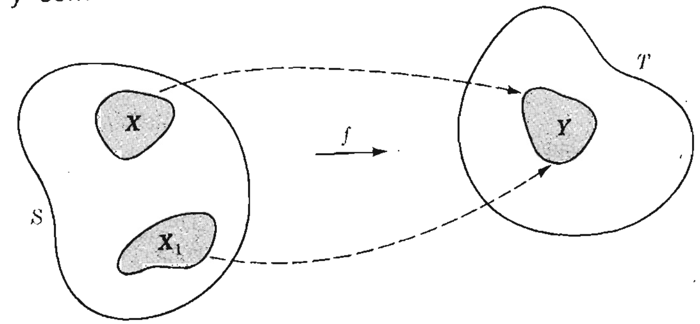


Figura 4.3

Nótese que las afirmaciones del teorema 4.22 pueden expresarse también de la siguiente manera:

$$f[f^{-1}(Y)]\subseteq Y, \qquad X\subseteq f^{-1}[f(X)].$$

Obsérvese asimismo que $f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ para todos los subconjuntos A y B de T.

Teorema 4.23. *Sea $f\colon S\to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T). Entonces f es continua en S si, y sólo si, para cada conjunto abierto Y de T, la antiimagen $f^{-1}(Y)$ es abierta en S.*

Demostración. Sea f continua sobre S, sea Y un abierto de T, y sea p un punto de $f^{-1}(Y)$. Probaremos que p es interior a $f^{-1}(Y)$. Sea $y = f(p)$. Como que Y es abierto entonces tenemos que $B_T(y;\ \varepsilon)\subseteq Y$ para un cierto $\varepsilon > 0$. Como que f es continua en p, existe un $\delta > 0$ tal que $f(B_S(p;\ \delta))\subseteq B_T(y;\ \varepsilon)$. Por lo tanto,

$$B_S(p;\delta)\subseteq f^{-1}[f(B_S(p;\delta))]\subseteq f^{-1}[B_T(y;\varepsilon)]\subseteq f^{-1}(Y),$$

luego p es un punto interior a $f^{-1}(Y)$.

Recíprocamente, supongamos que $f^{-1}(Y)$ es abierto en S para todo subconjunto abierto Y de T. Elijamos p en S y sea $y = f(p)$. Probaremos que f es continua en p. Para cada valor $\varepsilon > 0$, la bola $B_T(y;\ \varepsilon)$ es abierta en T, luego $f^{-1}(B_T(y;\ \varepsilon))$ es abierto en S. Ahora bien, si $p\in f^{-1}(B_T(y;\ \varepsilon))$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que $B_S(p;\ \delta)\subseteq f^{-1}(B_T(y;\ \varepsilon))$. Por consiguiente, $f(B_S(p;\ \delta))\subseteq B_T(y;\ \varepsilon)$, luego f es continua en p.

Teorema 4.24. *Sea $f\colon S\to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T). Entonces f es continua en S si, y sólo si, para cada conjunto cerrado Y de T, la antiimagen $f^{-1}(Y)$ es cerrada en S.*

Demostración. Si Y es cerrado en T, entonces $T - Y$ es abierto en T y

$$f^{-1}(T - Y) = S - f^{-1}(Y).$$

Aplíquese ahora el teorema 4.23.

Ejemplos. La imagen de un conjunto abierto por medio de una aplicación continua no es necesariamente abierta. Un contraejemplo muy simple es el de las funciones constantes que aplican todo S en un único punto de $\mathbf{R}^1$. Análogamente, la imagen de un conjunto cerrado en una aplicación continua no tiene por qué ser cerrada. Por ejemplo, la función real $f(x) = \operatorname{arctg} x$ aplica $\mathbf{R}^1$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

4.13 FUNCIONES CONTINUAS SOBRE CONJUNTOS COMPACTOS

El teorema que sigue prueba que la imagen de un conjunto compacto en una función continua es un conjunto compacto. Es otra de las propiedades globales de las funciones continuas.

Teorema 4.25. *Sea $f: S \to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T). Si f es continua en un subconjunto compacto X de S, entonces la imagen $f(X)$ es un subconjunto compacto de T; en particular, $f(X)$ es un conjunto cerrado y acotado de T.*

Demostración. Sea F un recubrimiento abierto de $f(X)$, es decir $f(X) \subseteq \bigcup_{A \in F} A$. Probaremos que un número finito de conjuntos A recubre a $f(X)$. Como f es continua sobre el subespacio métrico (X, d_S) podemos aplicar el teorema 4.23 para concluir que cada uno de los conjuntos $f^{-1}(A)$ es abierto en (X, d_S). Los conjuntos $f^{-1}(A)$ forman un recubrimiento abierto de X y, como X es compacto, un número finito de ellos recubre a X; sea $X \subseteq f^{-1}(A_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(A_p)$. Entonces

$$\begin{aligned} f(X) \subseteq f[f^{-1}(A_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_p)] &= f[f^{-1}(A_1)] \cup \cdots \cup f[f^{-1}(A_p)] \\ &\subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_p, \end{aligned}$$

luego $f(X)$ es compacto. Como corolario del teorema 3.38, vemos que $f(X)$ es cerrado y acotado.

Definición 4.26. *Una función $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^k$ está acotada en S si existe un número positivo M tal que $\|\mathbf{f}(x)\| \leq M$ para todo x de S.*

Como $\mathbf{f}$ está acotada en S si y sólo si $\mathbf{f}(S)$ es un subconjunto acotado de $\mathbf{R}^k$, tendremos el siguiente corolario del teorema 4.25.

Teorema 4.27. *Sea $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^k$ una función de un espacio métrico S en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^k$. Si $\mathbf{f}$ es continua en un subconjunto X, compacto en S, entonces $\mathbf{f}$ está acotada en X.*

Este teorema posee importantes implicaciones en el caso de funciones reales. Si f es una función real, acotada sobre X, entonces $f(X)$ es un subconjunto de $\mathbf{R}$, acotado, luego posee supremo, $\sup f(X)$, e ínfimo, $\inf f(X)$. Además,

$$\inf f(X) \leq f(X) \leq \sup f(X) \quad \text{para cada } x \text{ de } X.$$

El próximo teorema prueba que una función continua f alcanza efectivamente los valores $\sup f(X)$ e $\inf f(X)$ si X es compacto.

Teorema 4.28. *Sea $f: S \to \mathbf{R}$ una función real de un espacio métrico S en el espacio euclídeo $\mathbf{R}$. Supongamos que f es continua en un subconjunto X, compacto en S. Entonces existen puntos p y q de X tales que*

$$f(p) = \inf f(X)$$

y

$$f(q) = \sup f(X).$$

NOTA. Como que $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ para todo x de X, los números $f(p)$ y $f(q)$ se llaman, respectivamente, los valores *mínimo* y *máximo* globales o absolutos de f en X.

Demostración. El teorema 4.25 demuestra que $f(X)$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbf{R}$. Sea $m = \inf f(X)$. Entonces m es adherente a $f(X)$ y, por ser $f(X)$ cerrado, $m \in f(X)$. Por lo tanto, $m = f(p)$ para un cierto p de X. Análogamente, $f(q) = \sup f(X)$ para un cierto q de X.

Teorema 4.29. *Sea $f: S \to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T). Supongamos que f es uno a uno sobre S, de modo que la función inversa f^{-1} existe. Si S es compacto y si f es continua en S, entonces f^{-1} es continua en $f(S)$.*

Demostración. Por el teorema 4.23 (aplicado a f^{-1}) bastará probar solamente que para cada conjunto cerrado X de S la imagen $f(X)$ es cerrada en T. (Obsérvese que $f(X)$ es la imagen inversa de X por medio de f^{-1}.) Como X es cerrado y S es compacto, X es compacto (por el teorema 3.39), luego $f(X)$ es compacto (por el teorema 4.25) y por lo tanto $f(X)$ es cerrado (por el teorema 3.38). Esto acaba la demostración.

Ejemplo. Este ejemplo muestra que la compacidad de S es esencial en el teorema 4.29. Sea $S = [0, 1)$ con la métrica usual de $\mathbf{R}^1$ y consideremos la función f con valores complejos definida por

$$f(x) = e^{2\pi i x} \quad \text{para } 0 \leq x < 1.$$

Ésta es una aplicación continua uno a uno del semi-intervalo abierto [0, 1) en el círculo unidad $|z| = 1$ del plano complejo. Sin embargo, f^{-1} no es continua en el punto $f(0)$. Por ejemplo, si $x_n = 1 - 1/n$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge hacia $f(0)$ pero $\{x_n\}$ no converge en S.

4.14 APLICACIONES TOPOLÓGICAS (HOMEOMORFISMOS)

Definición 4.30. *Sea $f: S \to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T). Supongamos también que f es uno a uno en S, de modo que la función inversa f^{-1} existe. Si f es continua sobre S y f^{-1} es continua sobre $f(S)$, entonces diremos que f es una aplicación topológica o un homeomorfismo, y los espacios métricos (S, d_S) y $(f(S), d_T)$ se llaman homeomorfos.*

Si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} también lo es. El teorema 4.23 prueba que un homeomorfismo aplica subconjuntos abiertos de S en subconjuntos abiertos de $f(S)$. Aplica asimismo subconjuntos cerrados de S en subconjuntos cerrados de $f(S)$.

Una propiedad de un conjunto que permanezca invariante frente a las distintas aplicaciones topológicas, se llama una *propiedad topológica.* Así pues, las propiedades de ser abierto, cerrado, compacto son propiedades topológicas.

Un ejemplo importante de homeomorfismo lo constituyen las *isometrías.* Se trata de una aplicación $f: S \to T$ que es uno a uno sobre S y que conserva la métrica; es decir,

$$d_T(f(x), f(y)) = d_S(x, y)$$

para todos los puntos x e y de S. Si existe una isometría de (S, d_S) en $(f(S), d_T)$, los dos espacios métricos se llaman *isométricos.*

Las aplicaciones topológicas son particularmente interesantes en la teoría de curvas. Por ejemplo, un *arco simple* es la imagen topológica de un intervalo, y una *curva cerrada simple* es la imagen topológica de una circunferencia.

4.15 TEOREMA DE BOLZANO

Esta sección está dedicada al famoso teorema de Bolzano que concierne a una propiedad global de las funciones reales continuas en intervalos compactos $[a, b]$ de $\mathbf{R}$. Si la gráfica de f está por encima del eje de las x en a y por debajo del eje de las x en b, el teorema de Bolzano afirma que la gráfica debe

cruzar, por lo menos una vez, a dicho eje entre a y b. Nuestra demostración se basará en una propiedad local de las funciones continuas conocida con el nombre de *propiedad de la conservación del signo.*

Teorema 4.31. *Sea f definida en un intervalo S de $\mathbf{R}$. Supongamos que f es continua en un punto c de S y que $f(c) \neq 0$. Entonces existe una bola unidimensional $B(c; \delta)$ tal que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(c)$ en $B(c; \delta) \cap S$.*

Demostración. Supongamos que $f(c) > 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon \quad \text{siempre que } x \in B(c; \delta) \cap S.$$

Elijamos el δ que corresponde a $\varepsilon = f(c)/2$ (este ε es positivo). Entonces se tiene

$$\tfrac{1}{2} f(c) < f(x) < \tfrac{3}{2} f(c) \quad \text{siempre que } x \in B(c; \delta) \cap S,$$

luego $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(c)$ en $B(c; \delta) \cap S$. La demostración es análoga en el caso $f(c) < 0$, excepto en el hecho de que hay que elegir $\varepsilon = -\frac{1}{2} f(c)$.

Teorema 4.32 (Bolzano). *Sea f real y continua en un intervalo compacto $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, y supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos; esto es, supongamos que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe, por lo menos, un punto c del intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. Por definición, supongamos que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Sea

$$A = \{x: x \in [a, b] \text{ y } f(x) \geq 0\}.$$

A es no vacío, puesto que $a \in A$, y A está acotado por b. Sea $c = \sup A$. Entonces $a < c < b$. Probaremos que $f(c) = 0$.

Si $f(c) \neq 0$, existe una bola unidimensional $B(c; \delta)$ en la que f tiene el mismo signo que $f(c)$. Si $f(c) > 0$, entonces habrá puntos $x > c$ en los que $f(x) > 0$, en contradicción con la definición de c. Si $f(c) < 0$, entonces $c - \delta/2$ es una cota superior para A, contradiciéndose, de nuevo, la definición de c. Por consiguiente debemos tener $f(c) = 0$.

Del teorema de Bolzano se deduce fácilmente el *teorema del valor intermedio* para funciones continuas.

Teorema 4.33. *Supongamos que f es real y continua en un intervalo compacto S de $\mathbf{R}$. Supongamos que existen dos puntos $\alpha < \beta$ de S tales que*

$f(\alpha) \neq f(\beta)$. Entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ en el intervalo (α, β).

Demostración. Sea k un número comprendido entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ y apliquemos el teorema de Bolzano a la función g definida en $[\alpha, \beta]$ por medio de la ecuación $g(x) = f(x) - k$.

El teorema del valor intermedio, juntamente con el teorema 4.29, implican que la imagen cotinua de un intervalo compacto S por medio de una función real es otro intervalo compacto; a saber

$$[\inf f(S), \sup f(S)].$$

(Si f es constante en S, entonces el intervalo sería degenerado.) La sección siguiente extiende esta propiedad a escenarios más amplios de espacios métricos.

4.16 CONEXIÓN

En esta sección se describe el concepto de conexión y su relación con la continuidad.

Definición 4.34. *Un espacio métrico S se dice que es no conexo si $S = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos de S, no vacíos. Diremos que S es conexo si no es no conexo.*

NOTA. Un subconjunto X de un espacio métrico S se llama conexo si, considerado como subespacio métrico de S, es un espacio métrico conexo.

Ejemplos

1. El espacio métrico $S = \mathbf{R} - \{0\}$ con la métrica usual euclídea es no conexo, ya que es unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos, los números positivos y los números reales negativos.
2. Cada intervalo abierto de $\mathbf{R}$ es conexo. Esto se demostró en la sección 3.4 como consecuencia del teorema 3.11.
3. El conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales, considerado como subespacio del espacio euclídeo $\mathbf{R}^1$, es no conexo. En efecto, $\mathbf{Q} = A \cup B$, donde A consta de todos los números racionales $< \sqrt{2}$ y B de todos los números racionales $> \sqrt{2}$. Análogamente, cada bola de $\mathbf{Q}$ es no conexa.
4. Cada espacio métrico S contiene subconjuntos no vacíos conexos. En efecto, para cada p de S el conjunto $\{p\}$ es conexo.

Para relacionar la conexión con la continuidad introduciremos el concepto de función a dos valores.

Definición 4.35. *Una función real f que es continua en un espacio métrico S se llama función a dos valores sobre S si $f(S) \subseteq \{0, 1\}$.*

En otras palabras, una función a dos valores es una función *continua* cuyos únicos valores posibles son 0 y 1. Puede ser considerada como una función continua de S en el espacio métrico $T = \{0, 1\}$, donde T está dotado de la métrica discreta. Recuérdese que cada subconjunto de un espacio métrico discreto T es a la vez abierto y cerrado en T.

Teorema 4.36. *Un espacio métrico S es conexo si, y sólo si, cada una de las funciones a dos valores definidas en S es constante.*

Demostración. Supongamos que S es conexo y sea f una función a dos valores definida sobre S. Queremos probar que f es constante. Sean $A = f^{-1}(\{0\})$ y $B = f^{-1}(\{1\})$ las antiimágenes de los subconjunos $\{0\}$ y $\{1\}$. Como $\{0\}$ y $\{1\}$ son subconjuntos abiertos del espacio métrico discreto $\{0, 1\}$, tanto A como B son abiertos en S. Por lo tanto, $S = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos. Pero, al ser S conexo, o A es vacío y $B = S$, o bien B es vacío y $A = S$. Tanto en un caso como en el otro, f es constante en S.

Recíprocamente, supongamos que S es no conexo, luego $S = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos de S abiertos disjuntos y no vacíos. Presentaremos ahora una función a dos valores definida sobre S que no será constante. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ 1 & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Como que A y B son no vacíos, f toma los valores 0 y 1 y por tanto no es constante. Además, f es continua sobre S ya que la imagen inversa de cada subconjunto abierto de $\{0, 1\}$ es abierto en S.

A continuación demostramos que la imagen continua de un conjunto conexo es conexa.

Teorema 4.37. *Sea $f: S \to M$ una función de un espacio métrico S en otro M. Sea X un subconjunto conexo de S. Si f es continua en X, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de M.*

Demostración. Sea g una función a dos valores definida sobre $f(X)$. Probaremos que g es constante. Consideremos la función compuesta h definida en X por medio de la ecuación $h(x) = g(f(x))$. Entonces h es continua en X y puede tomar solamente los valores 0 y 1, luego h es una función a dos valores en X. Como que X es conexo, h es constante en X y esto implica que g es constante en $f(X)$. Por consiguiente $f(X)$ es conexo.

Ejemplo. Como un intervalo X de $\mathbf{R}^1$ es conexo, cada imagen continua $f(X)$ es conexa. Si f toma valores reales, la imagen $f(X)$ es otro intervalo. Si f toma valores en $\mathbf{R}^n$, la imagen $f(X)$ se llama *curva* de $\mathbf{R}^n$. Entonces, cada curva de $\mathbf{R}^n$ es conexa.

Como corolario al Teorema 4.37, tenemos el teorema siguiente que es una extensión del de Bolzano.

Teorema 4.38 (Teorema del valor intermedio para funciones reales continuas). *Sea f una función real continua definida en un subconjunto conexo S de $\mathbf{R}^n$. Si f alcanza dos valores distintos sobre S, tales como a y b, entonces para cada c comprendido entre a y b existe por lo menos un punto $\mathbf{x}$ de S en el que $f(\mathbf{x}) = c$.*

Demostración. La imagen $f(S)$ es un subconjunto conexo de $\mathbf{R}^1$. Por lo tanto, $f(S)$ es un intervalo que contiene a a y a b (ver ejercicio 4.38). Si algún valor c comprendido entre a y b no estuviese en $f(S)$, entonces $f(S)$ no sería conexo.

4.17 COMPONENTES DE UN ESPACIO MÉTRICO

Esta sección demuestra que todo espacio métrico S puede expresarse de forma única como reunión de «trozos» conexos, llamados componentes. Ante todo demostraremos el siguiente.

Teorema 4.39. *Sea F una colección de subconjuntos conexos de un espacio métrico S tal que la intersección $T = \bigcap_{A\in F} A$ es no vacía. Entonces, la reunión $U = \bigcup_{A\in F} A$ es conexa.*

Demostración. Como $T \neq \emptyset$, existe un t de T. Sea f una función a dos valores definida sobre U. Probaremos que f es constante en U probando que $f(x) = f(t)$ para todo x de U. Si $x \in U$, entonces $x \in A$ para un cierto A de F. Como A es conexo, f es constante sobre A y, como $t \in A$, $f(x) = f(t)$.

Todo punto x de un espacio métrico S pertenece, por lo menos, a un subconjunto conexo de S, a saber $\{x\}$. Por el teorema 4.39, la reunión de todos los subconjuntos conexos que contienen a x es también conexo. A esta reunión la llamaremos *componente* de S, y la designaremos por $U(x)$. Así, $U(x)$ es el subconjunto de S conexo maximal que contiene a x.

Teorema 4.40. *Todo punto de un espacio métrico S pertenece a una única y determinada componente de S. En otras palabras, las componentes de S forman una colección de conjuntos disjuntos cuya reunión es S.*

Demostración. Dos componentes distintas no pueden tener ningún punto x en común; en otro caso (por el teorema 4.39) su reunión sería un conjunto conexo más grande que contendría a x.

4.18 CONEXIÓN POR ARCOS

En esta sección se describe una propiedad especial, llamada *conexión por arcos,* que poseen algunos (pero no todos) los conjuntos conexos de un espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$.

Definición 4.41. *Un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ se llama arco-conexo si, para cada par de puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de S, existe una función $\mathbf{f}: [0, 1] \to S$ tal que*

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{a} \quad y \quad \mathbf{f}(1) = \mathbf{b}.$$

NOTA. Una tal función se llama un *camino* de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Si $\mathbf{f}(0) \neq \mathbf{f}(1)$, la imagen de $[0, 1]$ por medio de $\mathbf{f}$ se denomina *arco,* que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{b}$. Entonces, S es arco-conexo si cada dos puntos distintos de S pueden unirse por medio de un arco contenido en S. Los conjuntos arco-conexos se llaman también *conexos por caminos.* Si $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{b} + (1 - t)\mathbf{a}$ para $0 \leq t \leq 1$, la curva que une $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se llama *segmento rectilíneo.*

Ejemplos

1. Cada conjunto convexo de $\mathbf{R}^n$ es arco-conexo, ya que el segmento rectilíneo que une dos puntos del conjunto está en el conjunto. En particular, las bolas n-dimensionales abiertas y las cerradas son arco conexas.
2. El conjunto de la figura 4.4 (reunión de dos discos cerrados tangentes) es arco conexo.

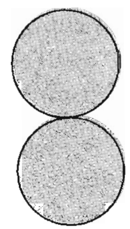


Figura 4.4

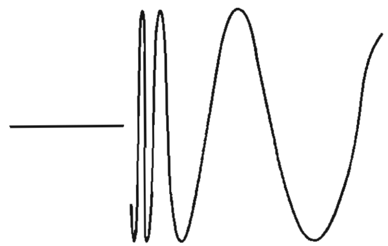


Figura 4.5

3. El conjunto de la figura 4.5 consiste en todos los puntos de la curva descrita por $y = \text{sen}\,(1/x)$, $0 < x \leq 1$, y los del segmento horizontal $-1 \leq x \leq 0$. Este conjunto es conexo pero no arco conexo (ejercicio 4.46).

El teorema que sigue relaciona la conexión por arcos con la conexión.

Teorema 4.42. *Todo conjunto S de $\mathbf{R}^n$ arco-conexo es conexo.*

Demostración. Sea g una función a dos valores definida sobre S. Probaremos que g es constante sobre S. Elijamos un punto $\mathbf{a}$ de S. Si $\mathbf{x} \in S$, unamos $\mathbf{a}$ con $\mathbf{x}$ por medio de un arco Γ contenido en S. Como que Γ es conexo, g es constante sobre Γ luego $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{a})$. Pero, al ser $\mathbf{x}$ un punto arbitrario de S, queda demostrado que g es constante sobre S, y que S es conexo.

Hemos visto anteriormente que hay conjuntos conexos que no son arco conexos. Sin embargo, ambos conceptos son equivalentes en el caso de conjuntos *abiertos.*

Teorema 4.43. *Un conjunto abierto conexo de $\mathbf{R}^n$ es arco-conexo.*

Demostración. Sea S un conjunto abierto y conexo de $\mathbf{R}^n$ y supongamos que $\mathbf{x} \in S$. Probaremos que $\mathbf{x}$ puede unirse con cualquier otro punto $\mathbf{y}$ de S por medio de un arco contenido en S. Designemos por A el subconjunto de S formado por los puntos que pueden unirse con $\mathbf{x}$, y sea $B = S - A$. Entonces $S = A \cup B$, donde A y B son disjuntos. Ahora demostraremos que tanto A como B son abiertos en $\mathbf{R}^n$.

Sea $\mathbf{a} \in A$ y unamos $\mathbf{a}$ con $\mathbf{x}$ por medio de un arco Γ contenido en S. Como que $\mathbf{a} \in S$ y S es abierto, existe una bola n-dimensional $B(\mathbf{a}) \subseteq S$. Cada $\mathbf{y}$ de $B(\mathbf{a})$ puede unirse con $\mathbf{a}$ por medio de un segmento rectilíneo (contenido en S) y por lo tanto con $\mathbf{x}$ por medio de Γ. Así pues, si $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a})$, entonces $\mathbf{y} \in A$. Esto implica que $B(\mathbf{a}) \subseteq A$, y por lo tanto A es abierto.

Para ver que B también es abierto, supongamos que $\mathbf{b} \in B$. Entonces existe una bola n-dimensional $B(\mathbf{b}) \subseteq S$, ya que S es abierto. Ahora bien, si un punto $\mathbf{y}$ de $B(\mathbf{b})$ pudiese unirse con $\mathbf{x}$ por medio de un arco Γ', contenido en S, el punto $\mathbf{b}$ también podría unirse con $\mathbf{x}$, uniendo primeramente $\mathbf{b}$ con $\mathbf{y}$ (por medio de un segmento rectilíneo contenido en $B(\mathbf{b})$) y utilizando después Γ'. Pero como $\mathbf{b} \notin A$, ningún punto de $B(\mathbf{b})$ deberá pertenecer a A. Así, $B(\mathbf{b}) \subseteq B$, luego B es abierto.

Hemos obtenido, por lo tanto, una descomposición $S = A \cup B$, donde A y B son conjuntos de $\mathbf{R}^n$ abiertos y disjuntos. Pero, A es no vacío ya que $\mathbf{x} \in A$. Como que S es conexo, B deberá ser vacío, con lo cual $S = A$. Ahora bien, es evidente que A es arco-conexo ya que cualquier par de puntos de A pueden unirse por medio de un arco conveniente, uniendo primeramente cada uno de ellos con $\mathbf{x}$. Por consiguiente, S es arco-conexo y la demostración está terminada.

NOTA. Un camino $\mathbf{f}: [0, 1] \to S$ se llama *poligonal* si la imagen de $[0, 1]$ por medio de $\mathbf{f}$ es la reunión de un número finito de segmentos rectilíneos. El mismo argumento utilizado para demostrar el teorema 4.43 prueba además que cada conjunto conexo de $\mathbf{R}^n$ es *conexo por poligonales*; es decir, cada par de puntos del conjunto puede unirse con un arco poligonal contenido en el conjunto.

Teorema 4.44. *Todo conjunto abierto S de $\mathbf{R}^n$ puede expresarse de forma única como reunión de una familia disjunta numerable de conjuntos conexos y abiertos.*

Demostración. Por el teorema 4.40, las componentes de S constituyen una colección de conjuntos disjuntos cuya reunión es S. Cada componente T de S es abierta, puesto que si $\mathbf{x} \in T$ existe una bola n-dimensional $B(\mathbf{x})$ contenida en S. Como $B(\mathbf{x})$ es conexo, $B(\mathbf{x}) \subseteq T$, luego T es abierto. Por el teorema de Lindelöf (teorema 3.28), las componentes de S constituyen una colección numerable, y por el teorema 4.40 la descomposición en componentes es única.

Definición 4.45. *Un conjunto de $\mathbf{R}^n$ se llama región si es la reunión de un conjunto conexo abierto con alguno, ninguno, o todos sus puntos frontera. Si ninguno de sus puntos frontera está incluido en la región, se dice que ésta es una región abierta. Si todos los puntos frontera están incluidos, se dice que la región es una región cerrada.*

NOTA. Algunos autores utilizan la palabra *dominio* en vez de *región abierta*, especialmente en el plano complejo.

4.19 CONTINUIDAD UNIFORME

Supongamos que f está definida en un cierto espacio métrico (S, d_S) y tiene sus valores en otro espacio métrico (T, d_T), y supongamos que f es continua en un subconjunto A de S. Entonces, dado un punto p de A y un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ (que depende de p y de ε) tal que, si $x \in A$, entonces

$$d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon \qquad \text{siempre que } d_S(x, p) < \delta.$$

En general no se debe esperar que, fijado ε, el mismo valor de δ sirva para *cada* punto p de A. Sin embargo, puede ocurrir. Cuando ocurre, se dice que la función es *uniformemente continua* en A.

Definición 4.46. *Sea $f: S \to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro espacio métrico (T, d_T). Entonces se dice que f es uniformemente continua en un subconjunto A de S si verifica la siguiente condición:*

Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que depende exclusivamente de ε) tal que si $x \in A$ y $p \in A$ entonces

$$d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon \qquad \textit{siempre que } d_S(x, p) < \delta. \tag{6}$$

A fin de insistir en la diferencia entre *continuidad* sobre A y *continuidad uniforme* sobre A consideraremos los siguientes ejemplos de funciones reales.

Ejemplos

1. Sea $f(x) = 1/x$ para $x > 0$ y consideremos $A = (0, 1]$. Esta función es continua en A pero no es uniformemente continua en A. Para demostrarlo, sea $\varepsilon = 10$, y supongamos que encontrásemos un δ, $0 < \delta < 1$, que satisficiese la condición de la definición. Haciendo $x = \delta$, $p = \delta/11$, tendríamos $|x - p| < \delta$ y
$$|f(x) - f(p)| = \frac{11}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{10}{\delta} > 10.$$
Luego para esos dos puntos tendríamos siempre $|f(x) - f(p)| > 10$, en contra de la definición de continuidad uniforme.
2. Sea $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbf{R}^1$ y tomemos $A = (0, 1]$ como antes. La función es uniformemente continua sobre A. Para demostrarlo, observemos que
$$|f(x) - f(p)| = |x^2 - p^2| = |(x - p)(x + p)| < 2|x - p|.$$
Si $|x - p| < \delta$, entonces $|f(x) - f(p)| < 2\delta$. Luego, si ε está dado, basta tomar $\delta = \varepsilon/2$ para garantizar que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ para cada par x, p con $|x - p| < \delta$. Esto prueba que f es uniformemente continua sobre A.

Un ejercicio instructivo consiste en demostrar que la función del ejemplo 2 no es uniformemente continua sobre $\mathbf{R}^1$.

4.20 CONTINUIDAD UNIFORME Y CONJUNTOS COMPACTOS

La continuidad uniforme en un conjunto A implica la continuidad en A. (El lector puede comprobarlo.) El recíproco también es cierto si A es compacto.

Teorema 4.47 (Heine). *Sea $f: S \to T$ una función definida entre dos espacios métricos (S, d_S) y (T, d_T). Sea A un subconjunto compacto de S y supongamos que f es continua en A. Entonces f es uniformemente continua en A.*

Demostración. Dado que $\varepsilon > 0$, a cada punto a de A se le puede asociar una bola $B_S(a; r)$, con r dependiendo de a, tal que

$$d_T(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{siempre que } x \in B_S(a; r) \cap A.$$

Consideremos la colección de las bolas $B_S(a; r/2)$ de radio $r/2$. Recubren a A y, como A es compacto, basta un número finito de ellas para recubrir a A, o sea

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_S\left(a_k; \frac{r_k}{2}\right).$$

En cualquiera de las bolas de doble radio, $B_S(a_k; r_k)$ se tiene

$$d_T(f(x), f(a_k)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{siempre que } x \in B_S(a_k; r_k) \cap A.$$

Sea δ el menor de los números $r_1/2, \ldots, r_m/2$. Probaremos que este δ satisface la definición de continuidad uniforme.

En efecto, consideremos dos puntos de A, por ejemplo x y p, con $d_S(x, p) < \delta$. En virtud de la anterior discusión existirá una bola $B_S(a_k; r_k/2)$ que contenga a x, luego

$$d_T(f(x), f(a_k)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por la desigualdad triangular tenemos que

$$d_S(p, a_k) \leq d_S(p, x) + d_S(x, a_k) < \delta + \frac{r_k}{2} \leq \frac{r_k}{2} + \frac{r_k}{2} = r_k.$$

Por lo tanto, $p \in B_S(a_k; r_k) \cap S$, y entonces tenemos también que

$$d_T(f(p), f(a_k)) < \varepsilon/2.$$

Utilizando, una vez más, la desigualdad triangular obtenemos

$$d_T(f(x), f(p)) \leq d_T(f(x), f(a_k)) + d_T(f(a_k), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto termina la demostración.

4.21 TEOREMA DEL PUNTO FIJO PARA CONTRACCIONES

Sea $f: S \to S$ una función de un espacio métrico (S, d) en sí mismo. Un punto p de S es un *punto fijo* de f si $f(p) = p$. La función f se denomina *contracción* de S si existe un número positivo $\alpha < 1$ (llamado *constante de contracción* o *coeficiente de contracción*), tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y) \qquad \text{para todo } x, y \text{ de } S. \tag{7}$$

Es evidente que una contracción de un espacio métrico es uniformemente continua.

Teorema 4.48 (Teorema del punto fijo). *Una contracción f de un espacio métrico completo S tiene un único punto fijo p.*

Demostración. Si p y p' son dos puntos fijos, (7) implica $d(p, p') \leq \alpha\, d(p, p')$, luego $d(p, p') = 0$ y $p = p'$. Luego f posee, a lo sumo, un punto fijo.

Para probar que existe uno, elijamos un punto x de S y consideremos la sucesión de iteraciones:

$$x, \quad f(x), \quad f(f(x)), \quad \ldots$$

Es decir, se define recurrentemente la sucesión $\{p_n\}$ por medio de:

$$p_0 = x, \qquad p_{n+1} = f(p_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Probaremos que $\{p_n\}$ converge hacia un punto fijo de f. Ante todo demostraremos que $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy. De (7) obtenemos

$$d(p_{n+1}, p_n) = d(f(p_n), f(p_{n-1})) \leq \alpha d(p_n, p_{n-1}),$$

y, entonces, por inducción, resulta que

$$d(p_{n+1}, p_n) \leq \alpha^n d(p_1, p_0) = c\alpha^n,$$

donde $c = d(p_1, p_0)$. Utilizando la desigualdad triangular hallaremos, para $m > n$,

$$d(p_m, p_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(p_{k+1}, p_k) \leq c \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k = c\frac{\alpha^n - \alpha^m}{1 - \alpha} < \frac{c}{1 - \alpha}\,\alpha^n.$$

Como $\alpha^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, dicha desigualdad triangular prueba que $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Pero como S es completo, existe un punto p de S tal que $p_n \to p$. Por la continuidad de f,

$$f(p) = f\left(\lim_{n\to\infty} p_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(p_n) = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = p,$$

luego p es un punto fijo de f. Esto acaba la demostración.

Muchos teoremas importantes de existencia del Análisis son consecuencias fáciles del teorema del punto fijo. Damos ejemplos en los ejercicios 7.36 y 7.37. La referencia 4.4 lo aplica al Análisis numérico.

4.22 DISCONTINUIDADES DE LAS FUNCIONES REALES

El resto de este capítulo lo dedicaremos a estudiar propiedades especiales de funciones reales definidas en subintervalos de **R**.

Sea f una función real definida sobre un intervalo (a, b). Supongamos que $c \in [a, b)$. Si $f(x) \to A$ cuando $x \to c$ con valores mayores que c, diremos que A es el *límite lateral por la derecha* de f en c y lo indicaremos, escribiendo

$$\lim_{x\to c+} f(x) = A.$$

El límite lateral por la derecha se designa también por medio de $f(c+)$. En la terminología ε, δ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(c+)| < \varepsilon \qquad \text{siempre que } c < x < c + \delta < b.$$

Nótese que f no necesita estar definida en el punto c. Si f está definida en c y es $f(c+) = f(c)$, diremos que f es *continua por la derecha* en c.

Los límites laterales por la izquierda y la continuidad por la izquierda en c se definen análogamente si $c \in (a, b]$.

Si $a < c < b$, entonces f es continua en c si, y sólo si,

$$f(c) = f(c+) = f(c-).$$

Diremos que c es una *discontinuidad* de f, si f no es continua en c. En este caso deberá darse alguna de las siguientes condiciones:

a) O no existe $f(c+)$ o no existe $f(c-)$.
b) Tanto $f(c+)$ como $f(c-)$ existen pero son distintos.
c) Tanto $f(c+)$ como $f(c-)$ existen y $f(c+) = f(c-) \neq f(c)$.

En el caso (c) se dice que el punto c es una *discontinuidad evitable*, ya que la discontinuidad podría evitarse volviendo a definir f en c de suerte que el valor de f en c fuese $f(c+) = f(c-)$. En los casos (a) y (b), se dice que c es una *discontinuidad inevitable* dado que la discontinuidad no puede evitarse aunque volvamos a definir f en c.

Definición 4.49. *Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Si $f(c+)$ y $f(c-)$ existen en un punto interior c, entonces:*

a) *$f(c) - f(c-)$ se llama el salto de f a la izquierda de c,*
b) *$f(c+) - f(c)$ se llama el salto de f a la derecha de c,*
c) *$f(c+) - f(c-)$ se llama el salto de f en c.*

Si alguno de ellos es distinto de 0, entonces se dice que f tiene una discontinuidad de salto en c.

En los puntos extremos a y b, sólo consideraremos uno de los saltos laterales, el salto a la derecha en a, $f(a+)-f(a)$, y el salto a la izquierda en b, $f(b)-f(b-)$.

Ejemplos

1. La función f definida por $f(x)=x/|x|$ si $x\neq 0$, $f(0)=A$, tiene una discontinuidad de salto en 0, independiente del valor de A. Aquí $f(0+)=+1$ y $f(0-)=-1$. (Ver fig. 4.6.)
2. La función f definida por $f(x)=1$ si $x\neq 0$, $f(0)=0$, posee un salto de discontinuidad evitable en 0. En este caso $f(0+)=f(0-)=1$.

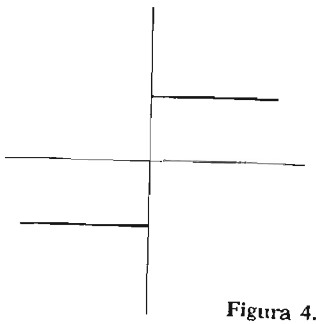


Figura 4.6

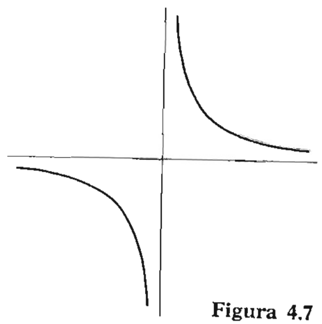


Figura 4.7

3. La función f definida por $f(x)=1/x$ si $x\neq 0$, $f(0)=A$, tiene un punto de discontinuidad inevitable en 0. En este caso $f(0+)$ y $f(0-)$ no existen. (Ver fig. 4.7.)
4. La función f definida por $f(x)=\text{sen}\,(1/x)$ si $x\neq 0$, $f(0)=A$, posee una discontinuidad inevitable en 0 ya que $f(0+)$ y $f(0-)$ no existen. (Ver fig. 4.8.)
5. La función f definida por $f(x)=x\,\text{sen}\,(1/x)$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$, tiene un punto de discontinuidad evitable en 0, ya que $f(0+)=f(0-)=0$. (Ver fig. 4.9.)

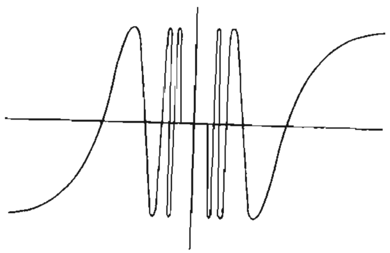


Figura 4.8

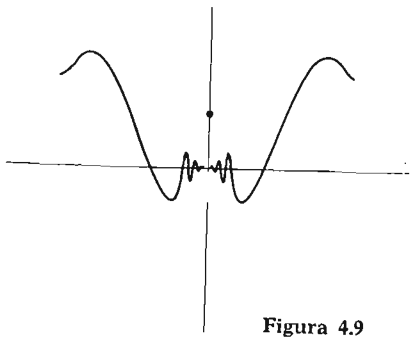


Figura 4.9

4.23 FUNCIONES MONÓTONAS

Definición 4.50. *Sea f una función real definida en un subconjunto S de* **R**. *Entonces f es creciente (o no decreciente) en S si para todo par de x e y de S,*

$$x<y \quad \textit{implica} \quad f(x)\leq f(y).$$

Si $x<y$ implica $f(x)<f(y)$, entonces f se llama estrictamente creciente sobre S. (Las funciones decrecientes se definen análogamente.) Una función se llama monótona en S si es creciente o decreciente en S.

Si f es una función creciente, entonces $-f$ es una función decreciente. Gracias a este resultado tan simple, resulta que en muchas de las situaciones que involucren funciones monótonas bastará considerar sólo el caso de las funciones crecientes.

Probaremos que las funciones monótonas en intervalos compactos poseen siempre límite lateral por la derecha y límite lateral por la izquierda. Por lo tanto sus discontinuidades (si tiene) deben ser discontinuidades de salto.

Teorema 4.51. *Si f es creciente en $[a, b]$, entonces $f(c+)$ y $f(c-)$ existen las dos para cada c de (a, b) y se tiene*

$$f(c-)\leq f(c)\leq f(c+).$$

En los puntos extremos se tiene $f(a)\leq f(a+)$ y $f(b-)\leq f(b)$.

Demostración. Sea $A=\{f(x)\colon a<x<c\}$. Como f es creciente, este conjunto está acotado superiormente por $f(c)$. Sea $\alpha=\sup A$. Entonces $\alpha\leq f(c)$ y probaremos que $f(c-)$ existe y es igual a α.

Para ello probaremos primero que para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que

$$c-\delta<x<c \quad \text{implica} \quad |f(x)-\alpha|<\varepsilon.$$

Pero como $\alpha=\sup A$, existe un elemento $f(x_1)$ de A tal que $\alpha-\varepsilon<f(x_1)\leq\alpha$. Como f es creciente, para cada x de (x_1, c) tenemos también que $\alpha-\varepsilon<f(x)\leq\leq\alpha$, y por lo tanto $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$. Por consiguiente, el número $\delta=c-x_1$ tiene la propiedad requerida. (La demostración de que $f(c+)$ existe y es $\geq f(c)$ es análoga y sólo algunas modificaciones triviales son necesarias en el caso de los puntos extremos.)

Existe, además, un teorema análogo para funciones decrecientes que el lector puede formular por sí mismo.

Teorema 4.52. *Sea f estrictamente creciente en un conjunto S de* **R**. *Entonces f^{-1} existe y es estrictamente creciente en $f(S)$.*

Demostración. Como f es estrictamente creciente, es uno a uno en S, luego f^{-1} existe. Para ver que f^{-1} es estrictamente creciente, sean $y_1 < y_2$ dos puntos de $f(S)$ y sea $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. No puede ser que $x_1 \geq x_2$, ya que entonces tendríamos también que $y_1 \geq y_2$. La única alternativa es $x_1 < x_2$, y esto significa que f^{-1} es estrictamente creciente.

El teorema 4.52 junto con el teorema 4.29 conducen a:

Teorema 4.53. *Sea f estrictamente creciente y continua en un intervalo compacto $[a, b]$. Entonces f^{-1} es continua y estrictamente creciente en el intervalo $[f(a), f(b)]$.*

NOTA. El teorema 4.53 nos dice que una función continua, estrictamente creciente es una aplicación topológica. Recíprocamente, toda aplicación topológica de un intervalo $[a, b]$ sobre un intervalo $[c, d]$ debe ser una función estrictamente monótona. La verificación de este hecho constituye un ejercicio muy instructivo para el lector. (Ejercicio 4.62.)

EJERCICIOS

Límites de sucesiones

4.1 Probar cada una de las afirmaciones siguientes acerca de sucesiones de **C**.

a) $z^n \to 0$ si $|z| < 1$; $\{z^n\}$ diverge si $|z| > 1$.

b) Si $z_n \to 0$ y si $\{c_n\}$ está acotada, entonces $\{c_n z_n\} \to 0$.

c) $z^n/n! \to 0$ para cada complejo z.

d) Si $a_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$, entonces $a_n \to 0$.

4.2 Si $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$ para todo $n \geq 1$, expresar a_n en función de a_1 y a_2, y demostrar que $a_n \to (a_1 + 2a_2)/3$. *Observación:* $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})$.

4.3 Si $0 < x_1 < 1$ y si $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ para todo $n \geq 1$, probar que $\{x_n\}$ es una sucesión decreciente con límite 0. Probar además que $x_{n+1}/x_n \to \frac{1}{2}$.

4.4 Dos sucesiones de enteros positivos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se definen recursivamente haciendo $a_1 = b_1 = 1$ e igualando las partes racionales e irracionales de la ecuación

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2})^2 \quad \text{para } n \geq 2.$$

Probar que $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ para $n \geq 2$. Deducir que $a_n/b_n \to \sqrt{2}$ por medio de valores $> \sqrt{2}$, y que $2b_n/a_n \to \sqrt{2}$ por medio de valores $< \sqrt{2}$.

4.5 Una sucesión real $\{x_n\}$ satisface $7x_{n+1} = x_n^3 + 6$ para $n \geq 1$. Si $x_1 = \frac{1}{2}$, probar que la sucesión crece y hallar su límite. ¿Qué ocurre si $x_1 = \frac{3}{2}$ o si $x_1 = \frac{5}{2}$?

4.6 Si $|a_n| < 2$ y $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{8}|a_{n+1}^2 - a_n^2|$ para todo $n \geq 1$, probar que $\{a_n\}$ converge.

4.7 En un espacio métrico (S, d) suponemos que $x_n \to x$ y que $y_n \to y$. Probar que $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

4.8 Probar que en un espacio métrico compacto (S, d), cada sucesión de S admite una subsucesión convergente en S. Esta propiedad implica también que S es compacto, pero no se pide una demostración de este resultado. (Una demostración puede encontrarse en las referencias 4.2 o 4.3.)

4.9 Sea A un subconjunto de un espacio métrico S. Si A es completo, probar que A es cerrado. Probar que el recíproco también es cierto siempre que S sea completo.

Límites de funciones

NOTA. En los ejercicios 4.10 a 4.28 todas las funciones serán reales.

4.10 Sea f definida en un intervalo abierto (a, b) y supongamos que $x \in (a, b)$. Consideremos las dos afirmaciones siguientes:

a) $\lim_{h \to 0} |f(x + h) - f(x)| = 0$; b) $\lim_{h \to 0} |f(x + h) - f(x - h)| = 0$.

Probar que (a) siempre implica (b), y dar un ejemplo en el que (b) se verifique pero (a) no.

4.11 Sea f definida en $\mathbf{R}^2$. Si

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L$$

y si existen los dos límites unidimensionales $\lim_{x \to a} f(x, y)$ y $\lim_{y \to b} f(x, y)$, probar que

$$\lim_{x \to a} [\lim_{y \to b} f(x, y)] = \lim_{y \to b} [\lim_{x \to a} f(x, y)] = L.$$

Consideremos ahora las funciones f definidas en $\mathbf{R}^2$ como sigue:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

b) $f(x, y) = \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x - y)^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen}(xy)$ si $x \neq 0$, $f(0, y) = y$.

d) $f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \operatorname{sen}(1/x) \operatorname{sen}(1/y) & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0. \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} & \text{si } \operatorname{tg} x \neq \operatorname{tg} y, \\ \cos^3 x & \text{si } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$

En cada uno de los ejercicios anteriores, determinar cuándo existen los límites que se proponen y calcular los que existan:

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)]\,; \qquad \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)]\,; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

4.12 Si $x \in [0, 1]$ probar que el siguiente límite existe,

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\,\pi x)\right],$$

y que su valor es 0 o 1, según que x sea irracional o racional.

Continuidad de funciones reales

4.13 Sea f continua en $[a, b]$ y sea $f(x) = 0$ si x es racional. Probar que $f(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$.

4.14 Sea f continua en el punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbf{R}^n$. Conservemos $a_2, a_3, \ldots, a_n$ fijos y definamos una nueva función g de una sola variable real definida por la ecuación

$$g(x) = f(x, a_2, \ldots, a_n).$$

Probar que g es continua en el punto $x = a_1$. (Este resultado suele expresarse diciendo que *una función continua de n variables es continua en cada una de ellas separadamente.*)

4.15 Probar por medio de un ejemplo que el recíproco de la proposición establecida en el ejercicio 4.14 no es verdadero en general.

4.16 Sean f, g y h definidas en $[0, 1]$ como sigue:

$f(x) = g(x) = h(x) = 0$, siempre que x sea irracional;
$f(x) = 1$ y $g(x) = x$, siempre que x sea racional;
$h(x) = 1/n$, si x es el racional m/n (irreducible);
$h(0) = 1$.

Probar que f no es continua en ningún punto de $[0, 1]$, que g es continua sólo en $x = 0$, y que h sólo es continua en los puntos irracionales de $[0, 1]$.

4.17 Para cada x de $[0, 1]$, sea $f(x) = x$ si x es racional, y sea $f(x) = 1 - x$ si x es irracional. Probar que:

a) $f(f(x)) = x$ para todo x de $[0, 1]$.
b) $f(x) + f(1 - x) = 1$ para todo x de $[0, 1]$.
c) f es continua sólo en el punto $x = \frac{1}{2}$.
d) f toma todos los valores comprendidos entre 0 y 1.
e) $f(x+y) - f(x) - f(y)$ es racional para todos los x e y de $[0, 1]$.

4.18 Sea f definida en $\mathbf{R}$ y supongamos que existe por lo menos un punto x_0 de $\mathbf{R}$ en el que f es continua. Supongamos también que, para cada x e y de $\mathbf{R}$, f satisface la ecuación

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Probar que existe una constante a tal que $f(x) = ax$ para todo x.

4.19 Sea f continua en $[a, b]$ y definamos g como sigue: $g(a) = f(a)$ y, para $a < x \leq b$, $g(x)$ es el máximo de los valores de f del intervalo $[a, x]$. Probar que g es continua en $[a, b]$.

4.20 Sean $f_1, \ldots, f_m$ m funciones reales definidas en un conjunto S de $\mathbf{R}^n$. Supongamos que cada f_k es continua en el punto $\mathbf{a}$ de S. Definir una nueva función f como sigue: Para cada $\mathbf{x}$ de S, $f(\mathbf{x})$ es el mayor de los m valores $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})$. Discutir la continuidad de f en $\mathbf{a}$.

4.21 Sea $f: S \to \mathbf{R}$ continua en un conjunto abierto S de $\mathbf{R}^n$, supongamos que $\mathbf{p} \in S$ y que $f(\mathbf{p}) > 0$. Probar que existe una bola n-dimensional $B(\mathbf{p}; r)$ tal que $f(\mathbf{x}) > 0$ para cada $\mathbf{x}$ de la bola.

4.22 Sea f definida y continua en un conjunto cerrado S de $\mathbf{R}$. Sea

$$A = \{x : x \in S \ \text{ y } \ f(x) = 0\}.$$

Probar que A es un subconjunto cerrado de $\mathbf{R}$.

4.23 Dada una función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definimos dos conjuntos A y B en $\mathbf{R}^2$ como sigue:

$$A = \{(x, y) : y < f(x)\}, \qquad B = \{(x, y) : y > f(x)\}.$$

Probar que f es continua en $\mathbf{R}$ si, y sólo si, tanto A como B son subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^2$.

4.24 Sea f definida y acotada en un intervalo compacto S de $\mathbf{R}$. Si $T \subseteq S$, el número

$$\Omega_f(T) = \sup\{f(x) - f(y) : x \in T, y \in T\}$$

se llama *oscilación* de f en T. Si $x \in S$, la oscilación de f en x se define como el número

$$\omega_f(x) = \lim_{h\to 0+} \Omega_f(B(x; h) \cap S).$$

Probar que este límite existe siempre y que $\omega_f(x) = 0$ si, y sólo si, f es continua en x.

4.25 Sea f continua en un intervalo compacto $[a, b]$. Supongamos que f tiene un máximo local en x_1 y un máximo local en x_2. Probar que debe existir un tercer punto entre x_1 y x_2 en el que f posea un mínimo local.

NOTA. Decir que f posee un máximo local en x_1 significa que existe una bola unidimensional $B(x_1)$ tal que $f(x) \leq f(x_1)$ para todo x de $B(x_1) \cap [a, b]$. Los mínimos locales se definen análogamente.

4.26 Sea f una función real, continua en $[0, 1]$, con la siguiente propiedad: para cada número real y, o no existe ningún x de $[0, 1]$ para el cual $f(x) = y$ o bien existe uno exactamente. Probar que f es estrictamente monótona en $[0, 1]$.

4.27 Sea f una función definida en $[0, 1]$ con la siguiente propiedad: Para cada número real y, o no existe ningún x en $[0, 1]$ que verifique $f(x) = y$, o bien existen exactamente dos valores de x en $[0, 1]$ para los cuales $f(x) = y$.

a) Probar que f no puede ser continua en $[0, 1]$.
b) Construir una función f que tenga esta propiedad.
c) Probar que una función con esta propiedad debe tener una infinidad de discontinuidades en $[0, 1]$.

4.28 En cada caso, dar un ejemplo de una función f, continua sobre S de modo que $f(S) = T$, o explicar por medio de un ejemplo por qué no puede existir tal f:

a) $S = (0, 1)$, $T = (0, 1]$.
b) $S = (0, 1)$, $T = (0, 1) \cup (1, 2)$.
c) $S = \mathbf{R}^1$, $T =$ el conjunto de los números racionales.
d) $S = [0, 1] \cup [2, 3]$, $T = \{0, 1\}$.
e) $S = [0, 1] \times [0, 1]$, $T = \mathbf{R}^2$.
f) $S = [0, 1] \times [0, 1]$, $T = (0, 1) \times (0, 1)$.
g) $S = (0, 1) \times (0, 1)$, $T = \mathbf{R}^2$.

Continuidad en espacios métricos

En los ejercicios que van del 4.29 al 4.32, suponemos que $f: S \to T$ es una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T).

4.29 Probar que f es continua en S si, y sólo si,

$$f^{-1}(\operatorname{int} B) \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(B) \quad \text{para todo subconjunto } B \text{ de } T.$$

4.30 Probar que f es continua en S si, y sólo si,

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad \text{para cada subconjunto } A \text{ de } S.$$

4.31 Probar que f es continua en S si, y sólo si, f es continua sobre cada subconjunto compacto de S. *Indicación.* Si $x_n \to p$ en S, el conjunto $\{p, x_1, x_2, \ldots\}$ es compacto.

4.32 Una función $f: S \to T$ se denomina *aplicación cerrada* en S si la imagen $f(A)$, de cada uno de los cerrados A de S, es cerrada en T. Probar que f es continua y cerrada si, y sólo si, $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ para cada subconjunto A de S.

4.33 Dar un ejemplo de una función continua f y de una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ de S para los que $\{f(x_n)\}$ no sea de Cauchy en T.

4.34 Probar que el intervalo $(-1, 1)$ de $\mathbf{R}^1$ es homeomorfo a $\mathbf{R}^1$. Ello demuestra que ni la completitud ni la acotación son propiedades topológicas.

4.35 La sección 9.7 contiene un ejemplo de una función f, continua en $[0, 1]$, con $f([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$. Probar que dicha f no puede ser uno a uno sobre $[0, 1]$.

Conexión

4.36 Probar que un espacio métrico S es no conexo si, y sólo si, no existe ningún subconjunto A de S, $A \neq S$, que sea a la vez abierto y cerrado en S.

4.37 Probar que un espacio métrico S es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de S que son a la vez abiertos y cerrados en S son el vacío y el propio S.

4.38 Probar que los únicos subconjuntos conexos de $\mathbf{R}$ son (a) el conjunto vacío, (b) los conjuntos formados por un solo punto, y (c) los intervalos (abiertos, cerrados, semiabiertos, o infinitos).

4.39 Sea X un subconjunto conexo de un espacio métrico S. Sea Y un subconjunto de S tal que $X \subseteq Y \subseteq \bar{X}$, donde $\bar{X}$ es la clausura de X. Probar que Y también es conexo. En particular, esto prueba que $\bar{X}$ es conexo.

4.40 Si x es un punto de un espacio métrico S, sea $U(x)$ la componente de S que contiene a x. Probar que $U(x)$ es cerrado en S.

4.41 Sea S un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$. Por el teorema 3.11, S es la reunión de una colección numerable y disjunta de intervalos abiertos de $\mathbf{R}$. Probar que cada uno de estos intervalos abiertos es una componente del subespacio métrico S. Explicar por qué esto no contradice al ejercicio 4.40.

4.42 Se da un conjunto compacto S de $\mathbf{R}^m$ con la siguiente propiedad: Para cada par de puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de S y para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto formado por un número finito de puntos $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ en S con $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ y $\mathbf{x}_n = \mathbf{b}$ tal que

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| < \varepsilon \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Probar o refutar: S es conexo.

4.43 Probar que un espacio métrico S es conexo si, y sólo si, cada subconjunto no vacío de S tiene una frontera no vacía.

4.44 Probar que cada subconjunto convexo de $\mathbf{R}^n$ es conexo.

4.45 Se da una función $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ que sea continua en $\mathbf{R}^n$ y uno a uno. Si A es abierto y no conexo de $\mathbf{R}^n$, probar que $\mathbf{f}(A)$ es un abierto no conexo de $\mathbf{f}(\mathbf{R}^n)$.

4.46 Sea $A = \{(x, y): 0 < x \leq 1,\ y = \operatorname{sen} 1/x\}$, $B = \{(x, y): y = 0,\ -1 \leq x \leq 0\}$ y sea $S = A \cup B$. Probar que S es conexo pero no arco-conexo. (Ver la figura 4.5, sección 4.18.)

4.47 Sea $F = \{F_1, F_2, \ldots\}$ una colección numerable de conjuntos conexos y compactos de $\mathbf{R}^n$ tales que $F_{k+1} \subseteq F_k$ para cada $k \geq 1$. Probar que la intersección $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ es conexa y cerrada.

4.48 Sea S un conjunto conexo y abierto de $\mathbf{R}^n$. Sea T una componente de $\mathbf{R}^n - S$. Probar que $\mathbf{R}^n - T$ es conexo.

4.49 Sea (S, d) un espacio métrico conexo no acotado. Probar que para cada a de S y cada $r > 0$, el conjunto $\{x: d(x, a) = r\}$ es no vacío.

Continuidad uniforme

4.50 Probar que una función que es uniformemente continua en un conjunto S es también continua en S.

4.51 Si $f(x) = x^2$ para cada x de $\mathbf{R}$, probar que f no es uniformemente continua en $\mathbf{R}$.

4.52 Supongamos que f es uniformemente continua sobre un conjunto acotado S de $\mathbf{R}^n$. Probar que f debe estar acotada en S.

4.53 Sea $\mathbf{f}$ una función definida en un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ y supongamos que $\mathbf{f}(S) \subseteq \mathbf{R}^m$. Sea $\mathbf{g}$ definida en $\mathbf{f}(S)$ con valores en $\mathbf{R}^k$, y sea $\mathbf{h}$ la función compuesta definida por $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]$ si $\mathbf{x} \in S$. Si $\mathbf{f}$ es uniformemente continua en S y $\mathbf{g}$ es uniformemente continua en $\mathbf{f}(S)$, probar que $\mathbf{h}$ es uniformemente continua en S.

4.54 Supongamos que $f: S \to T$ es uniformemente continua en S, donde S y T son espacios métricos. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en S, probar que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en T. (Comparar con el ejercicio 4.33.)

4.55 Sea $f: S \to T$ función de un espacio métrico S en otro espacio métrico T. Supongamos que f es uniformemente continua en un subconjunto A de S y que T es completo. Probar que existe una única extensión de f a $\bar{A}$ uniformemente continua en $\bar{A}$.

4.56 En un espacio métrico (S, d), sea A un subconjunto no vacío de S. Definimos una función $f_A : S \to \mathbf{R}^+$ por medio de la ecuación

$$f_A(x) = \inf \{d(x, y) : y \in A\}$$

para cada x de S. El número $f_A(x)$ se llama la distancia de x a A.

a) Probar que f_A es uniformemente continua sobre S.
b) Probar que $\bar{A} = \{x : x \in S \text{ y } f_A(x) = 0\}$.

4.57 En un espacio métrico (S, d), sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de S. Probar que existen subconjuntos U y V de S abiertos disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. *Indicación.* Sea $g(x) = f_A(x) - f_B(x)$, siguiendo la notación del ejercicio 4.56, y consideremos $g^{-1}(-\infty, 0)$ y $g^{-1}(0, +\infty)$.

Discontinuidades

4.58 Localizar y clasificar las discontinuidades de las funciones f definidas en $\mathbf{R}^1$ mediante las siguientes ecuaciones:

a) $f(x) = (\text{sen } x)/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
b) $f(x) = e^{1/x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
c) $f(x) = e^{1/x}$
c) $f(x) = e^{1/x} + \text{sen } (1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
d) $f(x) = 1/(1 - e^{1/x})$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

4.59 Localizar los puntos de $\mathbf{R}^2$ en los que cada una de las funciones del ejercicio 4.11 no es continua.

Funciones monótonas

4.60 Sea f definida en un intervalo abierto (a, b) y supongamos que para cada punto interior x de (a, b) existe una bola unidimensional $B(x)$ en la que f es creciente. Probar que f es una función creciente en todo (a, b).

4.61 Sea f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que f carece de máximos y mínimos locales en el interior del intervalo. (Ver la NOTA que sigue al ejercicio 4.25.) Probar que f debe ser monótona en $[a, b]$.

4.62 Si f es uno a uno y continua en $[a, b]$, probar que f ha de ser estrictamente monótona en $[a, b]$. Esto es, probar que cada aplicación topológica de $[a, b]$ sobre un intervalo $[c, d]$ debe ser estrictamente monótona.

4.63 Sea f una función creciente definida en $[a, b]$ y sean $x_1, \ldots, x_n$ n puntos interiores tales que $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$.

a) Probar que $\sum_{k=1}^{n} [f(x_k+) - f(x_k-)] \leq f(b-) - f(a+)$.
b) Deducir de la parte (a) que el conjunto de las discontinuidades de f es numerable.

c) Probar que f posee puntos de continuidad en cada uno de los subintervalos abiertos de $[a, b]$.

4.64 Dar un ejemplo de una función f, definida y estrictamente creciente en un conjunto S de $\mathbf{R}$ tal que f^{-1} no sea continua en $f(S)$.

4.65 Sea f estrictamente creciente en un subconjunto S de $\mathbf{R}$. Supongamos que la imagen $f(S)$ verifica una de las propiedades siguientes: (a) $f(S)$ es abierto; (b) $f(S)$ es conexo; (c) $f(S)$ es cerrado. Probar que f debe ser continua en S.

Espacios métricos y puntos fijos

4.66 Sea $B(S)$ el conjunto de todas las funciones reales definidas y *acotadas* en un conjunto S, no vacío. Si $f \in B(S)$, sea

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

El número $\|f\|$ se llama la «norma sup» de f.

a) Probar que la fórmula $d(f, g) = \|f - g\|$ define una métrica d en $B(S)$.
b) Probar que el espacio métrico $(B(S), d)$ es completo. *Indicación.* Si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $B(S)$, probar que $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy de números reales para cada x de S.

4.67 Con referencia al ejercicio 4.66 consideremos el subconjunto de $B(S)$ de todas las funciones *continuas* y acotadas en S, que designaremos $C(S)$, en donde S designa ahora un espacio métrico.

a) Probar que $C(S)$ es un subconjunto cerrado de $B(S)$.
b) Probar que el subespacio métrico $C(S)$ es completo.

4.68 Recurrir a la demostración del teorema del punto fijo (teorema 4.48) para las cuestiones de notación.

a) Probar que $d(p, p_n) \leq d(x, f(x))\alpha^n/(1 - \alpha)$.
Esta desigualdad, útil en trabajos numéricos, proporciona una aproximación de la distancia existente entre p_n y el punto fijo p. Se da un ejemplo en (b).
b) Tomar $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2/x)$, $S = [1, +\infty]$. Probar que f es una contracción de S cuya constante de contracción es $\alpha = \frac{1}{2}$ y cuyo punto fijo es $p = \sqrt{2}$. Formar la sucesión $\{p_n\}$ empezando por $x = p_0 = 1$ y probar que $|p_n - \sqrt{2}| \leq 2^{-n}$.

4.69 Probar, utilizando contraejemplos, que el teorema del punto fijo no tiene por qué verificarse si (a), el espacio métrico subyacente no es completo, o bien si (b), la constante de contracción $\alpha \geq 1$.

4.70 Sea $f: S \to S$ una función de un espacio métrico completo (S, d) en sí mismo. Supongamos que existe una sucesión real $\{\alpha_n\}$ convergente hacia 0 tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha_n d(x, y)$ para todo $n \geq 1$ y todo x, y de S, donde f^n es la n-ésima iteración de f, es decir,

$$f^1(x) = f(x),\ f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \text{ para } n \geq 1.$$

Probar que f tiene un punto fijo. *Indicación.* Aplíquese el teorema del punto fijo a f^m para un m conveniente.

4.71 Sea $f: S \to S$ una función de un espacio métrico (S, d) en sí mismo tal que

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

siempre que $x \neq y$.

a) Probar que f posee a lo sumo un punto fijo, y dar un ejemplo de una función f de este tipo sin puntos fijos.

b) Si S es compacto, probar que f admite un punto fijo exactamente. *Indicación.* Probar que $g(x) = d(x, f(x))$ alcanza un mínimo en S.

c) Dar un ejemplo en el que, siendo S compacto, f no sea una contracción.

4.72 Supongamos que f satisface la condición del ejercicio 4.71. Si $x \in S$, sea $p_0 = x$, $p_{n+1} = f(p_n)$, y $c_n = d(p_n, p_{n+1})$ para $n \geq 0$.

a) Probar que $\{c_n\}$ es una sucesión decreciente, y sea $c = \lim c_n$.

b) Supongamos que existe una subsucesión $\{p_{k(n)}\}$ convergente hacia un cierto punto q de S. Probar que

$$c = d(q, f(q)) = d(f(q), f[f(q)]).$$

Deducir que q es un punto fijo de f y que $p_n \to q$.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

4.1 Boas, R. P., *A Primer of Real Functions.* Carus Monograph No. 13. Wiley, New York, 1960.

4.2 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis.* Addison-Wesley, Reading, 1966.

4.3 Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1963.

4.4 Todd, J., *Survey of Numerical Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1962.

CAPÍTULO 5

Derivadas

5.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo trata de la derivada, concepto fundamental del Cálculo diferencial. Dos tipos distintos de problemas —el problema físico, que consiste en buscar la velocidad instantánea de una partícula móvil, y el problema geométrico, que consiste en buscar la recta tangente a una curva en un punto dado—, ambos conducen de forma muy natural a la noción de derivada. No nos interesaremos ni por las aplicaciones físicas ni por las aplicaciones geométricas; dedicaremos nuestra atención a las propiedades generales de las derivadas.

Este capítulo tratará, ante todo, de las derivadas de funciones de una variable real y, especialmente, de funciones reales definidas en intervalos de **R**. Estudiará también brevemente las derivadas de funciones de valores vectoriales de una variable real, y las derivadas parciales, ya que estos temas no envuelven ideas nuevas. Mucho de lo que se expone será familiar al lector, pues se trata de Cálculo elemental. Un tratamiento más detallado de la teoría de la derivación para funciones de varias variables involucra cambios realmente importantes y por ello se desarrollará en el capítulo 12.

La última parte de este capítulo trata de las derivadas de funciones complejas de una variable compleja.

5.2 DEFINICIÓN DE DERIVADA

Si f está definida sobre un intervalo abierto (a, b), entonces para cada dos puntos distintos x y c de (a, b) podemos considerar el cociente de diferencias (*)

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Mantenemos c fijo y estudiamos el comportamiento de este cociente cuando $x \to c$.

* Este cociente se conoce con el nombre de cociente incremental. (N. de t.)

Definición 5.1. *Sea f una función real definida en un intervalo abierto (a, b), y supongamos que $c \in (a, b)$. Diremos que f es diferenciable en c siempre que el límite*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

exista. El límite, designado por $f'(c)$, se llama derivada de f en c.

Este método de calcular límites define una nueva función f', cuyo dominio está formado por aquellos puntos de (a, b) en los que f es diferenciable. La función f' se llama la *primera derivada* de f. Análogamente, la n-ésima derivada de f, designada por $f^{(n)}$, es la primera derivada de $f^{(n-1)}$, para $n = 2, 3, \ldots$ (según nuestra definición, sólo es posible considerar $f^{(n)}$ si $f^{(n-1)}$ está definida en un cierto intervalo abierto). Otras notaciones con las que el lector puede estar familiarizado son

$$f'(c) = Df(c) = \frac{df}{dx}(c) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} \qquad [\text{donde } y = f(x)],$$

o notaciones similares. La función f se escribe, a veces, $f^{(0)}$. El proceso que produce f' a partir de f se llama *diferenciación.*

5.3 DERIVADAS Y CONTINUIDAD

El teorema que se da a continuación permite reducir algunos de los teoremas de derivadas a teoremas de continuidad.

Teorema 5.2. *Si f está definida en un intervalo (a, b) y es diferenciable en un punto c de (a, b), entonces existe una función f^* (que depende de f y de c) continua en c y que satisface la ecuación*

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x), \tag{1}$$

para todo x de (a, b), con $f^*(c) = f'(c)$. Recíprocamente, si existe una función f^*, continua en c, que satisfaga (1), entonces f es diferenciable en c y $f'(c) = f^*(c)$.

Demostración. Si $f'(c)$ existe, sea f^* definida en (a, b) como sigue:

$$f^*(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{si } x \neq c, \quad f^*(c) = f'(c).$$

Entonces f^* es continua en c y (1) se verifica para todo x de (a, b).

Recíprocamente, si (1) se verifica para una cierta función f^* continua en c, entonces dividiendo por $x - c$ y haciendo $x \to c$ vemos que $f'(c)$ existe y es igual a $f^*(c)$.

Como consecuencia inmediata de (1) se obtiene:

Teorema 5.3. *Si f es diferenciable en c, entonces f es continua en c.*

Demostración. En (1) hagamos $x \to c$.

NOTA. La ecuación (1) tiene una interpretación geométrica que ayuda a adquirir una intuición de su significado. Como que f^* es continua en c, $f^*(x)$ es aproximadamente igual a $f^*(c) = f'(c)$ si x es próximo a c. Reemplazando $f^*(x)$ por $f'(c)$ en (1) obtenemos la ecuación

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c),$$

que será aproximadamente correcta cuando $x - c$ sea pequeño. En otras palabras, si f es diferenciable en c, entonces f es aproximadamente una función lineal en las proximidades de c. (Ver Fig. 5.1.) El Cálculo diferencial explota, continuamente, esta propiedad geométrica de las funciones.

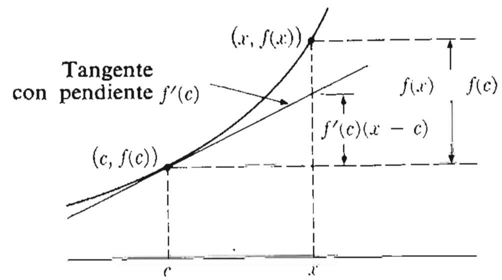


Figura 5.1

5.4 ÁLGEBRA DE DERIVADAS

El siguiente teorema describe las fórmulas usuales para diferenciar la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos funciones.

Teorema 5.4. *Supongamos que f y g están definidas en (a, b) y son diferenciables en c. Entonces $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son también diferenciables en c. Esto es asimismo verdadero para f/g si $g(c) \neq 0$. Las derivadas en c están dadas por las fórmulas siguientes:*

a) $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$,

b) $(f \cdot g)'(c) = f(c)g'(c) + f'(c)g(c)$,

c) $(f/g)'(c) = \dfrac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$, *en el supuesto de que* $g(c) \neq 0$.

Demostración. Probaremos (b). Utilizando el teorema 5.2, escribiremos

$$f(x) = f(c) + (x - c)f^*(x), \qquad g(x) = g(c) + (x - c)g^*(x).$$

Entonces

$$f(x)g(x) - f(c)g(c) = (x - c)[f(c)g^*(x) + f^*(x)g(c)] + (x - c)^2 f^*(x)g^*(x).$$

Dividiendo por $x - c$ y haciendo que $x \to c$ obtendremos (b). Las demostraciones de las otras afirmaciones son análogas.

De la definición se sigue inmediatamente que si f es constante en (a, b), entonces $f' = 0$ en (a, b). También, si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$ para todo x. Aplicando repetidamente el teorema 5.4 obtenemos que si $f(x) = x^n$ (n entero positivo), entonces $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo x. Aplicando, de nuevo, el teorema 5.4 vemos que todo polinomio admite derivada en todo $\mathbf{R}$ y que cada función racional admite derivada en los puntos en los que está definida.

5.5 LA REGLA DE LA CADENA

Un resultado más profundo lo constituye la llamada *regla de la cadena* para la diferenciación de funciones compuestas.

Teorema 5.5 (Regla de la cadena). *Sea f definida en un intervalo abierto S y sea g definida en $f(S)$, y consideremos la función compuesta $g \circ f$ definida en S por medio de la ecuación*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Supongamos que exista un punto c de S tal que $f(c)$ sea un punto interior de $f(S)$. Si f es diferenciable en c y g es diferenciable en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en c y se tiene que

$$(g \circ f)'(c) = g'[f(c)]f'(c).$$

Demostración. Utilizando el teorema 5.2 podemos escribir

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x) \qquad \text{para todo } x \text{ de } S,$$

donde f^* es continua en c y $f^*(c) = f'(c)$. Análogamente,

$$g(y) - g[f(c)] = [y - f(c)]g^*(y),$$

para todo y de un cierto subintervalo abierto T de $f(S)$ que contenga a $f(c)$. Aquí g^* es continua en $f(c)$ y $g^*(f(c)) = g'[f(c)]$.

Elijamos x de S tal que $y = f(x) \in T$; tenemos entonces

$$g[f(x)] - g[f(c)] = [f(x) - f(c)]g^*[f(x)] = (x - c)f^*(x)g^*[f(x)]. \qquad (2)$$

En virtud del teorema de continuidad de las funciones compuestas,

$$g^*[f(x)] \to g^*[f(c)] = g'[f(c)] \quad \text{cuando } x \to c.$$

Por lo tanto, si dividimos (2) por $x - c$ y hacemos que $x \to c$, obtenemos

$$\lim_{x \to c} \frac{g[f(x)] - g[f(c)]}{x - c} = g'[f(c)]f'(c),$$

como pretendíamos.

5.6 DERIVADAS LATERALES Y DERIVADAS INFINITAS

Hasta ahora, la afirmación de que f tenía derivada en c significaba que c era *interior* a un cierto intervalo en el que f estaba definida y que el límite que definía $f'(c)$ era *finito*. Es conveniente extender el campo de nuestras ideas con vistas a la discusión de las derivadas en los extremos de los intervalos. Es asimismo deseable introducir las derivadas *infinitas*, de forma que la interpretación geométrica de una derivada como la pendiente de la recta tangente sea válida aun en el caso en el que la tangente sea vertical. En tal caso no es posible demostrar que f es continua en c. Sin embargo, exigiremos explícitamente que lo sea.

Definición 5.6. *Sea f una función definida en un intervalo cerrado S y supongamos que f es continua en el punto c de S. Entonces f admite derivada lateral por la derecha de c si el límite lateral por la derecha*

$$\lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existe y es finito, o si es $+\infty$ o $-\infty$. Este límite lo designaremos por $f'_+(c)$. Las derivadas laterales por la izquierda, designadas por $f'_-(c)$, se definen

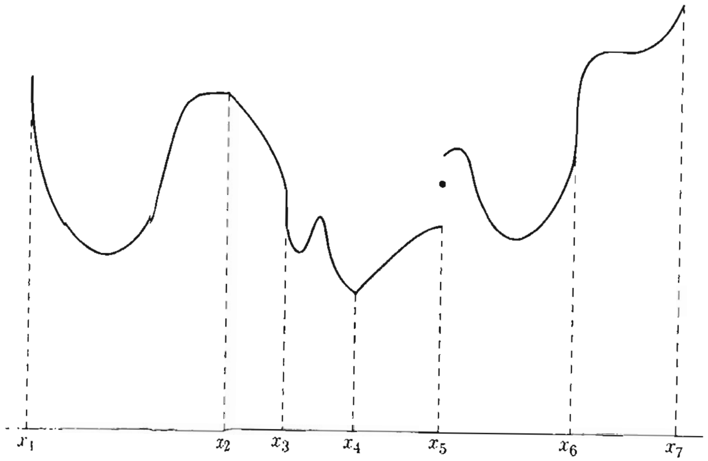


Figura 5.2

análogamente. Además, si c es un punto interior de S, entonces diremos que f posee derivada $f'(c) = +\infty$ si ambas derivadas laterales en c valen $+\infty$. (La derivada $f'(c) = -\infty$ se define análogamente.)

Es claro que f posee una derivada (finita o infinita) en un punto interior c si, y sólo si, $f'_+(c) = f'_-(c)$, en cuyo caso $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$.

La figura 5.2 ilustra algunos de estos conceptos. En el punto x_1 tenemos que $f'_+(x_1) = -\infty$. En el punto x_2 la derivada lateral por la izquierda es 0 y la derivada lateral por la derecha vale -1. Además, $f'(x_3) = -\infty$, $f'_-(x_4) = -1$, $f'_+(x_4) = +1$, $f'(x_6) = +\infty$, y $f'_-(x_7) = 2$. No existe derivada (ni por un lado ni por el otro) en x_5, ya que f no es continua en dicho punto.

5.7 FUNCIONES CON DERIVADA NO NULA

Teorema 5.7. *Sea f definida en un intervalo abierto (a, b) y supongamos que para cada c de (a, b) tenemos $f'(c) > 0$ o $f'(c) = +\infty$. Entonces existe una bola unidimensional $B(c) \subseteq (a, b)$ en la que*

$$f(x) > f(c) \quad \text{si } x > c, \qquad \text{y} \qquad f(x) < f(c) \quad \text{si } x < c.$$

Demostración. Si $f'(c)$ es finito y positivo podemos escribir

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x),$$

donde f^* es continua en c y $f^*(c) = f'(c) > 0$. Por la propiedad de la conservación del signo de las funciones continuas existe una bola unidimensional

$B(c) \subseteq (a, b)$ en la que $f^*(x)$ tiene el mismo signo que $f^*(c)$, y esto significa que $f(x) - f(c)$ tiene el mismo signo que $x - c$.

Si $f'(c) = +\infty$, existe una bola unidimensional $B(c)$ en la que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 1 \qquad \text{cuando } x \neq c.$$

En esta bola el cociente es, de nuevo, positivo y la conclusión sigue como antes.

Un resultado análogo al del teorema 5.7 es válido, naturalmente, si $f'(c) < 0$ o si $f'(c) = -\infty$ en algún punto interior c de (a, b).

5.8 DERIVADAS CERO Y EXTREMOS LOCALES

Definición 5.8. *Sea f una función real definida en un subconjunto S de un espacio métrico M, y supongamos que $a \in S$. Entonces f posee un máximo local en a si existe una bola B(a) tal que*

$$f(x) \leq f(a) \qquad \textit{para todo } x \textit{ de } B(a) \cap S.$$

Si $f(x) \geq f(a)$ para todo x de $B(a) \cap S$, entonces f posee un mínimo local en a.

NOTA. Un máximo local en a es el máximo absoluto de f en el subconjunto $B(a) \cap S$. Si f tiene un máximo absoluto en a, entonces a es un máximo local. Sin embargo, f puede poseer máximos locales en varios puntos de S sin que posea máximo absoluto en el conjunto S.

El teorema que sigue establece una relación entre las derivadas nulas y los extremos locales (máximos o mínimos) en puntos interiores.

Teorema 5.9. *Sea f definida en un intervalo abierto (a, b) y supongamos que f posee un máximo local o un mínimo local en un cierto punto interior c de (a, b). Si f posee derivada (finita o infinita) en c, entonces f'(c) debe ser cero.*

Demostración. Si $f'(c)$ es positiva o $+\infty$, entonces f no puede tener un extremo local en c, en virtud del teorema 5.7. Análogamente, $f'(c)$ no puede ser negativa ni $-\infty$. Luego, dado que existe derivada en c, la única posibilidad que queda es $f'(c) = 0$.

El recíproco del teorema 5.9 es falso. En general, el saber que $f'(c) = 0$ no basta para deducir que f tiene un extremo en c. De hecho, es posible que carezca de ellos, como puede verificarse por medio del ejemplo $f(x) = x^3$ y $c = 0$. En este caso, $f'(0) = 0$ pero f es creciente en todo entorno de 0.

Además, conviene insistir en el hecho de que f puede tener un extremo local en c sin que $f'(c)$ sea cero. Por ejemplo, $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$ pero, naturalmente, no existe la derivada en 0. El teorema 5.9 presupone que f tiene derivada (finita o infinita) en c. El teorema presupone también que c es un punto interor de (a, b). En el ejemplo $f(x) = x$, donde $a \leq x \leq b$, f alcanza su máximo y su mínimo en los puntos extremos pero en cambio $f'(x)$ no es nunca cero en $[a, b]$.

5.9 TEOREMA DE ROLLE

Es geométricamente evidente que una curva suficientemente «regular» que corta al eje ox en los puntos extremos del intervalo $[a, b]$ debe poseer un «punto de viraje» en algún punto comprendido entre a y b. El enunciado preciso de este resultado se conoce con el nombre de teorema de Rolle.

Teorema 5.10 (Rolle). *Supongamos que f posee derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos de un intervalo abierto (a, b), y supongamos también que f es continua en los puntos extremos a y b. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto interior c, por lo menos, en el que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f' no es cero en ningún punto de (a, b) y llegaremos a una contradicción. Como que f es continua en un conjunto compacto, alcanza su máximo M y su mínimo m en algún punto de $[a, b]$. Ninguno de dichos valores extremos puede ser alcanzado en un punto interior (pues en ese caso f' se anularía); por lo tanto la función los alcanza en los extremos del intervalo. Como $f(a) = f(b)$, entonces $m = M$, y por lo tanto f es constante en $[a, b]$. Esto contradice el supuesto de que f' no es cero en ningún punto de (a, b). Luego $f'(c) = 0$ para algún c de (a, b).

5.10 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS

Teorema 5.11 (Teorema del valor medio). *Sea f una función con derivada (finita o infinta) en cada uno de los puntos de un intervalo abierto (a, b), y supongamos además que f es continua en los extremos a y b. Entonces existe un punto c de (a, b) tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Geométricamente, este teorema establece que una curva suficientemente regular que una dos puntos A y B posee una tangente con la misma pendiente que la cuerda AB. El teorema 5.11 lo deduciremos de un teorema más general que se refiere a dos funciones f y g que juegan un papel simétrico.

Teorema 5.12 (Teorema del valor medio generalizado). *Sean f y g dos funciones continuas que poseen derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos del intervalo abierto (a, b) y cada una es continua en los puntos extremos a y b y, además, no existe ningún punto x del interior del intervalo en el que $f'(x)$ y $g'(x)$ sean ambas infinitas. Entonces para algún punto c interior se tiene*

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

NOTA. Cuando $g(x) = x$, se obtiene el teorema 5.11.

Demostración. Sea $h(x) = f(x) \cdot [g(b) - g(a)] - g(x) \cdot [f(b) - f(a)]$. Entonces $h'(x)$ es finito si $f'(x)$ y $g'(x)$ son ambas finitas, y $h'(x)$ es infinito si una de las derivadas $f'(x)$ o $g'(x)$ es infinita. (La hipótesis excluye el caso de que *ambas* sean infinitas.) Además, h es continua en los exremos a y b, y $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Por el teorema de Rolle existe un punto interior c en el que $h'(c) = 0$, lo que demuestra la proposición.

NOTA. El lector podrá interpretar el teorema 5.12 geométricamente, refiriéndolo a la curva del plano coordenado xy cuyas ecuaciones paramétricas son $x = g(t)$, $y = f(t)$, $a \leq t \leq b$.

Existe una extensión de este teorema que no requiere la hipótesis de continuidad en los extremos.

Teorema 5.13. *Sean f y g dos funciones, cada una de ellas con derivada (finita o infinita) en cada punto de (a, b). Supongamos también que en los extremos a y b existen los límites $f(a+)$, $g(a+)$, $f(b-)$, $g(b-)$ y son finitos. Supongamos además que no existe ningún punto x de (a, b) en el que las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ sean ambas infinitas. Entonces para algún punto interior c tenemos*

$$f'(c)[g(b-) - g(a+)] = g'(c)[f(b-) - f(a+)].$$

Demostración. Definamos dos nuevas funciones F y G en $[a, b]$ como sigue:

$$F(x) = f(x) \quad \text{y} \quad G(x) = g(x) \quad \text{si } x \in (a, b);$$

$$F(a) = f(a+), \quad G(a) = g(a+), \quad F(b) = f(b-), \quad G(b) = g(b-).$$

Entonces F y G son continuas en $[a, b]$ y podemos aplicar el teorema 5.12 a F y G a fin de obtener la conclusión deseada.

El resultado que sigue es una consecuencia inmediata del teorema del valor medio.

Teorema 5.14. *Suponemos que f posee una derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos del intervalo (a, b) y que f es continua en los extremos a y b.*

a) *Si f' toma sólo valores positivos (finitos o infinitos) en (a, b), entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$.*
b) *Si f' toma sólo valores negativos (finitos o infinitos) en (a, b), entonces f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.*
c) *Si f' es cero en todo (a, b), entonces f es constante en $[a, b]$.*

Demostración. Elijamos $x < y$ y apliquemos el teorema del valor medio al subintervalo $[x, y]$ de $[a, b]$. Obtendremos

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \qquad \text{donde } c \in (x, y).$$

Todas las afirmaciones del teorema siguiente se deducen inmediatamente de esta ecuación.

Aplicando el teorema 5.14(c) a la diferencia $f - g$ se obtiene:

Corolario 5.15. *Si f y g son continuas en $[a, b]$ y tienen derivadas finitas iguales en (a, b), entonces $f - g$ es constante en $[a, b]$.*

5.11 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA LAS DERIVADAS

En el teorema 4.33 se ha demostrado que una función f continua en un intervalo compacto $[a, b]$ alcanza todos los valores comprendidos entre su máximo y su mínimo en el intervalo. En particular, f alcanza cada uno de los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Un resultado análogo es válido para las funciones que se obtienen como derivadas de otras.

Teorema 5.16 (teorema del valor intermedio para derivadas). *Supongamos que f está definida en un intervalo compacto $[a, b]$ y que posee derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos interiores. Supongamos, además, que f posee derivadas laterales finitas $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ en los puntos extremos, con $f'_+(a) \neq f'_-(b)$. Entonces, si c es un número real comprendido entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$, existe por lo menos un punto interior x tal que $f'(x) = c$.*

Demostración. Definamos una nueva función g como sigue:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{si } x \neq a, \quad g(a) = f'_+(a).$$

Entonces g es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Por el teorema del valor intermedio de las funciones continuas, g alcanza cada uno de los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ en el interior de (a, b). Por el teorema del valor medio, tenemos que $g(x) = f'(c)$ para algún c de (a, x), en donde $x \in (a, b)$. Por lo tanto, f' toma todos los valores entre $f'_+(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ en el interior (a, b). Un argumento análogo aplicado a la función h, definida por

$$h(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \qquad \text{si } x \neq b, \quad h(b) = f'_-(b),$$

prueba que f' alcanza todos los valores comprendidos entre $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ y $f'_-(b)$ en el interior (a, b). Combinando estos resultados, vemos que f' alcanza cada uno de los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ en el interior (a, b), lo cual termina la demostración.

NOTA. El teorema 5.16 es asimismo válido si una o ambas derivadas laterales $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ es infinita. La demostración en este caso se obtiene considerando la función auxiliar g definida por medio de la ecuación $g(x) = f(x) - cx$, si $x \in [a, b]$. Los detalles se dejan al lector.

El teorema del valor intermedio demuestra que una derivada no puede cambiar de signo en un intervalo si no toma el valor cero. Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema, que es más fuerte que el 5.14(a) y (b).

Teorema 5.17. *Sea f con derivada (finita o infinita) en (a, b) y continua en los extremos a y b. Si $f'(x) \neq 0$ para todo x de (a, b), entonces f es estrictamente monótona en a, b.*

El teorema del valor intermedio prueba también que las derivadas monótonas son necesariamente continuas.

Teorema 5.18. *Supongamos que f' existe y es monótona en un intervalo abierto (a, b). Entonces f' es continua en (a, b).*

Demostración. Supongamos que f' tuviese una discontinuidad en algún punto c de (a, b); llegaremos entonces a una contradicción. Elijamos un subintervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ de (a, b) que contenga a c en su interior. Como que f' es monótona en $[\alpha, \beta]$, la discontinuidad en c debe ser una discontinuidad de salto (por el teorema 4.51). Por lo tanto f' omitiría alguno de los valores comprendidos entre $f'(\alpha)$ y $f'(\beta)$, en contradicción con el teorema del valor intermedio.

5.12 FÓRMULA DE TAYLOR CON RESTO

Como hemos observado anteriormente, si f es diferenciable en c, entonces f es aproximadamente una función lineal en las proximidades de c. Esto es, la ecuación

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c),$$

es aproximadamente correcta cuando $x - c$ es pequeño. El teorema de Taylor nos dice que, en general, f puede aproximarse por medio de un polinomio de grado $n - 1$ si f posee derivadas hasta el orden n. Además, el teorema de Taylor proporciona una expresión útil para calcular el error cometido en esta aproximación.

Teorema 5.19 (Taylor). *Sea f una función que admita derivada n-ésima $f^{(n)}$ finita en todo el intervalo abierto (a, b) y supongamos que $f^{(n-1)}$ es continua en el intrevalo cerrado $[a, b]$. Supongamos que $c \in [a, b]$. Entonces, para todo x de $[a, b]$, $x \neq c$, existe un punto x_1 interior al intervalo, que une x con c tal que*

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - c)^n.$$

El teorema de Taylor se obtiene como consecuencia de un resultado más general que, a su vez, es una extensión directa del teorema del valor medio generalizado.

Teorema 5.20. *Sean f y g dos funciones que posean derivadas n-ésimas $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ finitas en un intervalo abierto (a, b) y derivadas $(n - 1)$ continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Supongamos que $c \in [a, b]$. Entonces, para todo x de $[a, b]$, $x \neq c$, existe un punto x_1 interior al intervalo, que une x con c tal que*

$$\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k\right] g^{(n)}(x_1) = f^{(n)}(x_1)\left[g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k\right].$$

NOTA. Para el caso especial en que $g(x) = (x - c)^n$, tendremos $g^{(k)}(c) = 0$ para $0 \leq k \leq n - 1$ y $g^{(n)}(x) = n!$. Este teorema se reduce entonces al teorema de Taylor.

Demostración. Para simplificar, supongamos $c < b$ y $x > c$. Mantengamos x fijo y definamos dos nuevas funciones F y G como sigue:

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k,$$

$$G(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k,$$

para cada t de $[c, x]$. Entonces F y G son continuas en el intervalo cerrado $[c, x]$ y tienen derivadas finitas en el intervalo abierto (c, x). Por lo tanto, el teorema 5.12 se puede aplicar y podemos escribir

$$F'(x_1)[G(x) - G(c)] = G'(x_1)[F(x) - F(c)], \quad \text{donde } x_1 \in (c, x).$$

Esto conduce a la ecuación

$$F'(x_1)[g(x) - G(c)] = G'(x_1)[f(x) - F(c)], \tag{a}$$

ya que $G(x) = g(x)$ y $F(x) = f(x)$. Si, ahora, calculamos la derivada de la suma que define $F(t)$, teniendo en cuenta que cada uno de los términos de la suma es un producto, encontramos que todos los términos se destruyen salvo uno, y se obtiene

$$F'(t) = \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(t).$$

Análogamente, obtenemos

$$G'(t) = \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} g^{(n)}(t).$$

Si hacemos $t = x_1$ y substituimos en (a), obtenemos la fórmula de este teorema.

5.13 DERIVADAS DE FUNCIONES VECTORIALES

Sea $\mathbf{f}: (a, b) \to \mathbf{R}^n$ una función vectorial definida en un intervalo abierto (a, b) de $\mathbf{R}$. Entonces $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, donde cada componente f_k es una función real definida en (a, b). Diremos que $\mathbf{f}$ es diferenciable en un punto c de (a, b) si cada una de las componentes f_k es diferenciable en c y definimos

$$\mathbf{f}'(c) = (f_1'(c), \ldots, f_n'(c)).$$

En otras palabras, la derivada $\mathbf{f}'(c)$ se obtiene diferenciando cada una de las componentes de $\mathbf{f}$ en c. A la vista de esta definición no es sorprendente que nos preguntemos cuáles de los teoremas de diferenciación son válidos para funciones vectoriales. Por ejemplo, si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones vectoriales diferenciables en c y si λ es una función real diferenciable en c, entonces la suma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, el producto $\lambda\mathbf{f}$, y el producto escalar $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ son diferenciables en c y se tiene

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(c) = \mathbf{f}'(c) + \mathbf{g}'(c),$$
$$(\lambda\mathbf{f})'(c) = \lambda'(c)\mathbf{f}(c) + \lambda(c)\mathbf{f}'(c),$$
$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(c) = \mathbf{f}'(c)\cdot\mathbf{g}(c) + \mathbf{f}(c)\cdot\mathbf{g}'(c).$$

Las demostraciones se obtienen fácilmente si se consideran las componentes. Existe también una regla de la cadena para diferenciar funciones compuestas que se prueba de la misma manera. Si $\mathbf{f}$ es vectorial y u es real, entonces la función compuesta $\mathbf{g}$, dada por $\mathbf{g}(x) = \mathbf{f}[u(x)]$, es vectorial. La regla de la cadena establece que

$$\mathbf{g}'(c) = \mathbf{f}'[u(c)]u'(c),$$

si el dominio de $\mathbf{f}$ contiene un entorno de $u(c)$ y si $u'(c)$ y $\mathbf{f}'[u(c)]$ existen.

El teorema del valor medio establecido en el teorema 5.11 no se verifica en el caso de funciones vectoriales. Por ejemplo, si $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ para todo t real, entonces

$$\mathbf{f}(2\pi) - \mathbf{f}(0) = \mathbf{0},$$

pero $\mathbf{f}'(t)$ no es nunca cero. De hecho, $\|\mathbf{f}'(t)\| = 1$ para todo t. Una versión modificada del teorema del valor medio para funciones vectoriales será desarrollada en el capítulo 12 (teorema 12.8).

5.14 DERIVADAS PARCIALES

Sea S un conjunto abierto del espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$, y sea $f\colon S \to \mathbf{R}$ una función real definida en S. Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ son dos puntos de S con las coordenadas correspondientes iguales excepto en el k-ésimo lugar, esto es si $x_i = c_i$ para $i \neq k$ y si $x_k \neq c_k$, entonces podemos considerar el límite

$$\lim_{x_k \to c_k} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{c})}{x_k - c_k}.$$

Cuando este límite existe, se le llama *derivada parcial* de f con respecto de la k-ésima coordenada y se designa por medio de

$$D_k f(\mathbf{c}), \qquad f_k(\mathbf{c}), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{c}),$$

o por alguna otra expresión análoga. Nosotros adoptaremos la notación $D_k f(\mathbf{c})$.

Este proceso produce n nuevas funciones $D_1 f, D_2 f, \ldots, D_n f$ definidas en los puntos de S en los que los correspondientes límites existen.

La diferenciación parcial no es, realmente, un nuevo concepto. Podemos considerar a $f(x_1, \ldots, x_n)$ como una función de una sola variable cada vez, dejando las demás fijas. Es decir, si introducimos una función g definida por

$$g(x_k) = f(c_1, \ldots, c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \ldots, c_n),$$

entonces la derivada parcial $D_k f(\mathbf{c})$ es precisamente la derivada ordinaria $g'(c_k)$. Esto se enuncia usualmente diciendo que para diferenciar f con respecto a la k-ésima variable, se suponen constantes las otras variables.

Siempre que tengamos que generalizar un concepto de $\mathbf{R}^1$ a $\mathbf{R}^n$ procuraremos conservar las propiedades más importantes que, en el caso unidimensional, la existencia de la derivada en c implica la continuidad en c. Por lo tanto, lo óptimo sería disponer un concepto de derivada para funciones de varias variables que implicara la continuidad. Para las derivadas parciales *no* ocurre esto. Una función de n variables puede poseer derivadas parciales en un punto con respecto de cada una de las variables y no ser continua en dicho punto. Ilustraremos esta afirmación por medio del ejemplo de una función con dos variables:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las derivadas parciales $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$ existen ambas. En efecto:

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1,$$

y, análogamente, $D_2 f(0, 0) = 1$. Por otro lado, es claro que esta función no es continua en $(0, 0)$.

La existencia de las derivadas parciales con respecto de cada variable separadamente implica la continuidad con respecto de cada variable separadamente; pero como hemos visto, ello no implica necesariamente la continuidad respecto de todas las variables simultáneamente. La dificultad que presentan las derivadas parciales proviene de su misma definición: en ella estamos obligados a considerar sólo una variable cada vez. Las derivadas parciales nos proporcionan una medida de la variación de una función en la dirección de cada uno de los ejes. Existe un concepto más general de derivada que no restringe nuestras consideraciones a las direcciones particulares de los ejes coordenados. Este concepto será desarrollado en el capítulo 12.

El propósito de esta sección es únicamente el de introducir la notación de las derivadas parciales, ya que las utilizaremos ocasionalmente antes de alcanzar el capítulo 12.

Si f tiene derivadas parciales $D_1f, \ldots, D_nf$ en un conjunto abierto S, entonces podemos también considerar *sus* derivadas parciales. Éstas se llamarán derivadas parciales de *segundo orden*. Escribiremos $D_{r,k}f$ para designar la derivada parcial de D_kf con respecto de la r-ésima variable. Entonces,

$$D_{r,k}f = D_r(D_kf).$$

Las derivadas parciales de orden superior se definen análogamente. Otras notaciones son

$$D_{r,k}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_r\, \partial x_k}, \qquad D_{p,q,r}f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_p\, \partial x_q\, \partial x_r}.$$

5.15 DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

En esta sección discutiremos brevemente las derivadas de las funciones complejas definidas en subconjuntos del plano complejo. Tales funciones son, naturalmente, funciones vectoriales cuyo dominio y recorrido son subconjuntos de $\mathbf{R}^2$. Todas las consideraciones del capítulo 4 concernientes a los límites y a la continuidad de las funciones vectoriales se aplican, en particular, a las funciones de una variable compleja. Existe, sin embargo, una diferencia esencial entre el conjunto $\mathbf{C}$ de los números complejos y el conjunto $\mathbf{R}^n$ de los vectores n dimensionales (cuando $n > 2$) que juega un importante papel en este momento. En el sistema de los números complejos disponemos de las cuatro operaciones algebraicas de sumar, restar, multiplicar y dividir, y estas operaciones verifican muchas de las propiedades «usuales» del Álgebra que son válidas en el sistema de los números reales. En particular verifican los cinco primeros axiomas de los números reales enumerados en el capítulo 1. (Los axiomas 6 al 10 involucran la relación de orden $<$, que no existe entre números complejos.) Todo sistema algebraico que verifica los axiomas 1 al 5 se llama *cuerpo*. (Para una discusión más amplia de los cuerpos, véase la referencia 1.4.)

La multiplicación y la división no pueden ser introducidas en $\mathbf{R}^n$ (para $n > 2$) de forma que $\mathbf{R}^n$ sea un cuerpo * que contenga a $\mathbf{C}$. Como la división es posible en $\mathbf{C}$, es posible asimismo formar el cociente fundamental de diferencias $[f(z) - f(c)]/(z - c)$ que fue utilizado para definir la derivada en $\mathbf{R}$, y entonces se presenta de forma clara cómo hay que definir la derivada en $\mathbf{C}$.

Definición 5.21. *Sea f una función compleja definida en un conjunto abierto S de $\mathbf{C}$, y sea $c \in S$. Entonces f es diferenciable en c si el límite*

$$\lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} = f'(c)$$

existe.

Por medio de este proceso de calcular límites se obtiene una nueva función compleja f' definida en aquellos puntos z de S donde $f'(z)$ existe. Las derivadas de orden superior f'', f''', ... se definen, como es natural, de forma análoga.

Las siguientes proposiciones son válidas para funciones complejas definidas en un conjunto abierto S; sus demostraciones son exactamente las mismas que las utilizadas en el caso real:

a) *f es diferenciable en c si, y sólo si, existe una función f^*, continua en c, tal que*

$$f(z) - f(c) = (z - c)f^*(z),$$

para todo z de S, con $f^*(c) = f'(c)$.

NOTA. Si hacemos $g(z) = f^*(z) - f'(c)$, la ecuación de (a) podemos ponerla en la forma

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z - c) + g(z)(z - c),$$

donde $g(z) \to 0$ cuando $z \to c$. Esta expresión se llama la *fórmula de Taylor de primer orden* para f.

* Por ejemplo, si fuese posible definir una multiplicación en $\mathbf{R}^3$ que dotara a $\mathbf{R}^3$ de estructura de cuerpo, conteniendo a $\mathbf{C}$, podríamos razonar como sigue: Para cada $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^3$ los vectores $1, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$ serían linealmente dependientes (ver Referencia 5.1, p. 558). Entonces para cada $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^3$, se verificaría una relación del tipo $a_0 + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2 + a_3\mathbf{x}^3 = 0$, donde a_0, a_1, a_2, a_3 son números reales. Pero cada polinomio de grado tres con coeficientes reales es un producto de un polinomio lineal por un polinomio cuadrático con coeficientes reales. Las únicas raíces de tales polinomios son o bien números reales o bien números complejos.

b) *Si f es diferenciable en c, entonces f es continua en c.*
c) *Si dos funciones f y g tienen derivadas en c, entonces su suma, su diferencia, su producto y su cociente tienen también derivadas en c y se obtienen por medio de las fórmulas usuales (como en el teorema 5.4). En el caso de f/g, debemos suponer que $g(c) \neq 0$.*
d) *La regla de la cadena es válida; es decir, tenemos*

$$(g \circ f)'(c) = g'[f(c)]f'(c),$$

si el dominio de g contiene un entorno de $f(c)$ y si $f'(c)$ y $g'[f(c)]$ existen.

Si $f(z) = z$, se obtiene $f'(z) = 1$ para todo z de $\mathbf{C}$. Por (c) reiterado, se tiene que $f'(z) = nz^{n-1}$ cuando $f(z) = z^n$ (n es un entero positivo). Esto también se verifica cuando n es un entero negativo, siempre que $z \neq 0$. Por lo tanto, es posible calcular las derivadas de los polinomios complejos y de las funciones racionales complejas utilizando las mismas técnicas que las empleadas en el Cálculo elemental.

5.16 ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

Si f es una función compleja de una variable compleja, podemos escribir cada valor de la función en la forma

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

donde u y v son funciones reales de una variable compleja. Podemos, además, considerar u y v como funciones reales de dos variables reales y escribir entonces

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad \text{si } z = x + iy.$$

En ambos casos, escribiremos $f = u + iv$ y nos referiremos a u y a v designándolas parte *real* y parte *imaginaria* de f. Así, en el caso de la función exponencial compleja f, definida por

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y,$$

las partes real e imaginaria vienen dadas por

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Análogamente, cuando $f(z) = z^2 = (x + iy)^2$, obtenemos

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

En el próximo teorema veremos que la existencia de la derivada f' impone una severa restricción a las partes real e imaginaria u y v.

Teorema 5.22. *Sea $f = u + iv$ definida en un conjunto abierto S de $\mathbf{C}$. Si $f'(c)$ existe para un c de S, las derivadas parciales $D_1u(c)$, $D_2u(c)$, $D_1v(c)$ y $D_2v(c)$ existen y se tiene*

$$f'(c) = D_1u(c) + i\,D_1v(c), \tag{3}$$

y

$$f'(c) = D_2v(c) - i\,D_2u(c). \tag{4}$$

Esto implica, en particular, que

$$D_1u(c) = D_2v(c) \qquad \text{y} \qquad D_1v(c) = -D_2u(c).$$

NOTA. Las dos últimas ecuaciones se conocen por el nombre de *ecuaciones de Cauchy-Riemann*. Generalmente se escriben en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Demostración. Como que $f'(c)$ existe, es posible encontrar una función f^* definida en S tal que

$$f(z) - f(c) = (z - c)f^*(z), \tag{5}$$

donde f^* es continua en c y $f^*(c) = f'(c)$. Escribamos

$$z = x + iy, \qquad c = a + ib, \qquad \text{y} \qquad f^*(z) = A(z) + iB(z),$$

donde $A(z)$ y $B(z)$ son reales. Obsérvese que $A(z) \to A(c)$ y $B(z) \to B(c)$ cuando $z \to c$. Considerando sólo aquellos números z de S para los que $y = b$ y tomando las partes real e imaginaria de (5), tenemos

$$u(x, b) - u(a, b) = (x - a)A(x + ib), \qquad v(x, b) - v(a, b) = (x - a)B(x + ib).$$

Dividiendo por $x - a$ y haciendo que $x \to a$ obtenemos

$$D_1u(c) = A(c) \qquad \text{y} \qquad D_1v(c) = B(c).$$

Como que $f'(c) = A(c) + iB(c)$, esto prueba (3).

Análogamente, considerando aquellos z de S con $x = a$ tenemos

$$D_2v(c) = A(c)$$

y

$$D_2u(c) = -B(c),$$

que prueba (4).

El teorema que sigue da algunas aplicaciones de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 5.23. *Sea $f = u + iv$ una función con derivada en cada uno de los puntos de un disco abierto D centrado en (a, b). Si u, v o $|f|$ son constantes* en D, entonces f es constante en D. Además, si $f'(z) = 0$ para todo z de D, entonces f es constante.*

Demostración. Supongamos que u es constante en D. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann prueban que $D_2v = D_1v = 0$ en D. Aplicando dos veces el teorema del valor medio unidimensional, obtenemos para un y' entre b e y,

$$v(x, y) - v(x, b) = (y - b)D_2v(x, y') = 0,$$

y para un x' entre a y x,

$$v(x, b) - v(a, b) = (x - a)D_1v(x', b) = 0.$$

Por lo tanto $v(x, y) = v(a, b)$ para todo (x, y) de D, luego v es constante en D. Un razonamiento análogo demuestra que si v es constante, entonces u es constante.

Supongamos ahora que $|f|$ es constante en D. Entonces $|f|^2 = u^2 + v^2$ es constante en D. Derivando parcialmente tenemos

$$uD_1u + vD_1v = 0, \qquad uD_2u + vD_2v = 0.$$

En virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann la segunda ecuación puede escribirse

$$vD_1u - uD_1v = 0.$$

Combinando ésta con la primera, podemos eliminar D_1v y obtenemos $(u^2+v^2)D_1u = 0$. Si $u^2+v^2 = 0$, entonces $u = v = 0$, luego $f = 0$. Si $u^2+v^2 \neq 0$, entonces $D_1u = 0$; luego u es constante y f también.

Finalmente, si $f' = 0$ en D, ambas derivadas parciales D_1v y D_2v son cero en D. De nuevo, como en la primera parte de la demostración, obtenemos que f es constante en D.

El teorema 5.22 nos dice que una condición necesaria para que la función $f = u + iv$ posea derivada en c es que las cuatro derivadas parciales D_1u, D_2u, D_1v, D_2v existan en c y satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esta

* Aquí $|f|$ designa la función cuyo valor en z es $|f(z)|$.

condición no es, sin embargo, suficiente, como podemos ver considerando el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sean u y v definidas como sigue:

$$u(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad u(0, 0) = 0,$$

$$v(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad v(0, 0) = 0.$$

Es fácil comprobar que $D_1u(0, 0) = D_1v(0, 0) = 1$ y que $D_2u(0, 0) = -D_2v(0, 0) = -1$, por lo tanto las ecuaciones de Cauchy-Riemann se verifican en $(0, 0)$. A pesar de todo, la función $f = u + iv$ no puede tener derivada en $z = 0$. En efecto, para $x = 0$, el cociente diferencial se convierte en

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{-y + iy}{iy} = 1 + i,$$

mientras que para $x = y$, es

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{xi}{x + ix} = \frac{1 + i}{2},$$

y por lo tanto $f'(0)$ no existe.

En el capítulo 12 demostraremos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann *son* suficientes para establecer la existencia de la derivada de $f = u + iv$ en c si las derivadas parciales de u y v son continuas en un entorno de c. Para ilustrar cómo hay que utilizar este resultado en la práctica, obtendremos la derivada de la función exponencial. Sea $f(z) = e^z = u + iv$. Entonces

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y,$$

y por lo tanto

$$D_1u(x, y) = e^x \cos y = D_2v(x, y), \qquad D_2u(x, y) = -e^x \operatorname{sen} y = -D_1v(x, y).$$

Como estas derivadas parciales son continuas en todo $\mathbf{R}^2$ y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, la derivada $f'(z)$ existe para todo z. Para calcularla usaremos el teorema 5.22 y obtendremos

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = f(z).$$

Entonces, la función exponencial es su misma derivada (como en el caso real).

EJERCICIOS

Funciones reales

En los ejercicios que siguen se supone, siempre que sea necesario, que se conocen las fórmulas para derivar las funciones elementales trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

5.1 Una función f satisface una condición de Lipschitz de orden α en c si existe un número positivo M (que puede depender de c) y una bola unidimensional $B(c)$ tales que

$$|f(x) - f(c)| < M|x - c|^{\alpha}$$

si $x \in B(c)$, $x \neq c$.

a) Probar que una función que satisface una condición de Lipschitz de orden α es continua en c si $\alpha > 0$, y derivable en c si $\alpha > 1$.

b) Dar un ejemplo de una función que satisfaga la condición de Lipschitz de orden 1 en c para la que $f'(c)$ no exista.

5.2 En cada uno de los siguientes casos, determinar los intervalos en los que la función f es creciente o decreciente y determinar los máximos y mínimos (si existen) en el conjunto en el que f está definida.

a) $f(x) = x^3 + ax + b$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

b) $f(x) = \log(x^2 - 9)$, $\quad |x| > 3$.

c) $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^4$, $\quad 0 \leq x \leq 1$.

d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ if $x \neq 0, f(0) = 1$, $\quad 0 \leq x \leq \pi/2$.

5.3 Buscar un polinomio f del menor grado posible tal que

$$f(x_1) = a_1, \quad f(x_2) = a_2, \quad f'(x_1) = b_1, \quad f'(x_2) = b_2,$$

donde $x_1 \neq x_2$ y a_1, a_2, b_1, b_2 son números reales dados.

5.4 Se define f como sigue: $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Probar que

a) f es continua para todo x.

b) $f^{(n)}$ es continua para todo x, y que $f^{(n)}(0) = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

5.5 Definimos f, g y h como sigue: $f(0) = g(0) = h(0)$ y, si $x \neq 0$, $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, $g(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, $h(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$. Probar que

a) $f'(x) = -1/x^2 \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $\quad f'(0)$ no existe.

b) $g'(x) = \operatorname{sen}(1/x) - 1/x \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $\quad g'(0)$ no existe.

c) $h'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $\quad h'(0) = 0$; $\lim_{x\to 0} h'(x)$ no existe.

5.6 Obtener la fórmula de Leibnitz para la derivada n-ésima del producto h de dos funciones f y g:

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \qquad \text{donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

5.7 Sean f y g dos funciones definidas en todo $\mathbf{R}$ y con derivadas finitas terceras $f'''(x)$ y $g'''(x)$ para todo x de $\mathbf{R}$. Si $f(x)g(x) = 1$ para todo x, probar que las relaciones de (a), (b), (c) y (d) se verifican en todos los puntos en los que el denominador no es cero:

a) $f'(x)/f(x) + g'(x)/g(x) = 0$.

b) $f''(x)/f'(x) - 2f'(x)/f(x) - g''(x)/g'(x) = 0$.

c) $\dfrac{f'''(x)}{f'(x)} - 3\dfrac{f'(x)g''(x)}{f(x)g'(x)} - 3\dfrac{f''(x)}{f(x)} - \dfrac{g'''(x)}{g'(x)} = 0$.

d) $\dfrac{f'''(x)}{f'(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 = \dfrac{g'''(x)}{g'(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2$.

NOTA. La expresión que aparece en el primer miembro de (d) se llama *derivada de Schwarz* de f en x.

e) Probar que f y g tienen la misma derivada de Schwarz si

$$g(x) = [af(x) + b]/[cf(x) + d], \text{donde } ad - bc \neq 0.$$

Indicación. Si $c \neq 0$, escribir $(af + b)/(cf + d) = (a/c) + (bc - ad)/[c(cf + d)]$ y aplicar la parte (d).

5.8 Sean f_1, f_2, g_1, g_2 cuatro funciones con derivadas en (a, b). Definamos F por medio del determinante

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}, \qquad \text{si } x \in (a, b).$$

a) Probar que $F'(x)$ existe para cada x de (a, b) y que

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}.$$

b) Establecer y probar un resultado más general para determinantes de orden n.

5.9 Dadas n funciones $f_1, \ldots, f_n$ derivables hasta el orden n en (a, b), definimos una función W, llamada el *Wronskiano* de $f_1, \ldots, f_n$ como sigue: Para cada x de (a, b), $W(x)$ es el valor del determinante de orden n que en la k-ésima fila, m-ésima columna, tiene al elemento $f_m^{(k-1)}(x)$, donde $k = 1, 2, \ldots, n$ y $m = 1, 2, \ldots, n$. [La expresión $f_m^{(0)}(x)$ designa a $f_m(x)$.]

a) Probar que $W'(x)$ se obtiene reemplazando la última fila del determinante que define $W(x)$ por las derivadas n-ésimas $f_1^{(n)}(x), \ldots, f_n^{(n)}(x)$.

b) Supongamos que existen n constantes $c_1, \ldots, c_n$, no nulas, tales que $c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$ para todo x de (a, b). Probar que $W(x) = 0$ para cada x en (a, b).

NOTA. Un conjunto de funciones que satisface una relación de este tipo se llama *conjunto linealmente dependiente* sobre (a, b).

c) La anulación del Wronskiano en todo el intervalo (a, b) es necesaria, pero no es suficiente para que $f_1, \ldots, f_n$ sean linealmente dependientes. Probar que en el caso de dos funciones, si el Wronskiano se anula en (a, b) y si una de las funciones no se anula en (a, b), entonces constituyen un conjunto linealmente dependiente en (a, b).

El teorema del valor medio

5.10 Dada una función f definida y derivable con derivada finita en (a, b) y tal que $\lim_{x \to b-} f(x) = +\infty$, probar que $\lim_{x \to b-} f'(x)$ o no existe o es infinito.

5.11 Probar que la fórmula del valor medio puede escribirse en la forma:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h),$$

donde $0 < \theta < 1$. Determinar θ en función de x y de h cuando

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$,

c) $f(x) = e^x$, d) $f(x) = \log x$, $x > 0$.

Fijar $x \neq 0$ y hallar $\lim_{h \to 0} \theta$ en cada caso.

5.12 En el teorema 5.20 hacemos $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ y $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$. Probar que $f'(x)/g'(x)$ nunca es igual al cociente $[f(1) - f(0)]/[g(1) - g(0)]$ si $0 < x < 1$. ¿Cómo conciliar esto con la igualdad

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}, \qquad a < x_1 < b,$$

que se obtiene del teorema 5.20 cuando $n = 1$?

5.13 En cada uno de los casos especiales del teorema 5.20, tomar $n = 1$, $c = a$, $x = b$, y demostrar que $x_1 = (a + b)/2$.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$; b) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

¿Es posible encontrar una clase general de pares de funciones f y g para los que x_1 sea siempre $(a + b)/2$ y tales que los ejemplos (a) y (b) pertenezcan a dicha clase?

5.14 Dada una función f definida y con derivada finita f' en el intervalo semiabierto $0 < x \leq 1$ y tal que $|f'(x)| < 1$, definimos $a_n = f(1/n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Demostrar que el $\lim_{n \to \infty} a_n$ existe. *Indicación*. Utilizar la condición de Cauchy.

5.15 Supongamos que f posee derivada finita en cada uno de los puntos del intervalo abierto (a, b). Supongamos además que $\lim_{x \to c} f'(x)$ existe y es finito para uno de los puntos interiores c. Demostrar que el valor de este límite deberá ser $f'(c)$.

5.16 Sea f continua en (a, b) con derivada finita f' en todo (a, b), excepto quizás en c. Si $\lim_{x \to c} f'(x)$ existe y vale A, entonces $f'(c)$ existe también y vale A.

5.17 Sea f continua en $[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f'(x)$ finito para cada x de $(0, 1)$. Probar que si f' es creciente en $(0, 1)$, entonces también lo es la función g definida por medio de la ecuación $g(x) = f(x)/x$.

5.18 Supongamos que f posee derivada finita en (a, b) y es continua en $[a, b]$ con $f(a) - f(b) = 0$. Probar que para cada real λ existe un c de (a, b) tal que $f'(c) = \lambda f(c)$. *Indicación*. Aplicar el teorema de Rolle a $g(x) f(x)$ para una g conveniente que dependa de λ.

5.19 Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y que posee una derivada segunda f'' finita en el intervalo abierto (a, b). Supongamos que la cuerda que une los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ corta a la gráfica de la función f en un tercer punto P distinto de A y de B. Probar que $f''(c) = 0$ para un c de (a, b).

5.20 Si f posee derivada tercera f''' finita en $[a, b]$ y si

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0,$$

probar que $f'''(c) = 0$ para un c de (a, b).

5.21 Sea f una función no negativa y que admita tercera derivada finita f''' en el intervalo abierto $(0, 1)$. Si $f(x) = 0$ para dos puntos, por lo menos, de x en $(0, 1)$, entonces $f'''(c) = 0$ para un c de $(0, 1)$.

5.22 Supongamos que f admite una derivada finita en un cierto intervalo $(a, +\infty)$.

a) Si $f(x) \to 1$ y $f'(x) \to c$ cuando $x \to +\infty$, probar que $c = 0$.

b) Si $f'(x) \to 1$ cuando $x \to +\infty$, probar que $f(x)/x \to 1$ cuando $x \to +\infty$.

c) Si $f'(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, probar que $f(x)/x \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

5.23 Sea h un número positivo fijo. Probar que no existe ninguna función f que satisfaga las tres condiciones siguientes: $f'(x)$ existe para $x \geq 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) \geq h$ para $x > 0$.

5.24 Si $h > 0$ y $f'(x)$ existe (y es finita) para cada x de $(a - h, a + h)$, y si f es continua en $[a - h, a + h]$, probar que se tiene:

a) $$\frac{f(a + h) - f(a - h)}{h} = f'(a + \theta h) + f'(a - \theta h), \qquad 0 < \theta < 1;$$

b) $$\frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h} = f'(a + \lambda h) - f'(a - \lambda h), \qquad 0 < \lambda < 1.$$

c) Si $f''(a)$ existe, probar

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h^2}.$$

d) Dar un ejemplo en el que exista el límite del cociente que aparece en (c) pero $f''(a)$ no exista.

5.25 Sea f una función con derivada finita en (a, b) y supongamos que $c \in (a, b)$. Considerar la siguiente condición: Para cada $\varepsilon > 0$ existe una bola unidimensional $B(c; \delta)$, cuyo radio δ depende sólo de ε y no de c, tal que si $x \in B(c; \delta)$ y $x \neq c$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon.$$

Probar que f' es continua en (a, b) si esta condición se verifica en todo (a, b).

5.26 Sea f con derivada finita en (a, b) y continua en $[a, b]$, con $a \leq f(x) \leq b$ para todo x de $[a, b]$ y $|f'(x)| \leq \alpha < 1$ para todo x de (a, b). Probar que f posee un único punto fijo en $[a, b]$.

5.27 Dar un par de funciones f y g con derivadas finitas en (0, 1) tales que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

pero que $\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$ no exista, eligiendo g de modo que $g'(x)$ nunca valga cero.

5.28 Demostrar el siguiente teorema:

Sean f y g dos funciones con derivadas n-ésimas finitas en (a, b). Supongamos que, para algún punto interior c de (a, b), $f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$, y que $g(c) = g'(c) = \ldots = g^{(n-1)}(c) = 0$, pero que $g^{(n)}(x)$ nunca es cero en (a, b). Probar que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$

NOTA. $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ no se suponen continuas en c. *Indicación.* Haciendo

$$F(x) = f(x) - \frac{(x - c)^{n-1}f^{(n-1)}(c)}{(n - 1)!},$$

definir G de forma análoga, y aplicar el teorema 5.20 a las funciones F y G.

5.29 Probar que la fórmula que aparece en el teorema de Taylor se puede escribir de la forma siguiente:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + \frac{(x - c)(x - x_1)^{n-1}}{(n - 1)!}f^{(n)}(x_1),$$

donde x_1 es un punto interior al intervalo que une x con c. Sea $1-\theta = (x-x_1)/(x-c)$. Probar que $0 < \theta < 1$ y deducir la siguiente forma del término complementario (debida a Cauchy):

$$\frac{(1 - \theta)^{n-1}(x - c)^n}{(n - 1)!}f^{(n)}[\theta x + (1 - \theta)c].$$

Indicación. Tomar $G(t) = g(t) = t$ en la demostración del teorema 5.20.

Funciones vectoriales

5.30 Si una función vectorial $\mathbf{f}$ es diferenciable en c, probar que

$$\mathbf{f}'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\mathbf{f}(c + h) - \mathbf{f}(c)].$$

Recíprocamente, si este límite existe, probar que $\mathbf{f}$ es diferenciable en c.

5.31 Una función vectorial $\mathbf{f}$ es diferenciable en cada punto de (a, b) y tiene norma $\|\mathbf{f}\|$ constante. Demostrar que $\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t) = 0$ en (a, b).

5.32 Una función vectorial $\mathbf{f}$ no es nunca cero y posee una derivada $\mathbf{f}'$ continua en $\mathbf{R}$. Si existe una función real λ tal que $\mathbf{f}'(t) = \lambda(t)\mathbf{f}(t)$ para todo t, entonces existe una función real positiva u y un vector constante $\mathbf{c}$ tales que $\mathbf{f}(t) = u(t)\cdot\mathbf{c}$ para todo t.

Derivadas parciales

5.33 Consideremos la función f definida en $\mathbf{R}^2$ por las siguientes fórmulas:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \quad f(0, 0) = 0.$$

Probar que las derivadas parciales $D_1f(x, y)$ y $D_2f(x, y)$ existen para cada (x, y) de $\mathbf{R}^2$ y expresar dichas derivadas explícitamente en función de x e y. Probar, además, que f no es continua en (0, 0).

5.34 Sea f definida en $\mathbf{R}^2$ como sigue:

$$f(x, y) = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de f en el origen, cuando existan.

Funciones complejas

5.35 Sea S un conjunto abierto de $\mathbf{C}$ y sea S^* el conjunto de los complejos conjugados $\bar{z}$, cuando $z \in S$. Si f está definida sobre S, definir g sobre S^* como sigue: $g(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, complejo conjugado de $f(z)$. Si f es diferenciable en c, probar que g es diferenciable en $\bar{c}$ y que $g'(\bar{c}) = \overline{f'(c)}$.

5.36 i) En cada uno de los siguientes ejemplos escribir $f = u + iv$ y hallar fórmulas explícitas para $u(x, y)$ y $v(x, y)$

a) $f(z) = \text{sen } z$, b) $f(z) = \cos z$,
c) $f(z) = |z|$, d) $f(z) = \bar{z}$,
e) $f(z) = \arg z \quad (z \neq 0)$, f) $f(z) = \log z \quad (z \neq 0)$,
g) $f(z) = e^{z^2}$, h) $f(z) = z^\alpha \quad$ (α complejo, $z \neq 0$).

(Estas funciones están definidas tal como se indicó en el capítulo 1.)

ii) Probar que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para los siguientes valores de z: Para todo z en (a), (b), (g); ningún z en (c), (d), (e); todos los z excepto los números reales $z \leq 0$ en (f), (h). (En la parte (h), las ecuaciones de Cauchy-Riemann se verifican para todos los z si α es un entero no negativo, y se verifican para todo $z \neq 0$ si α es un entero negativo.)

iii) Calcular las derivadas $f'(z)$ en (a), (b) (f), (g), (h), en el supuesto de que existan.

5.37 Escribir $f = u + iv$ y suponer que f posee derivada en cada uno de los puntos de un disco abierto D centrado en (0, 0). Si $au^2 + bv^2$ es constante en D para ciertos números reales a y b, no ambos nulos, probar que f es constante en D.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

5.1 Apostol, T. M., *Calculus,* Vol. 1. 2.ª ed. Ed. Reverté, S. A., Barcelona, Bogotá, Buenos Aires, Caracas, México.
5.2 Chaundy, T. W., *The Differential Calculus.* Clarendon Press, Oxford, 1935.

CAPÍTULO 6

Funciones de variación acotada y curvas rectificables

6.1 INTRODUCCIÓN

Algunas de las propiedades básicas de las funciones monótonas fueron descritas en el capítulo 4. En este breve capítulo se estudian las funciones de variación acotada, una clase de funciones íntimamente relacionada con las funciones monótonas. Veremos que estas funciones están en estrecha conexión con las curvas que poseen longitud finita (curvas rectificables). Juegan también un papel en la teoría de la integración de Riemann-Stieltjes que desarrollaremos en el próximo capítulo.

6.2 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES MONÓTONAS

Teorema 6.1. *Sea f una función creciente definida en $[a, b]$ y sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n + 1$ puntos tales que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Tenemos entonces la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-)] \leq f(b) - f(a).$$

Demostración. Supongamos que $y_k \in (x_k, x_{k+1})$. Para $1 \leq k \leq n-1$ tenemos que $f(x_k+) \leq f(y_k)$ y $f(y_{k-1}) \leq f(x_k-)$, luego $f(x_k+) - f(x_k-) \leq f(y_k) - f(y_{k-1})$. Si sumamos estas desigualdades, la suma de la derecha nos da $f(y_{n-1}) - f(y_0)$. Puesto que $f(y_{n-1}) - f(y_0) \leq f(b) - f(a)$, esto completa la demostración.

La diferencia $f(x_k+) - f(x_k-)$ es, además, el salto de f en x_k. El teorema anterior nos dice que, para cada colección finita de puntos x_k de (a, b), la suma de los saltos en estos puntos está siempre acotada por $f(b) - f(a)$. Este resultado nos servirá para demostrar el teorema siguiente.

Teorema 6.2. *Si f es monótona en $[a, b]$, entonces el conjunto de discontinuidades de f es numerable.*

Demostración. Supongamos que f es creciente y sea S_m el conjunto de puntos de (a, b) en los que el salto de f es superior a $1/m$, $m > 0$. Si $x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1}$ están en S_m, el teorema 6.1 nos asegura que

$$\frac{n-1}{m} \leq f(b) - f(a).$$

Esto significa que S_m debe ser un conjunto finito. Pero el conjunto de discontinuidades de f en (a, b) es un subconjunto de la reunión $\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ y por lo tanto numerable. (Si f es decreciente, el argumento se aplica a $-f$.)

6.3 FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA

Definición 6.3. *Si $[a, b]$ es un intervalo compacto, un conjunto de puntos*

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

que satisfaga las desigualdades

$$a = x_0 < x_1 \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

se llama partición de $[a, b]$. El intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se llama k-ésimo subintervalo de P y se escribe $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, con lo que $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$. La colección de todas las particiones posibles de $[a, b]$ se designará por medio de $\mathcal{P}[a, b]$.

Definición 6.4. *Sea f definida en $[a, b]$. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, escribiremos $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, para $k = 1, 2, \ldots, n$. Si existe un número positivo M tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \leq M$$

para toda partición de $[a, b]$, entonces diremos que f es de variación acotada en $[a, b]$.

Los dos teoremas que siguen proporcionan ejemplos de funciones de variación acotada.

Teorema 6.5. *Si f es monótona en $[a, b]$, entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Sea f creciente. Entonces para cada partición de $[a, b]$ tenemos $\Delta f_k \geq 0$ y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

Teorema 6.6. *Si f es continua en $[a, b]$ y si f' existe y está acotada en el interior, es decir que $|f'(x)| \leq A$ para todo x de (a, b), entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Aplicando el teorema del valor medio, tenemos

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1}), \text{ en donde } t_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Esto implica

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f'(t_k)| \, \Delta x_k \leq A \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = A(b-a).$$

Teorema 6.7. *Si f es de variación acotada en $[a, b]$, es decir que $\sum |\Delta f_k| \leq M$ para toda partición de $[a, b]$, entonces f está acotada en $[a, b]$. De hecho,*

$$|f(x)| \leq |f(a)| + M \quad \textit{para todo } x \textit{ de } [a, b].$$

Demostración. Supongamos que $x \in (a, b)$. Utilizando la partición especial $P = \{a, x, b\}$, obtenemos

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq M.$$

Esto implica que $|f(x) - f(a)| \leq M$, $|f(x)| \leq |f(a)| + M$. Idéntica desigualdad se verifica si $x = a$ o si $x = b$.

Ejemplos

1. Es fácil construir funciones continuas que no sean de variación acotada. Por ejemplo, sea $f(x) = x \cos \{\pi/(2x)\}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Entonces f es continua en $[0, 1]$, pero si consideramos la partición en $2n$ subintervalos

$$P = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\},$$

es fácil comprobar, calculando, que

$$\sum_{k=1}^{2n} |\Delta f_k| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Esta suma no está acotada para todo n, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ diverge. En este ejemplo la derivada f' existe en $(0, 1)$ pero f' no está acotada en $(0, 1)$. Sin embargo, f' está acotada en todo intervalo compacto que no contenga el origen y, por lo tanto, f es de variación acotada en tales intervalos.

2. Un ejemplo análogo al primero lo proporciona la función $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Dicha función f es de variación acotada en $[0, 1]$, ya que f' está acotada en $[0, 1]$. De hecho, $f'(0) = 0$ y, para $x \neq 0$, $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x) + 2x \cos(1/x)$, luego $|f'(x)| \leq 3$ para todo x de $[0, 1]$.
3. La acotación de f' no es condición necesaria para que f sea variación acotada. Por ejemplo, considérese la función $f(x) = x^{1/3}$. Esta función es monótona (y por lo tanto de variación acotada) sobre todo intervalo finito. Sin embargo, $f'(x) \to +\infty$ cuando $x \to 0$.

6.4 VARIACIÓN TOTAL

Definición 6.8. *Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$ y sea $\sum(P)$ la suma $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$ correspondiente a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$. El número*

$$V_f(a, b) = \sup \{\textstyle\sum(P) : P \in \mathscr{P}[a, b]\},$$

se llama variación total de f en el intervalo $[a, b]$.

NOTA. Si no hay peligro de confusión, escribiremos V_f en vez de $V_f(a, b)$.

Dado que f es de variación acotada en $[a, b]$, el número V_f es finito. Además $V_f \geq 0$, ya que cada suma $\sum(P) \geq 0$. Y además $V_f(a, b) = 0$ si, y sólo si, f es constante en $[a, b]$.

Teorema 6.9. *Supongamos que f y g son dos funciones de variación acotada en $[a, b]$. Entonces también lo es su suma, su diferencia y su producto. Además, se tiene*

$$V_{f \pm g} \leq V_f + V_g \qquad \text{y} \qquad V_{f \cdot g} \leq A V_f + B V_g,$$

en donde

$$A = \sup \{|g(x)| : x \in [a, b]\}, \qquad B = \sup \{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Demostración. Sea $h(x) = f(x)g(x)$. Para cada partición P de $[a, b]$ se tiene

$$\begin{aligned} |\Delta h_k| &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\ &= |[f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)] \\ &\quad + [f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})]| \leq A|\Delta f_k| + B|\Delta g_k|. \end{aligned}$$

Esto implica que h es una función de variación acotada y que $V_h \leq A V_f + B V_g$. Las demostraciones correspondientes a la suma y la diferencia son muy simples y las omitiremos.

NOTA. Los cocientes no han sido incluidos en el teorema anterior ya que el recíproco de una función de variación acotada no es, necesariamente, de variación acotada. Por ejemplo, si $f(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$, entonces $1/f$ no estará acotada en ningún intervalo que contenga el punto x_0 y (por el teorema 6.7) $1/f$ no puede ser de variación acotada en tal intervalo. Para poder extender el teorema 6.9 a los cocientes, es suficiente excluir las funciones cuyos valores lleguen a ser tan próximos a cero como se desee.

Teorema 6.10. *Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$ y supongamos que f está acotada de forma que no se pueda aproximar a cero; esto es, supongamos que existe un número positivo m tal que $0 < m \leq |f(x)|$ para todo x de $[a, b]$. Entonces $g = 1/f$ es también de variación acotada en $[a, b]$ y $V_g \leq V_f/m^2$.*

Demostración.

$$|\Delta g_k| = \left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \left|\frac{\Delta f_k}{f(x_k)f(x_{k-1})}\right| \leq \frac{|\Delta f_k|}{m^2}.$$

6.5 PROPIEDAD ADITIVA DE LA VARIACIÓN TOTAL

En los dos últimos teoremas el intervalo $[a, b]$ se conservó fijo y $V_f(a, b)$ era considerada función de f. Ahora fijaremos f y estudiaremos la variación total como función del intervalo $[a, b]$, con lo cual obtendremos la siguiente propiedad *aditiva.*

Teorema 6.11. *Sea f de variación acotada en $[a, b]$, y supongamos que $c \in (a, b)$. Entonces f es de variación acotada en $[a, c]$ y en $[c, b]$ y se tiene*

$$V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

Demostración. Probaremos en primer lugar que f es de variación acotada en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Sea P_1 una partición de $[a, c]$ y sea P_2 una partición de $[c, b]$. Entonces $P_0 = P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a, b]$. Si $\sum(P)$ designa la suma $\sum |\Delta f_k|$ correspondiente a la partición P (en el intervalo apropiado), podemos escribir

$$\textstyle\sum(P_1) + \sum(P_2) = \sum(P_0) \leq V_f(a, b). \tag{1}$$

Esto prueba que cada suma $\sum(P_1)$ y $\sum(P_2)$ está acotada por $V_f(a, b)$ y ello significa que f es de variación acotada en $[a, c]$ y en $[c, b]$. De (1) se obtiene también la siguiente desigualdad

$$V_f(a, c) + V_f(c, b) \leq V_f(a, b),$$

en virtud del teorema 1.15.

Para obtener la desigualdad en el otro sentido, sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ y sea $P_0 = P \cup \{c\}$ la (probablemente nueva) partición obtenida al añadir el punto c. Si $c \in [x_{k-1}, x_k]$, entonces tenemos

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|,$$

y por lo tanto $\sum(P) \leq \sum(P_0)$. Ahora bien, los puntos de P_0 que están en $[a, c]$ determinan una partición P_1 de $[a, c]$ y los que están en $[c, b]$ una partición P_2 de $[c, b]$. Las sumas correspondientes a estas particiones están relacionadas por

$$\sum(P) \leq \sum(P_0) = \sum(P_1) + \sum(P_2) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

Por consiguiente, $V_f(a, c) + V_f(c, b)$ es una cota superior para cada suma $\sum(P)$. Puesto que dicha cota no puede ser menor que el extremo superior, tenemos

$$V_f(a, b) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b),$$

que termina la demostración.

6.6 LA VARIACIÓN TOTAL $[a, x]$ COMO FUNCIÓN DE x

Ahora mantendremos fija la función f y el punto inicial del intervalo y estudiaremos la variación total como función del punto extremo de la derecha del intervalo. La propiedad aditiva de la variación total implica consecuencias importantes para esta función.

Teorema 6.12. *Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$. Sea V definida en $[a, b]$ como sigue: $V(x) = V_f(a, x)$ si $a < x \leq b$, $V(a) = 0$. Entonces:*

i) *V es una función creciente en $[a, b]$.*
ii) *$V - f$ es una función creciente en $[a, b]$.*

Demostración. Si $a < x < y \leq b$, podemos escribir $V_f(a, y) = V_f(a, x) + V_f(x, y)$. Esto implica que $V(y) - V(x) = V_f(x, y) \geq 0$. Luego $V(x) \leq V(y)$, e (i) se verifica.

Para demostrar (ii), sea $D(x) = V(x) - f(x)$ si $x \in [a, b]$. Entonces, si $a \leq x < y \leq b$, tenemos

$$D(y) - D(x) = V(y) - V(x) - [f(y) - f(x)] = V_f(x, y) - [f(y) - f(x)].$$

Pero de la definición de $V_f(x, y)$ se sigue que

$$f(y) - f(x) \leq V_f(x, y).$$

Esto significa que $D(y) - D(x) \geq 0$, y (ii) se verifica.

NOTA. Para ciertas funciones f, la variación total $V_f(a, x)$ se puede expresar como una integral. (Ver ejercicio 7.20.)

6.7. FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA EXPRESADAS COMO DIFERENCIA DE DOS FUNCIONES CRECIENTES

La simple y elegante caracterización de las funciones de variación acotada que damos a continuación es consecuencia del teorema 6.12.

Teorema 6.13. *Sea f definida sobre $[a, b]$. Entonces f es de variación acotada en $[a, b]$ si, y sólo si, f puede expresarse como diferencia de dos funciones crecientes.*

Demostración. Si f es de variación acotada en $[a, b]$, podemos escribir $f = V - D$, en donde V es la función del teorema 6.12 y $D = V - f$. Tanto V como D son funciones crecientes en $[a, b]$.

El recíproco se deduce inmediatamente de los teoremas 6.5 y 6.9.

La representación de una función de variación acotada como diferencia de dos funciones crecientes no es única. Si $f = f_1 - f_2$, en donde f_1 y f_2 son crecientes, se tiene también que $f = (f_1 + g) - (f_2 + g)$, siendo g una función creciente arbitraria, y ello nos proporciona una nueva representación de f. Si g es *estrictamente* creciente, también lo serán $f_1 + g$ y $f_2 + g$. Por consiguiente, el teorema 6.13 es asimismo válido si reemplazamos «creciente» por «estrictamente creciente».

6.8 FUNCIONES CONTINUAS DE VARIACIÓN ACOTADA

Teorema 6.14. *Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$. Si $x \in (a, b]$, sea $V(x) = V_f(a\ x)$ y hagamos $V(a) = 0$. Entonces cada punto de continuidad de f también es un punto de continuidad de V. El recíproco también es cierto.*

Demostración. Puesto que V es monótona, los límites laterales por la derecha y por la izquierda $V(x+)$ y $V(x-)$ existen para cada punto x de (a, b). En virtud del teorema 6.13, lo mismo es cierto para $f(x+)$ y $f(x-)$.

Si $a < x < y \leq b$, se verifica [por definición de $V_f(x, y)$] que

$$0 \leq |f(y) - f(x)| \leq V(y) - V(x).$$

Haciendo que $y \to x$, obtenemos

$$0 \leq |f(x+) - f(x)| \leq V(x+) - V(x).$$

Análogamente, $0 \le |f(x) - f(x-)| \le V(x) - V(x-)$. Estas desigualdades implican que todo punto de continuidad de V es también un punto de continuidad de f.

Para demostrar el recíproco, sea f continua en un punto c de (a, b). Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta$ implica $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$. Para este mismo ε, existe una partición P de $[c, b]$, por ejemplo

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \qquad x_0 = c, \quad x_n = b,$$

tal que

$$V_f(c, b) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|.$$

Agregando más puntos a P únicamente conseguiremos que aumente la suma $\sum |\Delta f_k|$ y por lo tanto podemos considerar que $0 < x_1 - x_0 < \delta$. Esto significa que

$$|\Delta f_1| = |f(x_1) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

con lo que la desigualdad anterior se convierte en

$$V_f(c, b) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=2}^{n} |\Delta f_k| \le \frac{\varepsilon}{2} + V_f(x_1, b),$$

ya que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[x_1, b]$. Tenemos, por tanto,

$$V_f(c, b) - V_f(x_1, b) < \varepsilon.$$

Pero

$$\begin{aligned} 0 \le V(x_1) - V(c) &= V_f(a, x_1) - V_f(a, c) \\ &= V_f(c, x_1) = V_f(c, b) - V_f(x_1, b) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Con lo cual hemos probado que

$$0 < x_1 - c < \delta \quad \text{implica} \quad 0 \le V(x_1) - V(c) < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $V(c+) = V(c)$. Un razonamiento análogo lleva al resultado $V(c-) = V(c)$. El teorema queda entonces demostrado para todos los puntos interiores de $[a, b]$. (Para los puntos extremos son necesarias ciertas modificaciones triviales.)

Combinando el teorema 6.14 con el 6.13, podemos establecer

Teorema 6.15. *Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces f es variación acotada en $[a, b]$ si, y sólo si, f se puede expresar como diferencia de dos funciones crecientes continuas.*

NOTA. El teorema se verifica también si reemplazamos «creciente» por «estrictamente creciente».

Es claro que las discontinuidades de una función de variación acotada (si existen) deberán ser discontinuidades de salto en virtud del teorema 6.13. Además, el teorema 6.2 nos dice que constituyen un conjunto numerable.

6.9 CURVAS Y CAMINOS

Sea $\mathbf{f}: [a, b] \to \mathbf{R}^n$ una función vectorial, continua en un intervalo compacto $[a, b]$ de $\mathbf{R}$. Cuando t recorre $[a, b]$, los valores $\mathbf{f}(t)$ de la función describen un conjunto de puntos de $\mathbf{R}^n$ llamado *gráfica* de $\mathbf{f}$ o *curva* descrita por $\mathbf{f}$. Una curva es un subconjunto compacto y conexo de $\mathbf{R}^n$ dado que es la imagen continua de un intervalo compacto. La función $\mathbf{f}$ se llama un *camino*.

Es a veces útil imaginarse una curva como trazada por una partícula móvil. El intervalo $[a, b]$ puede ser interpretado como un intervalo de tiempo y el vector $\mathbf{f}(t)$ determina la posición de la partícula en el instante t. En esta interpretación, la función $\mathbf{f}$ se denomina un *movimiento*.

Distintos caminos pueden dibujar la misma curva. Por ejemplo, las dos funciones complejas

$$f(t) = e^{2\pi i t}, \qquad g(t) = e^{-2\pi i t}, \qquad 0 \le t \le 1,$$

dibujan ambas el círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$, pero los puntos son recorridos en sentidos opuestos. El mismo círculo lo dibuja cinco veces la función $h(t) = e^{10\pi i t}$, $0 \le t \le 1$.

6.10 CAMINOS RECTIFICABLES Y LONGITUD DE UN ARCO

A continuación introducimos el concepto de longitud de un arco de curva. La idea consiste en aproximar la curva por medio de polígonos inscritos, técnica aprendida de los antiguos geómetras. Nuestra intuición nos asegura que la longitud de cualquier polígono inscrito no excederá a la de la curva (dado que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos), luego la longitud de una curva deberá ser una cota superior de las longitudes de todos los polígonos inscritos. Por consiguiente, parece natural definir la longitud de una curva como el extremo superior de las longitudes de todos los polígonos inscritos posibles.

Para la mayoría de las curvas que aparecen en la práctica, esto proporciona una definición útil de longitud de arco. Sin embargo, como veremos en seguida, existen curvas para las cuales el extremo superior de las longitudes de los polígonos inscritos *no* existe. Por tanto, es necesario clasificar las curvas en dos categorías: las que tienen longitud y las que no. Las primeras se denominan *rectificables*, las segundas *no rectificables*.

Daremos ahora una descripción formal de estas ideas.

Sea $\mathbf{f}:[a, b] \to \mathbf{R}^n$ un camino en $\mathbf{R}^n$. Para una partición cualquiera de $[a, b]$, dada por

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\},$$

los puntos $\mathbf{f}(t_0)$, $\mathbf{f}(t_1)$, ..., $\mathbf{f}(t_m)$ son los vértices de un polígono inscrito. (Puede verse un ejemplo en la figura 6.1.) La longitud de este polígono la designaremos por $\Lambda_{\mathbf{f}}(P)$ y se define como la suma

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(P) = \sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{f}(t_k) - \mathbf{f}(t_{k-1})\|.$$

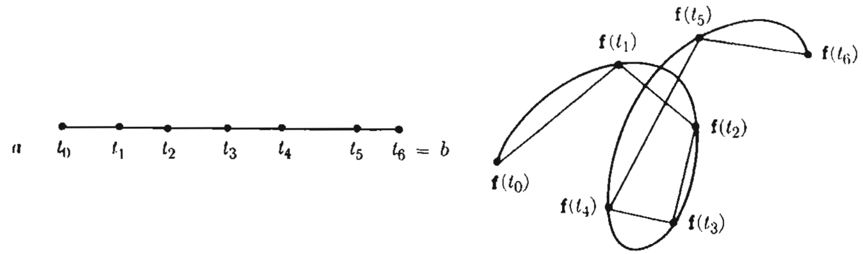


Figura 6.1

Definición 6.16. *Si el conjunto de números $\Lambda_{\mathbf{f}}(P)$ está acotado para todas las particiones P de $[a, b]$, entonces el camino $\mathbf{f}$ se llama rectificable y su longitud de arco, designada por $\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b)$, se define por*

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) = \sup \{\Lambda_{\mathbf{f}}(P) : P \in \mathscr{P}[a, b]\}.$$

Si el conjunto de números $\Lambda_{\mathbf{f}}(P)$ no está acotado, $\mathbf{f}$ se llama no rectificable.

Existe un método fácil para caracterizar todas las curvas rectificables.

Teorema 6.17. *Consideremos un camino $\mathbf{f}:[a, b] \to \mathbf{R}^n$ de componentes $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Entonces $\mathbf{f}$ es rectificable si, y sólo si, cada componente f_k es de variación acotada en $[a, b]$. Si $\mathbf{f}$ es rectificable, tenemos las desigualdades*

$$V_k(a, b) \le \Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) \le V_1(a, b) + \cdots + V_n(a, b), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

en donde $V_k(a, b)$ designa la variación total de f_k en $[a, b]$.

Demostración. Si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ es una partición de $[a, b]$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{m} |f_k(t_i) - f_k(t_{i-1})| \le \Lambda_{\mathbf{f}}(P) \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |f_j(t_i) - f_j(t_{i-1})|, \qquad (3)$$

para cada k. Todas las afirmaciones del teorema se siguen fácilmente de (3).

Ejemplos

1. Como hemos indicado anteriormente, la función dada por $f(x) = x \cos \{\pi/(2x)\}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$, es continua pero no es de variación acotada en $[0, 1]$. Por lo cual su grafo no es una curva rectificable.
2. Es posible demostrar (ejercicio 7.21) que si $\mathbf{f}'$ es continua en $[a, b]$, entonces $\mathbf{f}$ es rectificable y su longitud de arco puede obtenerse por medio de una integral.

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) = \int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\| \, dt.$$

6.11 PROPIEDADES DE ADITIVIDAD Y DE CONTINUIDAD DE LA LONGITUD DE ARCO

Sea $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ un camino rectificable definido en $[a, b]$. Entonces cada una de las componentes f_k es de variación acotada en cada subintervalo $[x, y]$ de $[a, b]$. En esta sección fijamos $\mathbf{f}$ y estudiamos la longitud de arco $\Lambda_{\mathbf{f}}(x, y)$ como función del intervalo $[x, y]$. Ante todo demostraremos una propiedad aditiva.

Teorema 6.18. *Si $c \in (a, b)$ tenemos*

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) = \Lambda_{\mathbf{f}}(a, c) + \Lambda_{\mathbf{f}}(c, b).$$

Demostración. Añadamos el punto c a la partición P de $[a, b]$; obtendremos así una partición de $[a, c]$ y una partición de $[c, b]$ que designaremos, respectivamente, P_1 y P_2 tales que

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(P) \le \Lambda_{\mathbf{f}}(P_1) + \Lambda_{\mathbf{f}}(P_2) \le \Lambda_{\mathbf{f}}(a, c) + \Lambda_{\mathbf{f}}(c, b).$$

Esto implica que $\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) \le \Lambda_{\mathbf{f}}(a, c) + \Lambda_{\mathbf{f}}(c, b)$. Para obtener la desigualdad en el otro sentido, sean P_1 y P_2 particiones arbitrarias de $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente. Entonces

$$P = P_1 \cup P_2,$$

es una partición de $[a, b]$ para la que tenemos

$$\Lambda_f(P_1) + \Lambda_f(P_2) = \Lambda_f(P) \leq \Lambda_f(a, b).$$

Puesto que el supremo de todas las sumas $\Lambda_f(P_1) + \Lambda_f(P_2)$ es la suma $\Lambda_f(a\ c) + \Lambda_f(c, b)$ (ver teorema 1.15), el teorema está demostrado.

Teorema 6.19. *Consideremos un camino rectificable* **f** *definido en* $[a, b]$. *Si* $x \in (a, b]$, *sea* $s(x) = \Lambda_f(a, x)$ *y sea* $s(a) = 0$. *Entonces tendremos:*

i) *La función s así definida es creciente y continua en* $[a, b]$.

ii) *Si no existe ningún subintervalo de* $[a, b]$ *en el que* **f** *sea constante, entonces s es estrictamente creciente en* $[a, b]$.

Demostración. Si $a \leq x < y \leq b$, el teorema 6.18 implica $s(y) - s(x) = \Lambda_f(x, y) \geq 0$. Ello prueba que s es creciente en $[a, b]$. Además tenemos que $s(y) - s(x) > 0$ a no ser que $\Lambda_f(x, y) = 0$. Pero, en virtud de la desigualdad (2), $\Lambda_f(x, y) = 0$ implica $V_k(x, y) = 0$ para cada k y esto, a su vez, implica que **f** es constante en $[x, y]$. Por consiguiente (ii) se verifica.

Para demostrar que s es continua, utilizaremos, de nuevo, la desigualdad (2) para escribir

$$0 \leq s(y) - s(x) = \Lambda_f(x, y) \leq \sum_{k=1}^{n} V_k(x, y).$$

Si hacemos que $y \to x$, obtenemos que cada término $V_k(x, y) \to 0$ y por consiguiente $s(x) = s(x+)$. Análogamente, $s(x) = s(x-)$ y la demostración está terminada.

6.12 CAMINOS EQUIVALENTES. CAMBIOS DE PARÁMETRO

En esta sección se analiza una clase de caminos en la que todos tienen el mismo grafo. Sea $\mathbf{f}: [a, b] \to \mathbf{R}^n$ un camino de $\mathbf{R}^n$ y sea $u: [c, d] \to [a, b]$ una función real, continua y estrictamente monótona en $[c, d]$ con recorrido $[a, b]$. Entonces la función compuesta $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ u$ dada por

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}[u(t)] \qquad \text{para } c \leq t \leq d,$$

es un camino cuya gráfica coincide con la de **f**. Dos caminos **f** y **g** como los mencionados se llaman *equivalentes*. Se dice que ambas funciones proveen representaciones paramétricas distintas de una misma curva. La función u define un *cambio de parámetros*.

Designemos por C la gráfica común a los dos caminos equivalentes **f** y **g**.

Si u es estrictamente creciente, se dice que **f** y **g** dibujan a C en la *misma dirección*. Si u es estrictamente decreciente, se dice que **f** y **g** dibujan a C en *direcciones opuestas*. En el primer caso, se dice que *u preserva el orden*; en el segundo caso, que *invierte el orden*.

Teorema 6.20. *Sean* $\mathbf{f}: [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *y* $\mathbf{g}: [c, d] \to \mathbf{R}^n$ *dos caminos en* $\mathbf{R}^n$, *cada uno de los cuales es uno a uno en su dominio. Entonces* **f** *y* **g** *son equivalentes si, y sólo si, tienen la misma gráfica.*

Demostración. Caminos equivalentes tienen, necesariamente, la misma gráfica. Para demostrar el recíproco, supongamos que **f** y **g** tienen la misma gráfica. Puesto que **f** es uno a uno y continua en el conjunto compacto $[a, b]$, en virtud del teorema 4.29 sabemos que $\mathbf{f}^{-1}$ existe y es continua en su gráfica. Definamos $u(t) = \mathbf{f}^{-1}[\mathbf{g}(t)]$ si $t \in [c, d]$. Entonces u es continua en $[c, d]$ y $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}[u(t)]$. El lector podrá comprobar fácilmente que u es estrictamente monótona, y que por lo tanto **f** y **g** son caminos equivalentes.

EJERCICIOS

Funciones de variación acotada

6.1 Determinar cuáles de las siguientes funciones son de variación acotada en $[0, 1]$.

a) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

b) $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

6.2 Una función f, definida en $[a, b]$, verifica una condición uniforme de Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en $[a, b]$ si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < M|x - y|^\alpha$ para todo x e y de $[a, b]$. (Comparar con el ejercicio 5.1.)

a) Si f es una tal función, probar que $\alpha > 1$ implica que f es constante en $[a, b]$, mientras que $\alpha = 1$ implica que f es de variación acotada en $[a, b]$.

b) Dar un ejemplo de una función f que satisfaga una condición uniforme de Lipschitz de orden $\alpha < 1$ en $[a, b]$ tal que f no sea de variación acotada en $[a, b]$.

c) Dar un ejemplo de una función f que sea de variación acotada y que, sin embargo, no satisfaga ninguna condición uniforme de Lipschitz en $[a, b]$.

6.3 Probar que una función polinómica f es de variación acotada en todo intervalo compacto $[a, b]$. Describir un método que permita calcular la variación total de f en $[a, b]$ conociendo los ceros de la derivada f'.

6.4 Un conjunto no vacío S de funciones reales definidas en un intervalo $[a, b]$ se llama *espacio vectorial de funciones* si verifica las siguientes propiedades:

a) Si $f \in S$, entonces $cf \in S$ para cada número real c.

b) Si $f \in S$ y $g \in S$, entonces $f + g \in S$.

El teorema 6.9 demuestra que el conjunto V de todas las funciones de variación acotada en $[a, b]$ constituye un espacio vectorial. Si S es un espacio vectorial que contiene todas las funciones monótonas en $[a, b]$, probar que $V \subseteq S$. Este resultado puede enunciarse diciendo que las funciones de variación acotada constituyen el menor espacio vectorial que contiene a todas las funciones monótonas.

6.5 Sea f una función real definida en $[0, 1]$ tal que $f(0) > 0$, $f(x) \neq x$ para todo x, y $f(x) \le f(y)$ siempre que $x \le y$. Sea $A = \{x : f(x) > x\}$. Probar que $\sup A \in A$ y que $f(1) > 1$.

6.6 Si f está definida en todo $\mathbf{R}^1$, entonces se dice que f es de variación acotada en $(-\infty, +\infty)$ si f es de variación acotada en cada intervalo finito y si existe un número positivo M tal que $V_f(a, b) < M$ para todo intervalo compacto $[a, b]$. La variación total de f en $(-\infty, +\infty)$ es, entonces, el supremo de todos los números $V_f(a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, y se designa por $V_f(-\infty, +\infty)$. Definiciones análogas se aplican a los intervalos infinitos semiabiertos $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$.

a) Establecer y demostrar para el intervalo infinito $(-\infty, +\infty)$ teoremas análogos a los teoremas 6.7, 6.9, 6.10, 6.11 y 6.12.

b) Demostrar que el teorema 6.5 es cierto para $(-\infty, +\infty)$ si «monótona» se sustituye por «monótona y acotada». Establecer y demostrar una modificación análoga para el teorema 6.13.

6.7 Supongamos que f es una función de variación acotada en $[a, b]$ y sea

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}[a, b].$$

Como es usual, escribimos $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Definimos

$$A(P) = \{k : \Delta f_k > 0\}, \qquad B(P) = \{k : \Delta f_k < 0\}.$$

Los números

$$p_f(a, b) = \sup \left\{ \sum_{k \in A(P)} \Delta f_k : P \in \mathscr{P}[a, b] \right\}$$

y

$$n_f(a, b) = \sup \left\{ \sum_{k \in B(P)} |\Delta f_k| : P \in \mathscr{P}[a, b] \right\}$$

se llaman, respectivamente, variaciones positivas y negativas de f en $[a, b]$. Para cada x de $(a, b]$, sean $V(x) = V_f(a, x)$, $p(x) = p_f(a, x)$, $n(x) = n_f(a, x)$, y $V(a) = p(a) = n(a) = 0$. Demostrar que se tiene:

a) $V(x) = p(x) + n(x)$.

b) $0 \le p(x) \le V(x)$ y $0 \le n(x) \le V(x)$.

c) p y n son crecientes en $[a, b]$.

d) $f(x) = f(a) + p(x) - n(x)$. (La parte (d) da una nueva demostración del teorema 6.13.)

e) $2p(x) = V(x) + f(x) - f(a)$, $\qquad 2n(x) = V(x) - f(x) + f(a)$.

f) Cada uno de los puntos de continuidad de f es también un punto de continuidad de p y de n.

Curvas

6.8 Sean f y g funciones complejas definidas como sigue:

$$f(t) = e^{2\pi i t} \quad \text{si } t \in [0, 1], \qquad g(t) = e^{2\pi i t} \quad \text{si } t \in [0, 2].$$

a) Demostrar que f y g tienen el mismo grafo pero en cambio, de acuerdo con la definición de la sección 6.12, no son equivalentes.

b) Probar que la longitud de g es el doble que la de f.

6.9 Sea $\mathbf{f}$ un camino rectificable de longitud L definido en $[a, b]$, y supongamos que $\mathbf{f}$ no es constante en ningún subintervalo de $[a, b]$. Si s designa la función longitud de arco dada por $s(x) = \Lambda_f(a, x)$ si $a < x \le b$, y $s(a) = 0$.

a) Probar que s^{-1} existe y es continua en $[0, L]$.

b) Definir $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}[s^{-1}(t)]$ si $t \in [0, L]$ y probar que $\mathbf{g}$ es equivalente a $\mathbf{f}$. Dado que $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}[s(t)]$, la función $\mathbf{g}$ nos proporciona una representación de la gráfica de $\mathbf{f}$ que tiene por parámetro la longitud de arco.

6.10 Sean f y g dos funciones reales continuas y de variación acotada definidas en $[a, b]$, con $0 < f(x) < g(x)$ para cada x de (a, b), $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$. Sea h la función compleja definida en el intervalo $[a, 2b - a]$ como sigue:

$$\begin{aligned} h(t) &= t + if(t), & &\text{si } a \le t \le b, \\ h(t) &= 2b - t + ig(2b - t), & &\text{si } b \le t \le 2b - a. \end{aligned}$$

a) Demostrar que h describe una curva rectificable Γ.

b) Explicar por medio de un dibujo las relaciones geométricas existentes entre f, g y h.

c) Demostrar que el conjunto de puntos

$$S = \{(x, y) : a \le x \le b, \ f(x) \le y \le g(x)\}$$

es una región del plano $\mathbf{R}^2$ cuya frontera es la curva Γ.

d) Sea H la función compleja definida en $[a, 2b-a]$ como sigue:

$$\begin{aligned} H(t) &= t - \tfrac{1}{2}i[g(t) - f(t)], & &\text{si } a \le t \le b, \\ H(t) &= t + \tfrac{1}{2}i[g(2b - t) - f(2b - t)], & &\text{si } b \le t \le 2b - a. \end{aligned}$$

Probar que H describe una curva rectificable Γ_0 que es la frontera de la región

$$S_0 = \{(x, y) : a \le x \le b, \ f(x) - g(x) \le 2y \le g(x) - f(x)\}.$$

e) Probar que S_0 posee al eje de las abscisas como eje de simetría. (La región S_0 se llama la *simetrización* de S con respecto al *eje de las abscisas*.)

f) Probar que la longitud de Γ_0 no excede a la longitud de Γ.

Funciones absolutamente continuas

Una función real f definida en $[a, b]$ se llama *absolutamente continua* en $[a, b]$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

para cada n subintervalos abiertos disjuntos (a_k, b_k) de $[a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que la suma de sus longitudes $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$ sea menor que δ.

Las funciones absolutamente continuas intervienen en la teoría de la integración y diferenciación de Lebesgue. Los ejercicios propuestos a continuación dan algunas de sus propiedades elementales.

6.11 Probar que cada función absolutamente continua en $[a, b]$ es continua y de variación acotada en $[a, b]$.

NOTA. Existen funciones continuas y de variación acotada que no son absolutamente continuas.

6.12 Probar que f es absolutamente continua si satisface una condición uniforme de Lipschitz de orden 1 en $[a, b]$. (Ver ejercicio 6.2.)

6.13 Si f y g son absolutamente continuas en $[a, b]$, probar que cada una de las siguientes funciones también lo es: $|f|$, cf, (c constante), $f+g$, $f \cdot g$; además f/g si g está acotada en valor absoluto por un número mayor que cero.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

6.1 Apostol, T. H., *Calculus*, Vol. 1, 2.ª ed. Ed. Reverté, S. A. Barcelona, Bogotá, Buenos Aires, Caracas, México.

6.2 Natanson, I. P., *Theory of Functions of a Real Variable*, Vol. 1, ed. rev. Traductor, Leo F. Boron. Ungar, New York, 1961.

CAPÍTULO 7

La integral de Riemann - Stieltjes

7.1 INTRODUCCIÓN

El Cálculo trata principalmente dos problemas geométricos: encontrar la tangente a una curva, y hallar el área limitada por una curva. El primero se resuelve por medio de un paso al límite, conocido con el nombre de *diferenciación*; el segundo, por medio de otro paso al límite —la *integración*— del que trataremos ahora.

El lector recordará que en el Cálculo elemental para hallar el área de una región limitada por la gráfica de una función positiva f definida en $[a, b]$, dividíamos el intervalo $[a, b]$ en un cierto número de subintervalos, por ejemplo n, designando por medio de Δx_k la longitud del intervalo k-ésimo, y considerábamos las sumas de la forma $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$, en donde t_k designa un cierto punto del intervalo k-ésimo. Una suma de este tipo es una aproximación, mediante rectángulos, del área que intentamos calcular. Si f es una función con comportamiento suficiente regular en $[a\ b]$ —por ejemplo, continua—, entonces cabe la esperanza de que estas sumas tengan un límite cuando $n \to \infty$, si hacemos las subdivisiones cada vez más finas. Lo expuesto es lo que constituye, hablando grosso modo, la definición de Riemann de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$. (Más adelante daremos una definición precisa.)

Los dos conceptos, derivada e integral, se presentan por caminos verdaderamente diferentes y es un hecho realmente notable que resulte que ambos conceptos están íntimamente relacionados. Si consideramos la integral definida de una función continua f como una función de su límite superior, es decir escribimos

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

entonces F posee derivada y $F'(x) = f(x)$. Este importante resultado prueba que, en un cierto sentido, la diferenciación y la integración son operaciones inversas.

En este capítulo se estudia el proceso de integración con cierto detalle. En realidad consideramos un concepto más general que el de Riemann: a saber, la *integral de Riemann-Stieltjes*, que involucra dos funciones f y α. El símbolo que utilizamos para designar tales integrales es $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$, o alguno similar, y la integral de Riemann se obtiene como caso particular cuando $\alpha(x) = x$. Cuando α tiene derivada continua, la definición es tal que la integral de Sieltjes $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ se convierte en la integral de Riemann $\int_a^b f(x)\, \alpha'(x)\, dx$. Sin embargo, la integral de Stieltjes tiene sentido en el caso en que α no es diferenciable e incluso cuando no es continua. De hecho, es al tratar con funciones *discontinuas* α cuando se hace patente la importancia de la integral de Stieltjes. Eligiendo adecuadamente una función discontinua α, una suma finita o infinita puede expresarse como una integral de Stieltjes, y la sumación y la integral de Riemann ordinaria son casos especiales de este proceso más general. Los problemas físicos que consideran la distribución de masas que son en parte discretas y en parte continuas pueden ser abordados utilizando la integral de Stieltjes. En la teoría matemática de la probabilidad esta integral es un instrumento muy útil que hace posible la consideración simultánea de variables aleatorias continuas y discretas.

En el capítulo 10 estudiaremos otra generalización de la integral de Riemann, conocida con el nombre de *integral de Lebesgue*.

7.2 NOTACIÓN

Para abreviar establecemos ciertos convenios de notación y de terminología que se utilizarán a lo largo de este capítulo. Trabajaremos con un intervalo compacto $[a, b]$ y, salvo advertencia explícita, todas las funciones designadas por f, g α, β, etc., se considerarán funciones reales definidas y *acotadas* en $[a, b]$. Las funciones complejas se tratarán en la sección 7.27, y las extensiones a funciones no acotadas y a intervalos infinitos se desarrollarán en el capítulo 10.

Como en el capítulo 6, una partición P de $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos, por ejemplo

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

tal que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Una partición P' de $[a, b]$ es *más fina* que P (o un *refinamiento* de P) si $P \subseteq P'$, que se expresa también escribiendo $P' \supseteq P$. El símbolo $\Delta\alpha_k$ designa la diferencia $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$, luego

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k = \alpha(b) - \alpha(a).$$

El conjunto de todas las posibles partitciones de $[a, b]$ se designa por $\mathcal{P}[a, b]$.

La norma de una partición P es la longitud del mayor de los subintervalos de P y se designa por medio de $\|P\|$. Obsérvese que

$$P' \supseteq P \quad \text{implica} \quad \|P'\| \leq \|P\|.$$

Esto es, los refinamientos de una partición hacen decrecer su norma, pero el recíproco no se verifica necesariamente.

7.3 LA DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

Definición 7.1. *Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea t_k un punto del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Una suma de la forma*

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\alpha_k$$

se llama una suma de Riemann-Stieltjes de f respecto de α. Diremos que f es Riemann-integrable respecto de α en $[a, b]$, y escribiremos «$f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$» si existe un número A que satisface la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que, para cada partición P más fina que P_ε y para cada elección de los puntos t_k del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, se tiene $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$.

Cuando tal número A existe, es único y se representa por medio de $\int_a^b f\, d\alpha$ o por medio de $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$. Diremos también que *existe* la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f\, d\alpha$. Las funciones f y α se denominan, respectivamente, *integrando* e *integrador*. En el caso particular en que $\alpha(x) = x$, escribiremos $S(P, f)$ en vez de $S(P, f, \alpha)$, y $f \in R$ en vez de $f \in R(\alpha)$. La integral se llama, entonces, integral de Riemann y se desgina por $\int_a^b f\, dx$ o por $\int_a^b f(x)\, dx$. El valor numérico de $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ depende exclusivamente de f, α, a y b, y no depende en absoluto del símbolo x. La letra x es una «variable muda» y puede ser substituida por cualquier otro símbolo conveniente.

NOTA. Ésta es una de las diversas definiciones aceptadas de la integral de Riemann-Stieltjes. Otra definición (que no es equivalente a esta) se establece en el ejercicio 7.3.

7.4 PROPIEDADES LINEALES

Es fácil demostrar que la integral opera de forma lineal tanto sobre el integrando como sobre el integrador. Éste es el sentido de los dos teoremas que siguen.

Teorema 7.2. *Si $f \in R(\alpha)$ y si $g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, entonces $c_1f + c_2g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ (para todo par de constantes c_1 y c_2) y se tiene*

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\, d\alpha = c_1 \int_a^b f\, d\alpha + c_2 \int_a^b g\, d\alpha.$$

Demostración. Sea $h = c_1f + c_2g$. Dada una partición P de $[a, b]$ podemos escribir

$$S(P, h, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} h(t_k)\, \Delta\alpha_k = c_1 \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\alpha_k + c_2 \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\, \Delta\alpha_k$$
$$= c_1 S(P, f, \alpha) + c_2 S(P, g, \alpha).$$

Dado $\varepsilon > 0$, elijamos P'_ε tal que $P \supseteq P'_\varepsilon$ implique $|S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha| < \varepsilon$, y elijamos P''_ε tal que $P \supseteq P''_\varepsilon$ implique $|S(P, g, \alpha) - \int_a^b g\, d\alpha| < \varepsilon$. Si tomamos $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$, entonces, para P más fina que P_ε se tiene

$$\left| S(P, h, \alpha) - c_1 \int_a^b f\, d\alpha - c_2 \int_a^b g\, d\alpha \right| \leq |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon,$$

y esto prueba el teorema.

Teorema 7.3. *Si $f \in R(\alpha)$ y $f \in R(\beta)$ en $[a, b]$, entonces $f \in R(c_1\alpha + c_2\beta)$ en $[a, b]$ (para todo par de constantes c_1 y c_2) y se tiene*

$$\int_a^b f\, d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f\, d\alpha + c_2 \int_a^b f\, d\beta.$$

La demostración es análoga a la del teorema 7.2 y se deja como ejercicio.

Un resultado en cierta manera análogo a los dos teoremas anteriores nos dice que la integral también es aditiva con respecto al intervalo de integración.

Teorema 7.4. *Supongamos que $c \in (a, b)$. Si dos de las integrales de (1) existen, entonces la tercera también existe y además se tiene*

$$\int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha. \tag{1}$$

Demostración. Si P es una partición de $[a, b]$ tal que $c \in P$, sean

$$P' = P \cap [a, c] \qquad \text{y} \qquad P'' = P \cap [c, b],$$

Aplicando el teorema del valor medio, podemos escribir

$$\Delta\alpha_k = \alpha'(v_k)\, \Delta x_k, \quad \text{en donde } v_k \in (x_{k-1}, x_k),$$

y por lo tanto,

$$S(P, f, \alpha) - S(P, g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)]\, \Delta x_k.$$

Dado que f está acotada, tenemos $|f(x)| \leq M$ para todo x de $[a, b]$, siendo $M > 0$. La continuidad de α' en $[a, b]$ implica la continuidad uniforme en $[a, b]$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ (que sólo depende de ε) tal que

$$0 \leq |x - y| < \delta \quad \text{implica} \quad |\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \frac{\varepsilon}{2M(b - a)}.$$

Si tomamos una partición P'_ε de norma $\|P'_\varepsilon\| < \delta$, entonces para cada partición más fina P tendremos que $|\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)| < \varepsilon/[2M(b - a)]$ en la ecuación precedente. Para tal partición P tenemos, pues,

$$|S(P, f, \alpha) - S(P, g)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, puesto que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, existe una partición P''_ε tal que si P es más fina que P''_ε se tiene

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Combinando estas dos últimas desigualdades, vemos que cuando P es más fina que $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ tenemos $|S(P, g) - \int_a^b f\, d\alpha| < \varepsilon$, y esto completa la demostración.

NOTA. Un resultado más fuerte que no requiere la continuidad de α' se demuestra en el teorema 7.35.

7.8 FUNCIONES ESCALONADAS COMO INTEGRADORES

Si α es constante en todo el intervalo $[a, b]$, la integral $\int_a^b f\, d\alpha$ existe y vale 0, ya que cada suma $S(P, f, \alpha) = 0$. Sin embargo, si α es constante excepto en un punto en el que presenta una discontinuidad de salto, la integral $\int_a^b f\, d\alpha$ no tiene por qué existir y, si existe, no tiene por qué valer cero. Una descripción más completa la da el siguiente teorema:

Teorema 7.9. *Dados $a < c < b$, definimos α en $[a, b]$ como sigue: Los valores $\alpha(a)$, $\alpha(c)$, $\alpha(b)$ son arbitrarios:*

$$\alpha(x) = \alpha(a) \qquad \text{si } a \le x < c,$$

y

$$\alpha(x) = \alpha(b) \qquad \text{si } c < x \le b.$$

Sea f una función definida en $[a, b]$ de manera que una por lo menos de las funciones f o α sea continua a la izquierda de c y una por lo menos lo sea a la derecha de c. Entonces $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y se tiene

$$\int_a^b f\, d\alpha = f(c)[\alpha(c+) - \alpha(c-)].$$

NOTA. El resultado es válido si $c = a$, con tal de que escribamos $\alpha(c)$ en lugar de $\alpha(c-)$, y es válido para $c = b$ si escribimos $\alpha(c)$ en lugar de $\alpha(c+)$. Más adelante demostraremos (teorema 7.29) que la integral no existe si f y α son discontinuas a la derecha o a la izquierda de c.

Demostración. Si $c \in P$, cada término de la suma $S(P, f, \alpha)$ es cero excepto en los dos términos procedentes del subintervalo separado por c; así

$$S(P, f, \alpha) = f(t_{k-1})[\alpha(c) - \alpha(c-)] + f(t_k)[\alpha(c+) - \alpha(c)],$$

en donde $t_{k-1} \le c \le t_k$. Esta ecuación se puede escribir también:

$$\Delta = [f(t_{k-1}) - f(c)][\alpha(c) - \alpha(c-)] + [f(t_k) - f(c)][\alpha(c+) - \alpha(c)],$$

en donde $\Delta = S(P, f, \alpha) - f(c)[\alpha(c+) - \alpha(c-)]$. Por lo tanto tenemos

$$|\Delta| \le |f(t_{k-1}) - f(c)|\,|\alpha(c) - \alpha(c-)| + |f(t_k) - f(c)|\,|\alpha(c+) - \alpha(c)|.$$

Si f es continua en c, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|P\| < \delta$ implica

$$|f(t_{k-1}) - f(c)| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |f(t_k) - f(c)| < \varepsilon.$$

En este caso, obtenemos la desigualdad

$$|\Delta| \le \varepsilon|\alpha(c) - \alpha(c-)| + \varepsilon|\alpha(c+) - \alpha(c)|.$$

Pero esta desigualdad es legítima tanto si f es continua en c como si no lo es. Por ejemplo, si f es discontinua a la derecha y a la izquierda de c, entonces $\alpha(c) = \alpha(c-)$ y $\alpha(c) = \alpha(c+)$ y obtenemos $\Delta = 0$. Por otra parte, si f es continua a la izquierda pero discontinua a la derecha de c, deberá verificarse $\alpha(c) = \alpha(c+)$ y obtendremos $|\Delta| \le \varepsilon\,|\alpha(c) - \alpha(c-)|$. Análogamente, si f es continua a la derecha y discontinua a la izquierda de c, tendremos $\alpha(c) = \alpha(c-)$ y $|\Delta| \le \varepsilon\,|\alpha(c+) - \alpha(c)|$. Por lo tanto, la última desigualdad escrita se verifica en todos los casos. Esto termina la demostración.

Ejemplo. El teorema 7.9 nos dice que el valor de la integral de Riemann-Stieltjes puede ser alterado cambiando el valor de f en un solo punto. Los ejemplos que siguen muestran además que la *existencia* de la integral puede resultar afectada por tales cambios. Sea

$$\alpha(x) = 0, \quad \text{si } x \ne 0, \quad \alpha(0) = -1,$$

$$f(x) = 1, \quad \text{si } -1 \le x \le +1.$$

En este caso, el teorema 7.9 implica $\int_{-1}^{1} f\, d\alpha = 0$. Pero si volvemos a definir f de tal manera que $f(0) = 2$ y $f(x) = 1$ si $x \ne 0$, se ve fácilmente que $\int_{-1}^{1} f\, d\alpha$ no existe. Efectivamente, si P es una partición que contiene a 0 como punto de subdivisión, obtenemos

$$S(P, f, \alpha) = f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(0)] + f(t_{k-1})[\alpha(0) - \alpha(x_{k-2})]$$
$$= f(t_k) - f(t_{k-1}),$$

en donde $x_{k-2} \le t_{k-1} \le 0 \le t_k \le x_k$. El valor de esta suma es 0, 1 ó -1, según la elección de t_k y t_{k-1}. Por lo cual $\int_{-1}^{1} f\, d\alpha$ no existe en este caso. Sin embargo, en una integral de Riemann $\int_a^b f(x)\, dx$, *podemos* cambiar los valores de f en un número finito de puntos sin que ello afecte ni a la existencia ni al valor de la integral. Para probar esto basta considerar el caso en que $f(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$, excepto para un punto, por ejemplo $x = c$. Para una tal función es obvio que $|S(P, f)| \le |f(c)|\,\|P\|$. Puesto que $\|P\|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, hemos probado que $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

7.9 REDUCCIÓN DE UNA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES A UNA SUMA FINITA

El integrador α del teorema 7.9 es un caso particular de una clase importante de funciones conocidas con el nombre de *funciones escalonadas.* Estas funciones son constantes en todo el intervalo salvo para un número finito de discontinuidades de salto.

Definición 7.10 (función escalonada). *A una función α definida en $[a, b]$ se le llama función escalonada si existe una partición*

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

de modo que α sea constante en cada subintervalo abierto (x_{k-1}, x_k). Al número $\alpha(x_k+) - \alpha(x_k-)$ se le llama el salto en x_k si $1 < k < n$. El salto en x_1 es $\alpha(x_1+) - \alpha(x_1)$ y en x_n es $\alpha(x_n) - \alpha(x_n-)$.

Las funciones escalonadas establecen conexión entre las integrales de Riemann-Stieltjes y las sumas finitas:

Teorema 7.11 ***(Reducción de una integral de Riemann-Stieltjes a una suma finita).*** *Sea α una función escalonada definida en $[a, b]$ con salto α_k en x_k, en donde*

$$x_1, \ldots, x_n$$

son las descritas en la definición 7.10.

Sea f una función definida en $[a, b]$ tal que f y α no sean ambas discontinuas a la derecha o a la izquierda de cada x_k. Entonces $\int_a^b f\,d\alpha$ existe y se tiene

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha_k.$$

Demostración. Por el teorema 7.4, $\int_a^b f\,d\alpha$ puede escribirse como suma de integrales del tipo considerado en el teorema 7.9.

Una de las funciones escalonadas más simple es la *función parte entera*. Su valor en x es, precisamente el valor del mayor entero menor o igual que x y se designa por $[x]$. Así pues, $[x]$ es el único entero que satisface las desigualdades $[x] \le x < [x] + 1$.

Teorema 7.12. *Cada suma finita puede expresarse como una integral de Riemann-Stieltjes. De hecho, dada una suma finita $\sum_{k=1}^{n} a_k$, definimos f en $[0, n]$* como sigue:

$$f(x) = a_k \quad \text{si } k-1 < x \le k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad f(0) = 0.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,d[x],$$

en donde $[x]$ es el mayor entero $\le x$.

Demostración. La función parte entera es una función escalonada continua por la derecha y con salto igual a 1 en cada entero. La función f es continua por la izquierda en $1, 2, \ldots, n$. Basta aplicar el teorema 7.11.

7.10 FÓRMULA DE SUMACIÓN DE EULER

Utilizaremos las integrales de Riemann-Stieltjes para obtener una fórmula notable conocida con el nombre de *fórmula de sumación de Euler*, que relaciona la integral de una función en un intervalo $[a, b]$ con la suma de los valores de la función en los puntos enteros de $[a, b]$. Se utiliza a veces para aproximar integrales mediante sumas o, recíprocamente, para estimar los valores de ciertas sumas por medio de integrales.

Teorema 7.13 ***(Fórmula de sumación de Euler).*** *Si f posee derivada continua f' en $[a, b]$, entonces se tiene*

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f'(x)((x))\,dx + f(a)((a)) - f(b)((b)),$$

en donde $((x)) = x - [x]$. Si a y b son enteros, se obtiene

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f'(x)\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)dx + \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

NOTA. $\sum_{a<n\le b}$ significa la suma desde $n = [a] + 1$ a $n = [b]$.

Demostración. Aplicando el teorema 7.6 (integración por partes), tenemos

$$\int_a^b f(x)\,d(x - [x]) + \int_a^b (x - [x])\,df(x) = f(b)(b - [b]) - f(a)(a - [a]).$$

Puesto que la función parte entera posee saltos unidad en los enteros $[a] + 1$, $[a] + 2, \ldots, [b]$, podemos escribir

$$\int_a^b f(x)\,d[x] = \sum_{a<n\le b} f(n).$$

Si combinamos esta igualdad con la ecuación anterior, el teorema se deduce inmediatamente.

7.11 INTEGRADORES MONÓTONOS CRECIENTES. INTEGRALES SUPERIOR E INFERIOR

La teoría de la integración de Riemann-Stieltjes la desarrollaremos desde ahora para integradores monótonos crecientes, y veremos más adelante (en el teoreen donde M' y M'' designan, respectivamente el sup de f en $[x_{i-1}, c]$ y $[c, x_i]$. Pero, dado que

$$M' \leq M_i(f) \qquad \text{y} \qquad M'' \leq M_i(f),$$

se tiene $U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$. (La desiguadad existente entre las sumas inferiores se demuestra análogamente.)

Para probar (ii), sea $P = P_1 \cup P_2$. Se tiene entonces

$$L(P_1, f, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha).$$

NOTA. De este teorema se sigue también (para α creciente)

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha) \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

en donde M y m designan el sup y el ínf de f en $[a, b]$.

Definición 7.16. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. La integral superior de Stieltjes de f respecto de α se define como sigue:*

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \inf \{U(P, f, \alpha) : P \in \mathscr{P}[a, b]\}.$$

La integral inferior de Stietjes se define análogamente:

$$\underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \sup \{L(P, f, \alpha) : P \in \mathscr{P}[a, b]\}.$$

NOTA. A veces escribiremos $\bar{I}(f, \alpha)$ e $\underline{I}(f, \alpha)$ para designar las integrales superior e inferior. En particular, si $\alpha(x) = x$, las sumas superiores e inferiores se designan por $U(P, f)$ y $L(P, f)$ y se llaman las sumas superior e inferior de Riemann. Las correspondientes integrales, designadas $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx$ y $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$, se llaman integrales superior e inferior de Riemann. Fueron introducidas por primera vez por J. G. Darboux (1875).

Teorema 7.17. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Entonces $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha)$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P_1 tal que

$$U(P_1, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon.$$

Por el teorema 7.15, se tiene que $\bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ es una cota superior de todas las sumas inferiores $L(P, f, \alpha)$. Por lo tanto, $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$, y, puesto que ε es arbitrario, ello implica $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha)$.

Ejemplo. Es fácil dar un ejemplo en el que $\underline{I}(f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha)$. Sea $\alpha(x) = x$ y definamos f en $[0, 1]$ como sigue:

$$f(x) = 1, \text{ si } x \text{ es racional}, \qquad f(x) = 0, \text{ si } x \text{ es irracional}.$$

Entonces para cada partición P de $[0, 1]$, tenemos $M_k(f) = 1$ y $m_k(f) = 0$, ya que cada subintervalo contiene tanto racionales como irracionales. Por consiguiente, $U(P, f) = 1$ y $L(P, f) = 0$ para toda P. Se deduce que, para $[a, b] = [0, 1]$, tenemos

$$\overline{\int_a^b} f\, dx = 1 \qquad \text{e} \qquad \underline{\int_a^b} f\, dx = 0.$$

Obsérvese que se obtendría el mismo resultado si $f(x) = 0$ cuando x es racional, y $f(x) = 1$ cuando x es irracional.

7.12 PROPIEDADES ADITIVA Y LINEAL DE LAS INTEGRALES SUPERIOR E INFERIOR

Las integrales superior e inferior gozan de muchas de las propiedades de la integral. Por ejemplo se tiene que

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \overline{\int_a^c} f\, d\alpha + \overline{\int_c^b} f\, d\alpha,$$

si $a < c < b$, y la misma igualdad se verifica en el caso de la integral inferior. Sin embargo, ciertas igualdades que se verifican con integrales se convierten en desigualdades cuando se reemplazan aquéllas por integrales superiores e inferiores. Por ejemplo, se tiene

$$\overline{\int_a^b} (f + g)\, d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\, d\alpha + \overline{\int_a^b} g\, d\alpha,$$

y

$$\underline{\int_a^b} (f + g)\, d\alpha \geq \underline{\int_a^b} f\, d\alpha + \underline{\int_a^b} g\, d\alpha.$$

Estas observaciones puede verificarlas el lector sin ninguna dificultad. (Ver ejercicio 7.11.)

7.13 CONDICIÓN DE RIEMANN

Si esperamos que la integral superior y la integral inferior sean iguales, también debemos esperar que las sumas superiores sean tan próximas como queramos a las sumas inferiores. Parece pues natural buscar aquellas funciones f para las que la diferencia $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$ puede hacerse arbitrariamente pequeña.

Definición 7.18. *Diremos que f satisface la condición de Riemann respecto de α en $[a, b]$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que si P es más fina que P_ε implica*

$$0 \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon.$$

Teorema 7.19. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Entonces las tres afirmaciones que siguen son equivalentes:*

i) $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$.
ii) *f satisface la condición de Riemann respecto de α en $[a, b]$.*
iii) $\underline{I}(f, \alpha) = \bar{I}(f, \alpha)$.

Demostración. Probaremos que la parte (i) implica la parte (ii), que (ii) implica (iii) y que (iii) implica (i). Supongamos que se verfica (i). Si $\alpha(b) = \alpha(a)$, entonces (ii) se verifica trivialmente, por lo tanto podemos suponer que $\alpha(a) < \alpha(b)$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos P_ε tal que para toda partición P más fina que P_ε y todas las elecciones de t_k y t'_k en $[x_{k-1}, x_k]$, se verifique

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\alpha_k - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

y

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\, \Delta\alpha_k - A\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

en donde $A = \int_a^b f\, d\alpha$. Combinando estas desigualdades, obtenemos

$$\left|\sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\, \Delta\alpha_k\right| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Dado que $M_k(f) - m_k(f) = \sup\,\{f(x) - f(x') : x,\ x' \text{ en } [x_{k-1}, x_k]\}$, se sigue que para cada $h > 0$ es posbile elegir t_k y t'_k tales que

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h.$$

y eligiendo $h = \frac{1}{3}\varepsilon/[\alpha(b) - \alpha(a)]$ podemos escribir

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, \Delta\alpha_k$$
$$< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\, \Delta\alpha_k + h \sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k < \varepsilon.$$

Por consiguiente (i) implica (ii).

Supongamos ahora que (ii) se verifica. Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que P más fina que P_ε implica $U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \varepsilon$. Por lo tanto, para una tal P se tiene

$$\bar{I}(f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \varepsilon \leq \underline{I}(f, \alpha) + \varepsilon.$$

Esto es, $\bar{I}(f, \alpha) < \underline{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Por consiguiente, $\bar{I}(f, \alpha) \leq \underline{I}(f, \alpha)$. Pero en virtud del teorema 7.17, tenemos también la desigualdad opuesta. Por lo tanto (ii) implica (iii).

Finalmente, supongamos que $\bar{I}(f, \alpha) = \underline{I}(f, \alpha)$ y designemos por A dicho valor común. Probaremos que $\int_a^b f\, d\alpha$ existe y es igual a A. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos P'_ε tal que $U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ para toda P más fina que P'_ε. Elegimos asimismo P''_ε tal que

$$L(P, f, \alpha) > \underline{I}(f, \alpha) - \varepsilon$$

para toda P más fina que P''_ε. Si $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$, podemos escribir

$$\underline{I}(f, \alpha) - \varepsilon < L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$$

para cada P más fina que P_ε. Pero dado que $\underline{I}(f, \alpha) = \bar{I}(f, \alpha) = A$, se deduce que $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$ siempre que P sea más fina que P_ε. Todo ello prueba que $\int_a^b f\, d\alpha$ existe y es igual a A y la demostración del teorema queda concluida.

7.14 TEOREMAS DE COMPARACIÓN

Teorema 7.20. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Si $f \in R(\alpha)$ y $g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y si $f(x) \leq g(x)$ para todo x de $[a, b]$, entonces tenemos*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \leq \int_a^b g(x)\, d\alpha(x).$$

Demostración. Para cada partición P, las correspondientes sumas de Riemann-Stieltjes satisfacen

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k \le \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\,\Delta\alpha_k = S(P, g, \alpha),$$

ya que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. De lo que se deduce fácilmente el teorema.

En particular, este teorema implica que $\int_a^b g(x)\,d\alpha(x) \ge 0$ siempre que $g(x) \ge 0$ y $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$.

Teorema 7.21. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, entonces $|f| \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y tenemos la desigualdad*

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \le \int_a^b |f(x)|\,d\alpha(x).$$

Demostración. Utilizando la notación de la definición 7.14, podemos escribir

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \text{ en} [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Dado que la desigualdad $||f(x)| - |f(y)|| \le |f(x) - f(y)|$ se satisface siempre, tenemos

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) \le M_k(f) - m_k(f).$$

Multiplicando ambos miembros por $\Delta\alpha_k$ y sumando respecto de k, se obtiene

$$U(P, |f|, \alpha) - L(P, |f|, \alpha) \le U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha),$$

para cada partición P de $[a, b]$. Aplicando la condición de Riemann, se obtiene que $|f| \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. La desigualdad del teorema se sigue haciendo $g = |f|$ en el teorema 7.20.

NOTA. El recíproco del teorema 7.21 es falso. (Ver ejercicio 7.12.)

Teorema 7.22. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, entonces $f^2 \in R(\alpha)$ en $[a, b]$.*

Demostración. Utilizando la notación de la definición 7.14, tenemos

$$M_k(f^2) = [M_k(|f|)]^2 \qquad \text{y} \qquad m_k(f^2) = [m_k(|f|)]^2.$$

Por lo tanto podemos escribir

$$\begin{aligned} M_k(f^2) - m_k(f^2) &= [M_k(|f|) + m_k(|f|)][M_k(|f|) - m_k(|f|)] \\ &\le 2M[M_k(|f|) - m_k(|f|)], \end{aligned}$$

en donde M designa una cota superior de $|f|$ en $[a, b]$. Aplicando la condición de Riemann, la demostración queda terminada.

Teorema 7.23. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Si $f \in R(\alpha)$ y $g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, entonces el producto $f \cdot g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$.*

Demostración. Se utiliza el teorema 7.22 juntamente con la identidad

$$2f(x)g(x) = [f(x) + g(x)]^2 - [f(x)]^2 - [g(x)]^2.$$

7.15 INTEGRADORES DE VARIACIÓN ACOTADA

En el teorema 6.13 veíamos como toda función α de variación acotada en $[a, b]$ se podía expresar como diferencia de dos funciones crecientes. Si $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ es una tal descomposición y si $f \in R(\alpha_1)$ y $f \in R(\alpha_2)$ en $[a, b]$, se sigue en virtud de la linealidad que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Sin embargo, el recíproco no siempre es verdadero. Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, es posible elegir funciones crecientes α_1 y α_2 tales que $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, pero de tal manera que ninguna de las integrales $\int_a^b f\,d\alpha_1$, $\int_a^b f\,d\alpha_2$ exista. La dificultad se halla, naturalmente, en el hecho de que la descomposición $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ no sea única. Sin embargo, es posible demostrar la existencia de una descomposición, por lo menos, para la cual el recíproco *es* verdadero a saber, cuando α_1 es la variación total de α y $\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha$. (Recuérdese la definición 6.8.)

Teorema 7.24. *Supongamos que α es de variación acotada en $[a, b]$. Designemos por $V(x)$ la variación total de α en $[a, x]$ si $a < x \le b$, y sea $V(a) = 0$. Supongamos que f está definida y acotada en $[a, b]$. Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, entonces $f \in R(V)$ en $[a, b]$.*

Demostración. Si $V(b) = 0$, entonces V es constante y el resultado es trivial. Supongamos por lo tanto que $V(b) > 0$. Supongamos además que $|f(x)| \le M$ si $x \in [a, b]$. Como V es creciente, basta demostrar que f satisface la condición de Riemann respecto de V en $[a, b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, elegimos P_ε tal que para todo refinamiento P y toda elección de puntos t_k y t'_k en $[x_{k-1}, x_k]$ se verifique

$$\left|\sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')]\, \Delta\alpha_k\right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{y} \qquad V(b) < \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k| + \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Para P más fina que P_ε podemos establecer las dos desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)](\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, |\Delta\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

que, sumándolas, nos dan $U(P, f, V) - L(P, f, V) < \varepsilon$.

Para demostrar la primera desigualdad, observemos que $\Delta V_k - |\Delta\alpha_k| \geq 0$ y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)](\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|) \leq 2M \sum_{k=1}^{n} (\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|)$$
$$= 2M\left(V(b) - \sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k|\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para demostrar la segunda desigualdad, sea

$$A(P) = \{k : \Delta\alpha_k \geq 0\}, \qquad B(P) = \{k : \Delta\alpha_k < 0\},$$

y sea $h = \frac{1}{4}\varepsilon/V(b)$. Si $k \in A(P)$, elegimos t_k y t'_k tales que

$$f(t_k) - f(t_k') > M_k(f) - m_k(f) - h;$$

pero, si $k \in B(P)$, elegimos t_k y t'_k tales que $f(t'_k) - f(t_k) > M_k(f) - m_k(f) - h$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, |\Delta\alpha_k| < \sum_{k\in A(P)} [f(t_k) - f(t_k')]\, |\Delta\alpha_k|$$
$$+ \sum_{k\in B(P)} [f(t_k') - f(t_k)]\, |\Delta\alpha_k| + h\sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')]\, \Delta\alpha_k + h\sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k|$$
$$< \frac{\varepsilon}{4} + hV(b) = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Todo ello prueba que $f \in R(V)$ en $[a, b]$.

Nota. Este teorema (juntamente con el teorema 6.12) nos induce a reducir la teoría de la integración de Riemann-Stieltjes para integradores de variación acotada al caso de *integradores crecientes*. Entonces el criterio de Riemann es aplicable y nos proporciona un instrumento verdaderamente útil en nuestro trabajo. Como primera aplicación obtendremos un resultado íntimamente relacionado con el teorema 7.4.

Teorema 7.25. *Sea α de variación acotada en $[a, b]$ y supongamos que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Entonces $f \in R(\alpha)$ en cada subintervalo $[c, d]$ de $[a, b]$.*

Demostración. Sea $V(x)$ la variación total de α en $[a, x]$, con $V(a) = 0$. Entonces $\alpha = V - (V - \alpha)$, en donde tanto V como $V - \alpha$ son ambas crecientes en $[a, b]$ (teorema 6.12). Por el teorema 7.24, $f \in R(V)$, y por lo tanto $f \in R(V - \alpha)$ en $[a, b]$. Por consiguiente, si el teorema es verdadero para integradores crecientes, se tiene que $f \in R(V)$ en $[c, d]$ y $f \in R(V - \alpha)$ en $[c, d]$, luego $f \in R(\alpha)$ en $[c, d]$.

Por lo tanto, es suficiente demostrar el teorema cuando $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. En virtud de teorema 7.4. es suficiente probar que cada una de las integrales $\int_a^c f\, d\alpha$ y $\int_a^d f\, d\alpha$ existe. Supongamos que $a < c < b$. Si P es una partición de $[a, x]$, sea $\Delta(P, x)$ la diferencia

$$\Delta(P, x) = U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha),$$

de las sumas superior e inferior asociadas al intervalo $[a, x]$. Dado que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, la condición de Riemann se verifica. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que $\Delta(B, b) < \varepsilon$ si P es más fina que P_ε. Podemos suponer que $c \in P_\varepsilon$. Los puntos de P_ε que pertenecen a $[a, c]$ definen una partición P'_ε de $[a, c]$. Si P' es una partición de $[a, c]$ más fina que P'_ε, entonces $P = P' \cup P_\varepsilon$ es una partición de $[a, b]$ obtenida juntando los puntos de P' con los puntos que P_ε posee en $[c, b]$. Ahora bien, la suma definida por $\Delta(P', c)$ contiene sólo parte de los términos de la suma definida por $\Delta(P, b)$. Como cada término es ≥ 0 y dado que P es más fina que P_ε, tenemos

$$\Delta(P', c) \leq \Delta(P, b) < \varepsilon.$$

Esto es, P' más fina que P'_ε implica $\Delta(P', c) < \varepsilon$. Por lo tanto, f satisface la condición de Riemann en $[a, c]$ y $\int_a^c f\, d\alpha$ existe. El mismo argumento prueba naturalmente que $\int_a^d f\, d\alpha$ existe, y por el teorema 7.4 se sigue que $\int_c^d f\, d\alpha$ existe.

El teorema que sigue es una aplicación de los teoremas 7.23, 7.21 y 7.25.

Teorema 7.26. *Supongamos que $f \in R(\alpha)$ y $g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, en donde $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Definimos*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, d\alpha(t)$$

y

$$G(x) = \int_a^x g(t)\, d\alpha(t) \quad \text{if } x \in [a, b].$$

Entonces $f \in R(G)$, $g \in R(F)$, y el producto $f \cdot g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y se tiene

$$\int_a^b f(x)g(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, dG(x) = \int_a^b g(x)\, dF(x).$$

Demostración. La integral $\int_a^b f \cdot g\, d\alpha$ existe en virtud del teorema 7.23. Para cada partición P de $[a, b]$ se tiene

$$S(P, f, G) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(t)\, d\alpha(t) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t_k)g(t)\, d\alpha(t),$$

y

$$\int_a^b f(x)g(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)g(t)\, d\alpha(t).$$

Por consiguiente, si $M_g = \sup \{|g(x)| : x \in [a, b]\}$, tenemos

$$\left|S(P, f, G) - \int_a^b f \cdot g\, d\alpha\right| = \left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{f(t_k) - f(t)\}g(t)\, d\alpha(t)\right|$$
$$\leq M_g \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t_k) - f(t)|\, d\alpha(t) \leq M_g \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [M_k(f) - m_k(f)]\, d\alpha(t)$$
$$= M_g\{U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)\}.$$

Puesto que $f \in R(\alpha)$, para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que P más fina que P_ε implica $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$. Ello demuestra que $f \in R(G)$ en $[a, b]$ y que $\int_a^b f \cdot g\, d\alpha = \int_a^b f\, dG$. Un razonamiento análogo prueba que $g \in R(F)$ en $[a, b]$ y que $\int_a^b f \cdot g\, d\alpha = \int_a^b g\, dF$.

NOTA. El teorema 7.26 es válido también si α es de variación acotada en $[a, b]$.

7.16 CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE LAS INTEGRALES DE RIEMANN-STIELTJES

En la mayoría de los teoremas anteriores hemos supuesto que ciertas integrales existían y hemos estudiado entonces sus propiedades. Es natural que nos preguntemos: ¿Cuándo existirá la integral? Dos condiciones suficientes, verdaderamente útiles, responden a esta pregunta.

Teorema 7.27. *Si f es continua en $[a, b]$ y si α es de variación acotada en $[a, b]$, entonces $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$.*

NOTA. En virtud del teorema 7.6, se obtiene una segunda condición suficiente al intercambiar f y α en la hipótesis.

Demostración. Es suficiente demostrar el teorema para $\alpha \nearrow$ con $\alpha(a) < \alpha(b)$. La continuidad de f en $[a, b]$ implica la continuidad uniforme, esto es dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ (que depende tan sólo de ε) tal que

$$|x - y| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon/A,$$

en donde $A = 2[\alpha(b) - \alpha(a)]$. Si P_ε es una partición de norma $\|P_\varepsilon\| < \delta$, entonces para P más fina que P_ε se tendrá

$$M_k(f) - m_k(f) \leq \varepsilon/A,$$

ya que $M_k(f) - m_k(f) = \sup \{f(x) - f(y) : x, y \text{ en } [x_{k-1}, x_k]\}$. Multiplicando la desigualdad por $\Delta\alpha_k$ y sumando, se obtiene

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leq \frac{\varepsilon}{A} \sum_{k=1}^n \Delta\alpha_k = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

y por lo tanto se verifica la condición de Riemann. Por lo tanto, $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$.

En particular, para $\alpha(x) = x$, los teoremas 7.27 y 7.6 proporcionan el siguiente corolario:

Teorema 7.28. *Cada una de las siguientes condiciones es una condición suficiente para que exista la integral $\int_a^b f(x)\, dx$:*

a) *f es continua en $[a, b]$.*
b) *f es de variación acotada en $[a, b]$.*

7.17 CONDICIONES NECESARIAS PARA LA EXISTENCIA DE LAS INTEGRALES DE RIEMANN-STIELTJES

Cuando α es de variación acotada en $[a, b]$, la continuidad de f es suficiente para que exista la integral $\int_a^b f\, d\alpha$. Sin embargo, la continuidad de f en todo $[a, b]$ no es necesaria. Por ejemplo, en el teorema 7.9 veíamos que, cuando la función α es escalonada, la función f puede definirse arbitrariamente en $[a, b]$ con la condición de que f sea continua en los puntos de discontinuidad de α. El próximo teorema nos dice que, si queremos que la integral exista, debemos evitar las discontinuidades comunes tanto por la derecha como por la izquierda.

Teorema 7.29. *Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$ y sea $a < c < b$. Supongamos además que tanto α como f son discontinuas por la derecha en $x = c$; esto es, supongamos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existen valores de x e y en el intervalo $(c, c+\delta)$ para los que*

$$|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon$$

y

$$|\alpha(y) - \alpha(c)| \geq \varepsilon.$$

Entonces la integral $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ no existe. Tampoco existe integral si α y f son discontinuas por la izquierda en c.

Demostración. Sea P una partición de $[a, b]$ que contenga al punto c como punto de partición y consideremos la diferencia

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, \Delta\alpha_k.$$

Si el intervalo i-ésimo contiene al punto c como extremo izquierdo, entonces

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq [M_i(f) - m_i(f)][\alpha(x_i) - \alpha(c)],$$

ya que cada término de la suma es ≥ 0. Si c es una discontinuidad por la derecha común, podemos suponer que el punto x_i se ha elegido de tal manera que $\alpha(x_i) - \alpha(c) \geq \varepsilon$. Por consiguiente, las hipótesis del teorema implican $M_i(f) - m_i(f) \geq \varepsilon$. Luego,

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq \varepsilon^2,$$

y la condición de Riemann no puede verificarse. (Si c es un punto de discontinuidad por la izquierda común, el argumento es análogo.)

7.18 TEOREMAS DEL VALOR MEDIO PARA LAS INTEGRALES DE RIEMANN-STIELTJES

Si bien las integrales aparecen en gran número y variedad de problemas, son relativamente pocos los casos en que el valor de la integral puede obtenerse explícitamente. Sin embargo, a menudo es suficiente disponer de una *estimación* de la integral más que de su valor exacto. Los *teoremas del valor medio* que se dan en esta sección son particularmente útiles para obtener tales estimaciones.

Teorema 7.30 ***(Primer teorema del valor medio para integrales de Riemann-Stieltjes).*** *Supongamos que $\alpha \nearrow$ y que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Si M y m designan, respectivamente, el* sup *y el* inf *del conjunto $\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Entonces existe un número real c que satisface $m \leq c \leq M$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = c \int_a^b d\alpha(x) = c[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

En particular, si f es continua en $[a, b]$, entonces $c = f(x_0)$ para cierto x_0 de $[a, b]$.

Demostración. Si $\alpha(a) = \alpha(b)$, el teorema se verifica trivialmente, ya que ambos miembros son 0. Por lo tanto, podemos suponer que $\alpha(a) < \alpha(b)$. Dado que todas las sumas superiores e inferiores verifican

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

la integral $\int_a^b f\, d\alpha$ debe estar comprendida entre ambas cotas. Por consiguiente, el cociente $c = (\int_a^b f\, d\alpha)/(\int_a^b d\alpha)$ está comprendido entre m y M. Si f es continua en $[a, b]$, el teorema del valor intermedio hace que $c = f(x_0)$ para algún x_0 de $[a, b]$.

Un segundo teorema de este tipo puede obtenerse a partir del primero, utilizando el método de integración por partes.

Teorema 7.31 ***(Segundo teorema del valor medio para integrales de Riemann-Stieltjes).*** *Supongamos que α es continua y que $f \nearrow$ en $[a, b]$. Entonces existe un punto x_0 en $[a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(a) \int_a^{x_0} d\alpha(x) + f(b) \int_{x_0}^b d\alpha(x).$$

Demostración. Por el teorema 7.6, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\,df(x).$$

Aplicando el teorema 7.30 a la integral de la derecha, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a)[\alpha(x_0) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(x_0)],$$

en donde $x_0 \in [a, b]$, que es la afirmación que pretendíamos demostrar.

7.19 LA INTEGRAL COMO FUNCIÓN DEL INTERVALO

Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y si α es de variación acotada, entonces (por el teorema 7.25) la integral $\int_a^x f\,d\alpha$ existe para cada x de $[a, b]$ y puede estudiarse como una función de x. Ahora obtendremos algunas de las propiedades de de esta función.

Teorema 7.32. *Sea α una función de variación acotada en $[a, b]$ y supongamos que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Definimos F por medio de la ecuación*

$$F(x) = \int_a^x f\,d\alpha, \qquad si\ x \in [a, b].$$

Entonces se tiene:

i) *F es de variación acotada en $[a, b]$.*
ii) *En cada uno de los puntos en los que α es continua, F también lo es.*
iii) *Si $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$, la derivada $F'(x)$ existe en cada punto x de (a, b) en que $\alpha'(x)$ exista y f sea continua. Para tales x, se tiene*

$$F'(x) = f(x)\alpha'(x).$$

Demostración. Es suficiente suponer que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Si $x \neq y$, el teorema 7.30 implica que

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f\,d\alpha = c[\alpha(y) - \alpha(x)],$$

en donde $m \leq c \leq M$ (siguiendo la notación del teorema 7.30). Las afirmaciones (i) y (ii) se siguen inmediatamente de esta ecuación. Para probar (iii), dividamos por $y - x$ y observemos que $c \to f(x)$ cuando $y \to x$.

Si juntamos el teorema 7.32 con el teorema 7.26 obtenemos el siguiente teorema que convierte una integral de Riemann de un producto $f \cdot g$ en una integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f\,dG$ con integrador continuo de variación acotada.

Teorema 7. 33. *Si $f \in R$ y $g \in R$ en $[a, b]$, sean*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt \quad si\ x \in [a, b].$$

Entonces F y G son funciones continuas y de variación acotada en $[a, b]$. Además, $f \in R(G)$ y $g \in R(F)$ en $[a, b]$, y tenemos

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dG(x) = \int_a^b g(x)\,dF(x).$$

Demostración. Las partes (i) y (ii) del teorema 7.32 prueban que F y G son continuas y de variación acotada en $[a, b]$. La existencia de las integrales y las dos fórmulas obtenidas para $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ se siguen del teorema 7.24, al hacer $\alpha(x) = x$.

NOTA. Cuando $\alpha(x) = x$, la parte (iii) del teorema 7.32 es a veces llamada *primer teorema fundamental del cálculo integral. Establece que $F'(x) = f(x)$ en* cada uno de los puntos de continuidad de f. En el próximo apartado daremos un teorema, compañero del anterior, y que se conoce con el nombre de *segundo teorema fundamental.*

7.20 EL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

El teorema que sigue nos dice cómo hay que integrar una derivada.

Teorema 7.34 (El segundo teorema fundamental del Cálculo integral). *Supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$. Sea g una función definida en $[a, b]$ tal que la derivada g' exista en (a, b) y cuyo valor sea*

$$g'(x) = f(x) \qquad para\ cada\ x\ de\ (a, b).$$

Supongamos además que, en los extremos, los valores $g(a+)$ y $g(b-)$ existen y satisfacen

$$g(a) - g(a+) = g(b) - g(b-).$$

Entonces se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a).$$

Demostración. Para cada partición de $[a, b]$, podemos escribir

$$g(b) - g(a) = \sum_{k=1}^{n} [g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} g'(t_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k,$$

en donde t_k es un punto de (x_{k-1}, x_k) determinado por el teorema del valor medio del Cálculo diferencial. Pero, para un $\varepsilon > 0$, podemos tomar la partición suficientemente fina para que

$$\left|g(b) - g(a) - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

y ello prueba el teorema.

Combinando el segundo teorema fundamental del cálculo con el teorema 7.33 se obtiene un teorema más fuerte que el teorema 7.8.

Teorema 7.35. *Supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$. Sea α una función continua en $[a, b]$ y cuya derivada α' sea integrable de Riemann en $[a, b]$. Entonces las siguientes integrales existen y son iguales:*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx.$$

Demostración. En virtud del segundo teorema fundamental del cálculo tenemos, para cada x de $[a, b]$,

$$\alpha(x) - \alpha(a) = \int_a^x \alpha'(t)\,dt.$$

Haciendo $g = \alpha'$ en el teorema 7.33 obtenemos el teorema 7.35.

NOTA. En el ejercicio 7.34 se enuncia un resultado relacionado con éste.

7.21 CAMBIO DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DE RIEMANN

La fórmula que aparece en el teorema 7.7 para el cambio de variables en una integral, a saber $\int_a^b f\,d\alpha = \int_c^d h\,d\beta$, adquiere la forma

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)\,dt,$$

cuando $\alpha(x) = x$ y g es una función estrictamente monótona con derivada g' continua. Esto es válido si $f \in R$ en $[a, b]$. Cuando f es continua, podemos utilizar el teorema 7.32 para evitar la restricción de que g sea monótona. De hecho, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 7.36 (Cambio de variable en una integral de Riemann). *Supongamos que g posee derivada continua g' en un intervalo $[c, d]$. Sea f continua en $g([c, d])$ y definamos F por medio de la ecuación*

$$F(x) = \int_{g(c)}^{x} f(t)\,dt \qquad si\ x \in g([c, d]).$$

Entonces, para cada x de $[c, d]$, la integral $\int_c^x f[g(t)]g'(t)\,dt$ existe y vale $F[g(x)]$. En particular, tenemos

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

Demostración. Como tanto g' como la función compuesta $f \circ g$ son continuas en $[c, d]$, la integral en cuestión existe. Definamos G en $[c, d]$ como sigue:

$$G(x) = \int_c^x f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

Debemos probar que $G(x) = F[g(x)]$. Utilizando el teorema 7.32, tenemos

$$G'(x) = f[g(x)]g'(x),$$

y, en virtud de la regla de la cadena, la derivada de $F[g(x)]$ es también $f[g(x)]g'(x)$, ya que $F'(x) = f(x)$. Por consiguiente, $G(x) - F[g(x)]$ es constante. Pero, para $x = c$, tenemos $G(c) = 0$ y $F[g(c)] = 0$, luego la constante debe ser cero. Así pues, $G(x) = F[g(x)]$ para todo x de $[c, d]$. En particular, cuando $x = d$, obtenemos $G(d) = F[g(d)]$, que es precisamente la última ecuación del teorema.

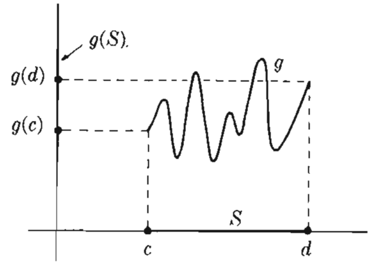


Figura 7.2

NOTA. Algunos libros demuestran el anterior teorema con la hipótesis suplementaria de que g' es no nula en todo $[c, d]$, que implica, naturalmente, la monotonía de g. La anterior demostración muestra que esto no es necesario. Obsérvese que, al ser g continua en $[c, d]$, $g([c, d])$ es un intervalo que contiene al intervalo que une $g(c)$ con $g(d)$. En particular, el resultado es válido si $g(c) = g(d)$. Esto hace que este teorema sea particularmente útil en las aplicaciones. (Véase la figura 7.2 para una g admisible.)

Realmente existe una versión más general del teorema 7.36 que no requiere ni la continuidad de f ni la de g', pero la demostración es mucho más complicada. Supongamos que $h \in R$ en $[c, d]$ y, si $x \in [c, d]$, consideremos $g(x) = \int_a^x h(t)\, dt$, en donde a es un punto fijo de $[c, d]$. Entonces, si $f \in R$ en $g([c, d])$, la integral $\int_c^d f[g(t)]\, h(t)\, dt$ existe y se tiene

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\, dx = \int_c^d f[g(t)]h(t)\, dt.$$

Este parece ser el teorema más general acerca del cambio de variable en una integral de Riemann. (Para una demostración, consúltese el artículo de H. Kestelman, *Mathematical Gazette,* 45 (1961), pp. 17-23.) El teorema 7.36 es el caso especial que se obtiene al considerar que h es continua en $[c, d]$ y que f es continua en $g([c, d])$.

7.22 SEGUNDO TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES DE RIEMANN

Teorema 7.37. *Sea g continua y supongamos que $f \nearrow$ en $[a, b]$. Sean A y B dos números reales que satisfagan las desigualdades*

$$A \le f(a+) \quad \text{y} \quad B \ge f(b-).$$

Entonces existe un punto x_0 de $[a, b]$ tal que

$$\text{i)} \quad \int_a^b f(x)g(x)\, dx = A\int_a^{x_0} g(x)\, dx + B\int_{x_0}^b g(x)\, dx.$$

En partcular, si $f(x) \ge 0$ para todo x de $[a, b]$, tenemos

$$\text{ii)} \quad \int_a^b f(x)g(x)\, dx = B\int_{x_0}^b g(x)\, dx, \quad \text{en donde } x_0 \in [a, b].$$

NOTA. La parte (ii) se conoce con el nombre de *teorema de Bonet.*

Demostración. Si $\alpha(x) = \int_a^x g(t)\, dt$, entonces $\alpha' = g$, y el teorema 7.31 es aplicable, y se obtiene

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a)\int_a^{x_0} g(x)\, dx + f(b)\int_{x_0}^b g(x)\, dx.$$

Esto prueba (i) siempre que $A = f(a)$ y $B = f(b)$. Ahora bien, si A y B son dos números reales que satisfacen las desigualdades $A \le f(a+)$ y $B \ge f(b-)$, podemos volver a definir f en los extremos a y b asignándole los valores $f(a) = A$ y $f(b) = B$. La función f modificada es asimismo creciente en $[a, b]$ y, como hemos indicado anteriormente, el hecho de cambiar el valor de f en un número finito de puntos no afecta en absoluto el valor de la integral de Riemann. (Es claro que el punto x_0 de (i) dependerá de la elección de A y de B.) Haciendo $A = 0$, la parte (ii) se sigue de la parte (i).

7.23 INTEGRALES DE RIEMANN-STIELTJES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Teorema 7.38. *Sea f continua en cada punto (x, y) de un rectángulo*

$$Q = \{(x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$$

Supongamos que α es de variación acotada en $[a, b]$ y sea F la función definida en $[c, d]$ por medio de la ecuación

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x).$$

Entonces F es continua en $[c, d]$. *En otras palabras, si* $y_0 \in [c, d]$, *tenemos*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x) = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, d\alpha(x)$$

$$= \int_a^b f(x, y_0)\, d\alpha(x).$$

Demostración. Supongamos que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$. Como que Q es un conjunto compacto, f es uniformemente continua en Q. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ (que depende sólo de ε) tal que, para cada par de puntos $z = (x, y)$ y $z' = (x', y')$ de Q tales que $|z - z'| < \delta$, tenemos $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$. Si $|y - y'| < \delta$, tenemos

$$|F(y) - F(y')| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y')|\, d\alpha(x) \leq \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Esto establece la continuidad de F en $[c, d]$.

Naturalmente, cuando $\alpha(x) = x$, este resultado se convierte en un teorema de continuidad para las integrales de Riemann que dependen de un parámetro. Sin embargo, es posible obtener un teorema mucho más útil para integrales de Riemann que el que se obtiene haciendo $\alpha(x) = x$ si se utiliza el teorema 7.26.

Teorema 7.39. *Si f es continua en el rectángulo* $[a, b] \times [c, d]$, *y si* $g \in R$ *en* $[a, b]$, *entonces la función F definida por la ecuación*

$$F(y) = \int_a^b g(x) f(x, y)\, dx,$$

es continua en $[c, d]$. *Esto es, si* $y_0 \in [c, d]$, *tenemos*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b g(x) f(x, y)\, dx = \int_a^b g(x) f(x, y_0)\, dx.$$

Demostración. Si $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$, el teorema 7.26 prueba que $F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dG(x)$. Aplíquese ahora el teorema 7.38.

7.24 DERIVACIÓN BAJO EL SIGNO DE INTEGRAL

Teorema 7.40. *Sea* $Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. *Supongamos que* α *es de variación acotada en* $[a, b]$ *y, para cada y fijo de* $[c, d]$, *supongamos que la integral*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x),$$

existe. Si la derivada parcial $D_2 f$ *es continua en Q, la derivada* $F'(y)$ *existe para cada y de* (c, d) *y viene dada por*

$$F'(y) = \int_a^b D_2 f(x, y)\, d\alpha(x).$$

NOTA. En particular, cuando $g \in R$ en $[a, b]$ y $\alpha(x) = \int_a^x g(t)\, dt$, obtenemos

$$F(y) = \int_a^b g(x) f(x, y)\, dx$$

y

$$F'(y) = \int_a^b g(x)\, D_2 f(x, y)\, dx.$$

Demostración. Si $y_0 \in (c, d)$ e $y \neq y_0$, tenemos

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}\, d\alpha(x) = \int_a^b D_2 f(x, \bar{y})\, d\alpha(x),$$

en donde $\bar{y}$ está comprendido entre y e y_0. Como que $D_2 f$ es continua en Q, se obtiene la conclusión razonando análogamente a como se razonó en la demostración del teorema 7.38.

7.25 INTERCAMBIO EN EL ORDEN DE INTEGRACIÓN

Teorema 7.41. *Sea* $Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. *Supongamos que* α *es de variación acotada en* $[a, b]$, β *es de variación acotada en* $[c, d]$, *y f es continua en Q. Si* $(x, y) \in Q$, *definimos*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x), \qquad G(x) = \int_c^d f(x, y)\, d\beta(y).$$

Entonces $F \in R(\beta)$ *en* $[c, d]$, $G \in R(\alpha)$ *en* $[a, b]$, *y tenemos*

$$\int_c^d F(y)\, d\beta(y) = \int_a^b G(x)\, d\alpha(x).$$

En otras palabras, podemos intercambiar el orden de integración como sigue:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, d\beta(y)\right] d\alpha(x) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x)\right] d\beta(y).$$

Demostración. Por el teorema 7.38, F es continua en $[c, d]$ y por lo tanto $F \in R(\beta)$ en $[c, d]$. Análogamente, $G \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Para demostrar la igualdad de ambas integrales, es suficiente considerar el caso en que $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$ y $\beta \nearrow$ en $[c, d]$.

En virtud de la continuidad uniforme, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada par de puntos $z = (x, y)$ y $z' = (x', y')$ de Q, con $|z - z'| < \delta$, se tiene

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Subdividimos ahora el rectángulo en n^2 rectángulos iguales, subdividiendo $[a, b]$ y $[c, d]$ en n partes iguales cada uno, en donde n se ha elegido de tal manera que

$$\frac{(b-a)}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \frac{(d-c)}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

Escribiendo

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \quad \text{y} \quad y_k = c + \frac{k(d-c)}{n},$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, tenemos

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, d\beta(y)\right) d\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y)\, d\beta(y)\right) d\alpha(x).$$

Aplicamos dos veces el teorema 7.30 al segundo miembro. La doble suma se convierte en

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x'_k, y'_j)[\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)][\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)],$$

en donde (x'_k, y'_j) pertenece al intervalo $Q_{k,j}$ que tiene por vértices opuestos los puntos (x_k, y_j) y (x_{k+1}, y_{j+1}). Análogamente, obtenemos

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, d\alpha(x)\right) d\beta(y)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x''_k, y''_j)[\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)][\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)],$$

en donde $(x''_k, y''_j) \in Q_{k,j}$. Pero $|f(x'_k, y'_j) - f(x''_k, y''_j)| < \varepsilon$ y por lo tanto

$$\left|\int_a^b G(x)\, d\alpha(x) - \int_c^d F(y)\, d\beta(y)\right|$$
$$< \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} [\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)] \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)]$$
$$= \varepsilon[\beta(d) - \beta(c)][\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Puesto que ε es arbitrario, esto implica la igualdad entre ambas integrales.

El teorema 7.41 junto con el teorema 7.26 nos da el siguiente resultado para las integrales de Riemann.

Teorema 7.42. *Sean f continua en el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$. Si $g \in R$ en $[a, b]$ y si $h \in R$ en $[c, d]$, entonces tenemos*

$$\int_a^b \left[\int_c^d g(x)h(y)f(x, y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)f(x, y)\, dx\right] dy.$$

Demostración. Sea $\alpha(x) = \int_a^x g(u)\, du$ y sea $\beta(y) = \int_c^y h(v)\, dv$, y apliquemos los teoremas 7.26 y 7.41.

7.26 CRITERIO DE LEBESGUE PARA LA EXISTENCIA DE LAS INTEGRALES DE RIEMANN

Cada función continua es integrable de Riemann. Sin embargo, la continuidad no es ciertamente necesaria, pues hemos visto que $f \in R$ cuando f es de variación acotada en $[a, b]$. En particular, f puede ser una función monótona con un conjunto numerable de discontinuidades y aun así la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ existe. En realidad, existen funciones con un conjunto infinito no numerable de discontinuidades que son integrables de Riemann. (Ver ejercicio 7.32.) Por lo tato, parece natural preguntarse «cuántas» discontinuidades puede poseer una función siendo integrable según Riemann. El teorema definitivo en este sentido fue descubierto por Lebesgue y lo demostraremos en esta sección. La idea que se halla detrás del teorema de Lebesgue se hace patente si examinamos qué condiciones impone al conjunto de las discontinuidades de f la condición de Riemann.

La diferencia entre las sumas superior e inferior de Riemann viene dada por

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \, \Delta x_k,$$

y, hablando «grosso modo», f es integrable si, y sólo si, esta suma puede hacerse suficientemente pequeña. Descompongamos esta suma en dos partes, $S_1 + S_2$, en donde S_1 contiene sólo los subintervalos cuyos puntos son todos de continuidad de f, y S_2 contiene los restantes sumandos. En S_1, cada diferencia $M_k(f) - m_k(f)$ es pequeña en virtud de la continuidad y, por lo tanto, aunque en S_1 aparezca un gran número de sumandos puede conseguirse que sea pequeña. En S_2, sin embargo, las diferencias $M_k(f) - m_k(f)$ no tienen por qué ser necesariamente pequeñas; pero puesto que están acotadas (por M, por ejemplo), tenemos $|S_2| \leq M \sum \Delta x_k$, por lo cual S_2 será pequeña siempre que la suma de las longitudes de los subintervalos correspondientes a S_2 lo sea. Por lo tanto, podemos esperar que el conjunto de discontinuidades de una función integrable pueda recubrirse por medio de intervalos cuya longitud total sea pequeña.

Ésta es la idea central del teorema de Lebesgue. Para formularlo con mayor precisión introduciremos los conjuntos de medida cero.

Definición 7.43. *Un conjunto S de números reales posee medida cero si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento numerable de S por medio de intervalos abiertos, tales que la suma de sus longitudes sea menor que ε.*

Si designamos a los intervalos por medio de (a_k, b_k), la definición requiere que

$$S \subseteq \bigcup_k (a_k, b_k) \qquad \text{y} \qquad \sum_k (b_k - a_k) < \varepsilon. \tag{3}$$

Si la colección de intervalos es finita, el índice k de (3) recorre un conjunto finito. Si la colección es infinita numerable, entonces k irá de 1 a ∞, y la suma de las longitudes es la suma de una serie infinita, dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k).$$

Junto con la definición, precisamos algunos resultados acerca de los conjuntos de medida cero.

Teorema 7.44. *Sea F una colección numerable de conjuntos de* **R**, *por ejemplo*

$$F = \{F_1, F_2, \ldots\},$$

cada uno de los cuales tiene medida cero. Entonces su unión

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

tiene también medida cero.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento numerable de F_k por medio de intervalos abiertos, la suma de cuyas longitudes es menor que $\varepsilon/2^k$. La reunión de todos estos recubrimientos de S es asimismo un recubrimiento numerable de S por medio de intervalos abiertos y la suma de las longitudes de todos los intervalos es menor que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Ejemplos. Como un conjunto formado por un solo punto tiene medida cero, se tiene que cada subconjunto numerable de **R** tiene medida cero. En particular, el conjunto de los números racionales tiene medida cero. Sin embargo, existen conjuntos *no numerables* que tienen medida cero. (Ver el ejercicio 7.32.)

A continuación introduciremos el concepto de oscilación.

Definición 7.45. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo S. Si $T \subseteq S$, el número*

$$\Omega_f(T) = \sup \{f(x) - f(y) : x \in T, \quad y \in T\},$$

se llama la oscilación de f en T. La oscilación de f en x se define como el número

$$\omega_f(x) = \lim_{h\to 0+} \Omega_f(B(x; h) \cap S).$$

NOTA. Este límite existe siempre, ya que $\Omega_f(B(x; h) \cap S)$ es una función creciente de h. En realidad, $T_1 \subseteq T_2$ implica $\Omega_f(T_1) \leq \Omega_f(T_2)$. Además, $\omega_f(x) = 0$ si, y sólo si, f es continua en x. (Ejercicio 4.24).

El teorema que sigue nos dice que si $\omega_f(x) < \varepsilon$ en cada uno de los puntos de un intervalo compacto $[a, b]$, entonces $\Omega_f(T) < \varepsilon$ para todo subintervalo T suficientemente pequeño.

Teorema 7.46. *Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$, y sea $\varepsilon > 0$ un número real dado. Supongamos que $\omega_f(x) < \varepsilon$ para cada x de $[a, b]$. Entonces existe un $\delta > 0$ (que depende tan sólo de ε) tal que para cada subintervalo cerrado $T \subseteq [a, b]$, se tiene que $\Omega_f(T) < \varepsilon$ siempre que la longitud de T séa menor que δ.*

Demostración. Para cada x de $[a, b]$ existe una bola unidimensional $B_x = B(x; \delta_x)$ tal que

$$\Omega_f(B_x \cap [a, b]) < \omega_f(x) + [\varepsilon - \omega_f(x)] = \varepsilon.$$

El conjunto de todas las bolas $B(x; \delta_x/2)$ de amplitud la mitad constituyen un recubrimiento de $[a, b]$. En virtud de la compacidad, un número finito de ellas recubre a $[a, b]$ (supongamos que este número es k). Sean los radios correspondientes $\delta_1/2, \ldots, \delta_k/2$ y sea δ el menor de estos números k. Cuando el intervalo T tenga longitud menor que δ, entonces T estará parcialmente recubierto por una, por lo menos, de estas bolas; sea, por ejemplo, $B(x_p; \delta_p/2)$. Sin embargo, la bola $B(x_p; \delta_p)$ recubre totalmente a T (ya que $\delta_p \geq 2\delta$). Además, en $B(x_p; \delta_p) \cap [a, b]$ la oscilación de f es menor que ε. Ello implica que $\Omega_f(T) < \varepsilon$ y el teorema está demostrado.

Teorema 7.47. *Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$. Para cada $\varepsilon > 0$ se define el conjunto J_ε como sigue:*

$$J_\varepsilon = \{x : x \in [a, b], \quad \omega_f(x) \geq \varepsilon\}.$$

Entonces J_ε es un conjunto cerrado.

Demostración. Sea x un punto de acumulación de J_ε. Si $x \notin J_\varepsilon$, tenemos $\omega_f(x) < \varepsilon$. Por lo tanto existe una bola unidimensional $B(x)$ tal que

$$\Omega_f(B(x) \cap [a, b]) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, ningún punto de $B(x)$ pertenecerá a J_ε, contradiciendo el hecho de que x sea de acumulación de J_ε. De donde, $x \in J_\varepsilon$ y J_ε es cerrado.

Teorema 7.48. **(Criterio de Lebesgue para la integrabilidad de Riemann.)** *Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$ y sea D el conjunto de las discontinuidades de f en $[a, b]$. Entonces $f \in R$ en $[a, b]$ si, y sólo si, D tiene medida cero.*

Demostración. (Necesidad.) Supondremos, en primer lugar, que D no tiene medida cero y demostraremos que f no es integrable. Podemos escribir D como una reunión numerable de conjuntos

$$D = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_r,$$

en donde

$$D_r = \left\{x : \omega_f(x) \geq \frac{1}{r}\right\}.$$

Si $x \in D$, entonces $\omega_f(x) > 0$, luego D es la reunión de los conjuntos D_r, para $r = 1, 2, \ldots$.

Ahora bien si D no tiene medida cero, entonces alguno de los conjuntos D_r tampoco la tendrá (en virtud del teorema 7.44). Por consiguiente, existe un $\varepsilon > 0$ para el cual cualquier colección numerable de intervalos abiertos que recubra D_r tendrá una suma de longitudes $\geq \varepsilon$. Para una partición P de $[a, b]$ tenemos

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k = S_1 + S_2 \geq S_1,$$

en donde S_1 contiene los términos que provienen de subintervalos que en su interior contienen puntos de D, y S_2 contiene los términos restantes. Los intervalos abiertos de S_1 recubren D_r, excepto posiblemente a un subconjunto finito en D_r, de medida 0, luego la suma de sus longitudes es, por lo menos, ε. Pero en estos intervalos tenemos

$$M_k(f) - m_k(f) \geq \frac{1}{r} \text{ y por lo tanto } S_1 \geq \frac{\varepsilon}{r}.$$

Esto significa que

$$U(P, f) - L(P, f) \geq \frac{\varepsilon}{r},$$

para cada partición P, luego la condición de Riemann no se verifica. Por consiguiente, f no es integrable de Riemann. En otras palabras, si $f \in R$, entonces D tiene medida cero.

(Suficiencia). Ahora supondremos que D tiene medida cero y demostraremos que se verifica la condición de Riemann. De nuevo escribimos $D = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_r$, en donde D_r es el conjunto de los puntos x en los que $\omega_f(x) \geq 1/r$. Dado que $D_r \subseteq D$, cada D_r tiene medida cero, por lo que cada D_r se puede recubrir por medio de intervalos abiertos, cuyas longitudes sumen $< 1/r$. Puesto que D_r es compacto (teorema 7.47), un número finito de dichos intervalos recubrirá a D_r.

La reunión de estos intervalos es un conjunto abierto que designaremos A_r. El complementario $B_r = [a, b] - A_r$ es la reunión de un número finito de subintervalos cerrados de $[a, b]$. Sea I un subintervalo típico de B_r. Si $x \in I$, entonces $\omega_f(x) < 1/r$ y entonces, en virtud del teorema 7.46, existe un $\delta > 0$ (que sólo depende de r) tal que I puede ser subdividido en un número finito de subintervalos T de longitud $< \delta$ en los que $\Omega_f(T) < 1/r$. Los extremos de todos estos subintervalos definen una partición P_r de $[a, b]$. Si P es más fina que P_r podemos escribir

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\, \Delta x_k = S_1 + S_2,$$

en donde S_1 contiene los términos que provienen de los subintervalos que contienen puntos de D_r, y S_2 contiene los términos restantes. En el k-ésimo término de S_2 tenemos

$$M_k(f) - m_k(f) < \frac{1}{r} \quad \text{y entonces } S_2 < \frac{b-a}{r}.$$

Puesto que A_r recubre todos los intervalos que intervienen en S_1, tenemos

$$S_1 \leq \frac{M - m}{r},$$

en donde m y M son el sup y el ínf de f en $[a, b]$. Por consiguiente

$$U(P, f) - L(P, f) < \frac{M - m + b - a}{r}.$$

Dado que esto se verifica para cada $r \geq 1$, la condición de Riemann se verifica, luego $f \in R$ en $[a, b]$.

NOTA. Una propiedad se verifica *casi en todo* un subconjunto S de $\mathbf{R}^1$ si se verifica en todo S salvo en un conjunto de medida 0. Luego, el teorema de Lebesgue establece que una función f acotada en un intervalo compacto $[a, b]$ es integrable de Riemann en $[a, b]$ si, y sólo si, f es continua casi en todo $[a, b]$.

Las siguientes afirmaciones (algunas de las cuales han sido probadas anteriormente en este mismo capítulo) son consecuencias inmediatas del teorema de Lebesgue.

***Teorema* 7.49.** a) *Si f es de variación acotada en $[a, b]$, entonces $f \in R$ en $[a, b]$.*

b) *Si $f \in R$ en $[a, b]$, entonces $f \in R$ en $[c, d]$ para cada subintervalo $[c, d] \subset [a, b]$; $|f| \in R$ y $f^2 \in R$ en $[a, b]$. También $f \cdot g \in R$ en $[a, b]$ siempre que $g \in R$ en $[a, b]$.*

c) *Si $f \in R$ y $g \in R$ en $[a, b]$, entonces $f/g \in R$ en $[a, b]$ siempre que g esté acotada en valor absoluto por un número mayor que* 0.

d) *Si f y g son funciones acotadas con las mismas discontinuidades en $[a, b]$, entonces $f \in R$ en $[a, b]$ si, y sólo si, $g \in R$ en $[a, b]$.*

e) *Sea $g \in R$ en $[a, b]$ y supongamos que $m \leq g(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$. Si f es continua en $[m, M]$, la función compuesta h definida por $h(x) = f[g(x)]$ es integrable de Riemann en $[a, b]$.*

NOTA. La afirmación (e) no se verifica necesariamente si se supone sólo que $f \in R$ en $[m, M]$. (Ver ejercicio 7.29.)

7.27. INTEGRALES COMPLEJAS DE RIEMANN-STIELTJES

Las integrales de Riemann-Stieltjes de la forma $\int_a^b f\, d\alpha$, en las que f y α son *funciones complejas* definidas y acotadas en un intervalo $[a, b]$ son de gran importancia en la teoría de funciones de variable compleja. Pueden introducirse utilizando exactamente la misma definición que la utilizada en el caso real. La definición 7.1 tiene perfectamente sentido cuando f y α son funciones complejas. Las sumas de los productos $f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$ utilizadas para formar las sumas de Riemann-Stieltjes deben interpretarse como sumas de productos de números complejos. Puesto que los números complejos verifican las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva que se verifican también en el caso de los números reales, no debe, pues, sorprendernos que las integrales complejas satisfagan muchas de las propiedades de las integrales reales. En particular, los teoremas 7.2, 7.3, 7.4, 7.6 y 7.7 (así como sus demostraciones) son válidos (palabra por palabra) cuando f y α son funciones complejas. (En los teoremas 7.2 y 7.3, las constantes c_1 y c_2 pueden ser números complejos.) Además, disponemos del siguiente teorema que reduce la teoría de las integrales complejas de Stieltjes al caso real.

***Teorema* 7.50.** *Sean $f = f_1 + if_2$ y $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ funciones complejas definidas en el intervalo $[a, b]$. Se tiene, entonces,*

$$\int_a^b f\, d\alpha = \left(\int_a^b f_1\, d\alpha_1 - \int_a^b f_2\, d\alpha_2\right) + i\left(\int_a^b f_2\, d\alpha_1 + \int_a^b f_1\, d\alpha_2\right),$$

siempre que existan las cuatro integrales del segundo miembro.

La demostración del teorema 7.50 es inmediata a partir de la definición y se deja como ejercicio para el lector.

El uso de este teorema nos permite extender al caso complejo muchas de las propiedades importantes de las integrales reales. Por jemplo, la conexión entre la diferenciación y la integración establecida en el teorema 7.32 es válida si definimos las nociones de continuidad, diferenciabilidad y variación acotada por medio de las componentes, como hacíamos en el caso de las funciones vectoriales. Diremos entonces que la función compleja $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ es de variación acotada en $[a, b]$ si cada componente α_1 y α_2 es de variación acotada en $[a, b]$. Análogamente, la derivada $\alpha'(t)$ está definida por la ecuación $\alpha'(t) = \alpha_1'(t) + i\alpha_2'(t)$ siempre que las derivadas $\alpha'_1(t)$ y $\alpha'_2(t)$ existan. (Las derivadas laterales se definen análogamente.) Con estos convenios, los teoremas 7.32 y 7.34 (los teoremas fundamentales del Cálculo integral) son válidos cuando f y α son funciones complejas. Las demostraciones se obtienen directamente utilizando el teorema 7.50 y los teoremas correspondientes del caso real.

Volveremos a ocuparnos de las integrales complejas en el capítulo 16, al estudiar con más detalle las funciones complejas de una variable compleja.

EJERCICIOS

Integrales de Riemann-Stieltjes

7.1 Probar que $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$, directamente a partir de la definición 7.1.

7.2 Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y si $\int_a^b f\, d\alpha = 0$ para cada f monótona en $[a, b]$, probar que α es constante en $[a, b]$.

7.3 La siguiente definición de la integral de Riemann-Stieltjes es bastante usual en textos matemáticos: Se dice que f es integrable respecto de α si existe un número real A que satisfaga la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada partición P de $[a, b]$ con norma $\|P\| < \delta$ y cada elección de t_k en $[x_{k-1}, x_k]$, tenemos $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$.

a) Probar que si $\int_a^b f\, d\alpha$ existe según esta definición, entonces existe también de acuerdo con la definición 7.1 y ambas integrales son iguales.

b) Sean $f(x) = \alpha(x) = 0$ para $a \le x < c, f(x) = \alpha(x) = 1$ para $c < x \le b, f(c) = 0$, $\alpha(c) = 1$. Probar que $\int_a^b f\, d\alpha$ existe de acuerdo con la definición 7.1 pero no existe según esta segunda definición.

7.4 Si $f \in R$ según la definición 7.1, probar que $\int_a^b f(x)\, dx$ existe también según la definición 7.3. (Contrastar este resultado con el ejercicio 7.3(b). *Indicación.* Sea $I = \int_a^b f(x)\, dx$, $M = \sup \{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Dado $\varepsilon > 0$, elegir P_ε tal que $U(P_\varepsilon, f) < I + \varepsilon/2$ (con la notación de la sección 7.11). Sea N el número de puntos de subdivisión de P_ε y sea $\delta = \varepsilon/(2MN)$. Si $\|P\| < \delta$, hagamos

$$U(P, f) = \sum M_k(f)\, \Delta x_k = S_1 + S_2,$$

en donde S_1 es la suma de los términos que pertenecen a aquellos subintervalos de P que carecen de puntos de P_ε y S_2 es la suma de los términos restantes. Entonces

$$S_1 \le U(P_\varepsilon, f) < I + \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad S_2 \le NM\|P\| < NM\delta = \varepsilon/2,$$

y por lo tanto $U(P, f) < I + \varepsilon$. Análogamente,

$$L(P, f) > I - \varepsilon \text{ si } \|P\| < \delta' \text{ para algún } \delta'.$$

Por lo tanto $|S(P, f) - I| < \varepsilon$ si $\|P\| < \min(\delta, \delta')$.

7.5 Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Para $x \ge 0$, definimos

$$A(x) = \sum_{n \le x} a_n = \sum_{n=1}^{[x]} a_n,$$

en donde $[x]$ es la parte entera de x y las sumas vacías valen cero. Sea f una función con derivada continua en el intervalo $1 \le x \le a$. Utilizar las integrales de Stieltjes para deducir la fórmula que sigue:

$$\sum_{n \le a} a_n f(n) = -\int_1^a A(x)f'(x)\, dx + A(a)f(a).$$

7.6 Utilizar la fórmula de sumación de Euler, o la integración por partes en una integral de Stieltjes para deducir las siguientes identidades:

a) $$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^{s-1}} + s\int_1^n \frac{[x]}{x^{s+1}}\, dx \qquad \text{si } s \ne 1.$$

b) $$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n - \int_1^n \frac{x - [x]}{x^2}\, dx + 1.$$

7.7 Suponer que f' es continua en $[1, 2n]$ y utilizar la fórmula de sumación de Euler o la integración por partes para demostrar

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k) = \int_1^{2n} f'(x)([x] - 2[x/2])\, dx.$$

7.8 Sea $\varphi_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ si $x \ne$ entero, y sea $\varphi_1(x) = 0$ si $x =$ entero. Sea también $\varphi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(t)\, dt$. Si f'' es continua en $[1, n]$ probar que la fórmula de sumación de Euler implica que

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x)\, dx - \int_1^n \varphi_2(x)f''(x)\, dx + \frac{f(1) + f(n)}{2}.$$

7.9 Hágase $f(x) = \ln x$ en el ejercicio 7.8 y pruébese que

$$\ln n! = (n + \tfrac{1}{2})\ln n - n + 1 + \int_1^n \frac{\varphi_2(t)}{t^2}\, dt.$$

7.10 Si $x \geq 1$, sea $\pi(x)$ el número de primos $\leq x$, esto es,

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

en donde la suma está extendida a todos los números primos $p \leq x$. El *teorema del número primo* establece que

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) \frac{\ln x}{x} = 1.$$

Esto se demuestra usualmente estudiando una función ϑ, íntimamente relacionada, dada por

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p,$$

en donde, de nuevo, la suma está extendida a todos los primos $p \leq x$. Tanto la función π como la función ϑ son funciones escalonadas con salto en los números primos. Este ejercicio demuestra cómo, por medio de la integral de Riemann-Stieltjes, es posible relacionar estas dos funciones.

a) Si $x \geq 2$, probar que $\pi(x)$ y $\vartheta(x)$ se pueden expresar por medio de las siguientes integrales de Riemann-Stieltjes:

$$\vartheta(x) = \int_{3/2}^{x} \ln t \, d\pi(t), \qquad \pi(x) = \int_{3/2}^{x} \frac{1}{\ln t} \, d\vartheta(t).$$

NOTA. El límite inferior puede substituirse por cualquier otro número del intervalo abierto $(1, 2)$.

b) Si $x \geq 2$, utilizar la integración por partes para probar

$$\vartheta(x) = \pi(x) \ln x - \int_{2}^{x} \frac{\pi(t)}{t} \, dt,$$

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_{2}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} \, dt.$$

Estas relaciones son útiles para demostrar que el teorema del número primo es equivalente a la relación $\lim_{x \to \infty} \vartheta(x)/x = 1$.

7.11 Si $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$, probar que se verifica:

a) $\displaystyle \overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \overline{\int_a^c} f \, d\alpha + \overline{\int_c^b} f \, d\alpha, \qquad (a < c < b),$

b) $\displaystyle \overline{\int_a^b} (f + g) \, d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f \, d\alpha + \overline{\int_a^b} g \, d\alpha,$

c) $\displaystyle \underline{\int_a^b} (f + g) \, d\alpha \geq \underline{\int_a^b} f \, d\alpha + \underline{\int_a^b} g \, d\alpha.$

7.12 Dar un ejemplo de una función acotada f y de una función creciente α definidas en $[a, b]$ tales que $|f| \in R(\alpha)$ pero para las que $\int_a^b f \, d\alpha$ no exista.

7.13 Sea α una función continua de variación acotada en $[a, b]$. Supongamos que $g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y definamos $\beta(x) = \int_a^x g(t) \, d\alpha(t)$ si $x \in [a, b]$. Probar que:

a) Si $f \nearrow$ en $[a, b]$, existe un punto x_0 de $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f \, d\beta = f(a) \int_a^{x_0} g \, d\alpha + f(b) \int_{x_0}^b g \, d\alpha.$$

b) Si, además, f es continua en $[a, b]$, se tiene también

$$\int_a^b f(x) g(x) \, d\alpha(x) = f(a) \int_a^{x_0} g \, d\alpha + f(b) \int_{x_0}^b g \, d\alpha.$$

7.14 Supongamos que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, en donde α es de variación acotada en $[a, b]$. Si $V(x)$ designa la variación total de α en $[a, x]$ para cada x de $(a, b]$, y $V(a) = 0$, probar que

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| \, dV \leq M V(b),$$

en donde M es una cota superior de $|f|$ en $[a, b]$. En particular, cuando $\alpha(x) = x$, la desigualdad se transforma en

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq M(b - a).$$

7.15 Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de funciones de variación acotada en $[a, b]$. Supongamos que existe una función α definida en $[a, b]$ tal que la variación total de $\alpha - \alpha_n$ en $[a, b]$ tienda hacia cero cuando $n \to \infty$. Supongamos además que $\alpha(a) = \alpha_n(a) = 0$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ Si f es continua en $[a, b]$, probar que

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \, d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x) \, d\alpha(x).$$

7.16 Si $f \in R(\alpha)$, $f^2 \in R(\alpha)$, $g \in R(\alpha)$, y $g^2 \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, probar que

$$\frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y) \end{vmatrix}^2 d\alpha(y) \right] d\alpha(x)$$

$$= \left(\int_a^b f(x)^2 \, d\alpha(x) \right) \left(\int_a^b g(x)^2 \, d\alpha(x) \right) - \left(\int_a^b f(x) g(x) \, d\alpha(x) \right)^2.$$

Cuando $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$, deducir la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) \, d\alpha(x) \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 \, d\alpha(x) \right) \left(\int_a^b g(x)^2 \, d\alpha(x) \right).$$

(Comparar con el ejercicio 1.23.)

7.17 Supongamos que $f \in R(\alpha)$, $g \in R(\alpha)$, y $f \cdot g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Probar que

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left[\int_a^b (f(y) - f(x))(g(y) - g(x))\, d\alpha(y)\right] d\alpha(x)$$

$$= (\alpha(b) - \alpha(a)) \int_a^b f(x)g(x)\, d\alpha(x) - \left(\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g(x)\, d\alpha(x)\right).$$

Si $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$, deducir la desigualdad

$$\left(\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g(x)\, d\alpha(x)\right) \le (\alpha(b) - \alpha(a)) \int_a^b f(x)g(x)\, d\alpha(x)$$

en donde tanto f como g son crecientes (o decrecientes) en $[a, b]$. Probar que la desigualdad inversa se verifica si f crece y g decrece en $[a, b]$.

Integrales de Riemann

7.18 Supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$. Utilizar el ejercicio 7.4 para demostrar que el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

existe y vale $\int_a^b f(x)\, dx$. Deducir que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (n^2 + k^2)^{-1/2} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

7.19 Definir

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2, \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\, dt.$$

a) Probar que $g'(x) + f'(x) = 0$ para todo x y deducir que $g(x) + f(x) = \pi/4$.
b) Utilizar (a) para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

7.20 Supongamos que $g \in R$ en $[a, b]$ y definamos $f(x) = \int_a^x g(t)\, dt$ si $x \in [a, b]$. Probar que la integral $\int_a^x |g(t)|\, dt$ da la variación total de f en $[a, x]$.

7.21 Sea $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ una función vectorial con derivada continua $\mathbf{f}'$ en $[a, b]$. Probar que la curva descrita por $\mathbf{f}$ tiene por longitud

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) = \int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\|\, dt.$$

7.22 Si $f^{(n+1)}$ es continua en $[a, x]$, definimos

$$I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

a) Demostrar que

$$I_{k-1}(x) - I_k(x) = \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

b) Utilizar (a) para expresar el resto de la fórmula de Taylor como una integral (ver Teorema 5.19).

7.23 Sea f una función continua en $[0, a]$. Si $x \in [0, a]$, definimos $f_0(x) = f(x)$ y sea

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x - t)^n f(t)\, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Probar que la n-ésima derivada de f_n existe y es igual a f.
b) Demostrar el siguiente teorema de M. Fekete: El número de cambios de signo de f en $[0, a]$ no es inferior al número de cambios de signo del conjunto ordenado

$$f(a), f_1(a), \ldots, f_n(a).$$

Indicación. Procédase por inducción matemática.
c) Usar (b) para demostrar el siguiente teorema de L. Fejér: El número de cambios de signo de f en $[0, a]$ no es inferior al número de cambios de signo del conjunto ordenado

$$f(0), \qquad \int_0^a f(t)\, dt, \qquad \int_0^a t f(t)\, dt, \qquad \ldots, \qquad \int_0^a t^n f(t)\, dt.$$

7.24 Sea f una función continua positiva en $[a, b]$. Si M designa el máximo valor que f alcanza en $[a, b]$, probar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(x)^n\, dx\right)^{1/n} = M.$$

7.25 Una función f de dos variables reales está definida en cada punto (x, y) del cuadrado unidad $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

a) Calcular $\bar{\int_0^1} f(x, y)\, dx$ y $\underline{\int_0^1} f(x, y)\, dx$ en términos de y.
b) Probar que $\int_0^1 f(x, y)\, dy$ existe para cada x fijo y calcular $\int_0^t f(x, y)\, dy$ en términos de x y t para $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 1$.
c) Sea $F(x) = \int_0^1 f(x, y)\, dy$. Probar que $\int_0^1 F(x)\, dx$ existe y calcular su valor.

7.26 Definimos f en $[0, 1]$ como sigue: $f(0) = 0$; si $2^{-n-1} < x \leq 2^{-n}$; entonces $f(x) = 2^{-n}$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) Dar dos motivos por los que $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe.

b) Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Probar que para $0 < x \leq 1$ se tiene

$$F(x) = xA(x) - \tfrac{1}{3}A(x)^2,$$

en donde $A(x) = 2^{-[-\ln x/\ln 2]}$, siendo $[y]$ la parte entera de y.

7.27 Supongamos que f posee una derivada monótona decreciente que satisface $f'(x) \geq m > 0$ para todo x de $[a, b]$. Probar que

$$\left|\int_a^b \cos f(x)\,dx\right| \leq \frac{2}{m}.$$

Indicación. Multiplicar y dividir el integrando por $f'(x)$ y utilizar el teorema 7.37(ii).

7.28 Dada una sucesión decreciente de números reales $\{G(n)\}$ tal que $G(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, se define una función en $[0, 1]$ por medio de $\{G(n)\}$ como sigue: $f(0) = 1$; si x es irracional, entonces $f(x) = 0$; si x es el número racional irreducible m/n, entonces $f(m/n) = G(n)$. Calcular la oscilación $\omega_f(x)$ en cada x de $[0, 1]$ y probar que $f \in R$ en $[0, 1]$.

7.29 Sea f la función definida en el ejercicio 7.28 con $G(n) = 1/n$. Sea $g(x) = 1$ si $0 < x \leq 1$, $g(0) = 0$. Probar que la función compuesta h definida por $h(x) = g[f(x)]$ no es integrable de Riemann en $[0, 1]$, a pesar de que $f \in R$ y $g \in R$ en $[0, 1]$.

7.30 Utilizar le teorema de Lebesgue para demostrar el teorema 7.49.

7.31 Utilizar el teorema de Lebesgue para demostrar que si $f \in R$ y $g \in R$ en $[a, b]$ y si $f(x) \geq m > 0$ para todo x de $[a, b]$, entonces la función h definida por

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

es integrable de Riemann en $[a, b]$.

7.32 Sea $I = [0, 1]$ y sea $A_1 = I - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ el subconjunto de I obtenido suprimiendo en I los puntos del intervalo abierto que constituye el tercio central de I; esto es, $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Sea A_2 el subconjunto de A_1 obtenido suprimiendo el tercio central abierto de $[0, \frac{1}{3}]$ y el de $[\frac{2}{3}, 1]$. Continuar este proceso y definir $A_3, A_4, \ldots$ El conjunto $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ se llama *conjunto de Cantor*. Probar que

a) C es un conjunto compacto que tiene medida cero.

b) $x \in C$ si, y sólo si, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$, en donde cada a_n o es 0 o es 2.

c) C es no numerable.

d) Sea $f(x) = 1$ si $x \in C$, $f(x) = 0$ si $x \notin C$. Probar que $f \in R$ en $[0, 1]$.

7.33 Este ejercicio proporciona una demostración (debida a Ivan Niven) de que π^2 es irracional. Sea $f(x) = x^n(1-x)^n/n!$. Probar que:

a) $0 < f(x) < 1/n!$ si $0 < x < 1$.

b) Cada una de las k-ésimas derivadas $f^{(k)}(0)$ y $f^{(k)}(1)$ es un entero. Supongamos entonces que $\pi^2 = a/b$, en donde a y b son enteros positivos, y sea

$$F(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(2k)}(x)\, \pi^{2n-2k}.$$

Probar que:

c) $F(0)$ y $F(1)$ son enteros.

d) $\pi^2 a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x = \dfrac{d}{dx}\{F'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi F(x) \cos \pi x\}$.

e) $F(1) + F(0) = \pi a^n \displaystyle\int_0^1 f(x) \operatorname{sen} \pi x\, dx$.

f) Utilizar (a) y (e) para deducir que $0 < F(1) + F(0) < 1$ si n es suficientemente grande. Esto contradice (c) y prueba que π^2 (y por lo tanto π) es irracional.

7.34 Sea α una función real, continua en el intervalo $[a, b]$ con derivada α' finita y acotada en (a, b). Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$ y supongamos que las integrales

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx$$

existen. Probar que ambas integrales son iguales. (No se impone que α' sea continua.)

7.35 Probar el siguiente teorema, que implica que una función que tenga integral positiva debe ser ella misma positiva en algún intervalo. Supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$ y que $0 \leq f(x) \leq M$ en $[a, b]$, en donde $M > 0$. Sea $I = \int_a^b f(x)\,dx$, sea $h = \frac{1}{2} I/(M+b-a)$, y supongamos que $I > 0$. Entonces el conjunto $T = \{x : f(x) \geq h\}$ contiene un número finito de intervalos la suma de cuyas longitudes es por lo menos h.

Indicación. Sea P una partición de $[a, b]$ tal que toda suma de Riemann $S(P, f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$ satisface $S(P, f) > I/2$. Dividamos $S(P, f)$ en dos partes $S(P, f) = \sum_{k \in A} + \sum_{k \in B}$, donde

$$A = \{k : [x_{k-1}, x_k] \subseteq T\}, \qquad \text{y} \qquad B = \{k : k \notin A\}.$$

Si $k \in A$, usamos la desigualdad $f(t_k) \leq M$; si $k \in B$, elegimos t_k tal que $f(t_k) < h$. Deducir que $\sum_{k \in A} \Delta x_k > h$.

Teorema de existencia para ecuaciones integrales y diferenciales

Los ejercicios que siguen muestran la utilidad del teorema del punto fijo para contracciones (teorema 4.48) a la hora de probar teoremas de existencia para resolución de ciertas ecuaciones integrales y diferenciales. Designaremos por $C[a, b]$ el espacio métrico de todas las funciones reales continuas en $[a, b]$ dotado de la siguiente métrica

$$d(f, g) = \|f - g\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|,$$

Recordemos que $C[a, b]$ es un espacio métrico completo (ejercicio 4.67).

7.36 Dada una función g de $C[a, b]$, y una función K continua en el rectángulo $Q = [a, b] \times [a, b]$, se considera la función T definida en $C[a, b]$ por medio de la ecuación

$$T(\varphi)(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\, dt,$$

en donde λ es una constante dada.

a) Demostrar que T aplica $C[a, b]$ en sí mismo.

b) Si $|K(x, y)| \leq M$ en Q, en donde $M > 0$, y si $|\lambda| < M^{-1}(b - a)^{-1}$, probar que T es una contracción de $C[a, b]$ y por lo tanto posee un punto fijo φ que es solución de la ecuación integral $\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\, dt$.

7.37 Supongamos que f es continua en un rectángulo $Q = [a - h, a + h] \times [b - k, b + k]$, en donde $h > 0$, $k > 0$.

a) Sea φ una función continua en $[a-h, a+h]$, tal que $(x, \varphi(x)) \in Q$ para todo x de $[a-h, a+h]$. Si $0 < c \leq h$, probar que φ satisface la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ en $(a-c, a+c)$ y la condición inicial $\varphi(a) = b$ si, y sólo si, φ satisface la ecuación integral $\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\, dt$.

$$\varphi(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt \qquad \text{en} \qquad (a - c, a + c).$$

b) Supongamos que $|f(x, y)| \leq M$ en Q, en donde $M > 0$, y sea $c = \min\{h, k/M\}$. Sea S el subespacio métrico de $C[a - c, a + c]$ formado por todas las φ tales que $|\varphi(x) - b| \leq Mc$ en $[a - c, a + c]$. Probar que S es un subespacio cerrado de $C[a - c, a + c]$ y por lo tanto que el mismo S es un espacio métrico completo.

c) Probar que la función T definida en S por la ecuación

$$T(\varphi)(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt$$

aplica S en sí mismo.

d) Supongamos ahora que f satisface una condición de Lipschitz de la forma

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq A|y - z|$$

para cada par de puntos (x, y) y (x, z) de Q, en donde $A > 0$. Probar que T es una contracción de S si $h < 1/A$. Deducir que para $h < 1/A$ la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ tiene exactamente una solución $y = \varphi(x)$ en $(a - c, a + c)$ tal que $\varphi(a) = b$.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

7.1 Hildebrandt, T. H., *Introduction to the Theory of Integration.* Academic Press, New York, 1963.

7.2 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration.* Oxford University Press, Oxford, 1937.

7.3 Rankin, R. A., *An Introduction to Mathematical Analysis.* Pergamon Press, Oxford, 1963.

7.4 Rogosinski, W. W., *Volume and Integral.* Wiley, New York, 1952.

7.5 Shilov, G. E., y Gurevich, B. L., *Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach.* Traductor, R. Silverman. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.

CAPÍTULO 8

Series infinitas y productos infinitos

8.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo daremos un breve desarrollo de la teoría de las series y productos infinitos. Se trata, en el fondo, de sucesiones infinitas especiales cuyos términos son o bien números reales o bien números complejos. Las sucesiones convergentes fueron estudiadas en el capítulo 4 en el ámbito de los espacios métricos generales. Recordaremos algunos de los conceptos del capítulo 4 aplicándolos a sucesiones de **C**, con la métrica euclídea usual.

8.2 SUCESIONES CONVERGENTES Y DIVERGENTES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Definición 8.1. *Una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de* **C** *es convergente si existe un punto p de* **C** *que verifique la siguiente propiedad:*

Para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N (dependiente de ε) tal que

$$|a_n - p| < \varepsilon \text{ siempre que } n \geq N.$$

Si $\{a_n\}$ converge hacia p, escribiremos $\lim_{n\to\infty} a_n = p$ y se dice que p es el *límite* de la sucesión. Una sucesión que no es convergente se llama *divergente.*

Una sucesión de **C** se llama *sucesión de Cauchy* si satisface la *condición de Cauchy;* esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{siempre que } n \geq N \text{ y } m \geq N.$$

Ya que **C** es un espacio métrico completo, sabemos por el capítulo 4 que una sucesión de **C** es convergente si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy.

La condición de Cauchy es particularmente útil para establecer la convergencia cuando se desconoce el valor hacia el que la sucesión converge.

Toda sucesión convergente está acotada (teorema 4.3) y por consiguiente una sucesión no acotada es necesariamente divergente.

Si una sucesión $\{a_n\}$ converge hacia p, entonces cada subsucesión $\{a_{k_n}\}$ converge asimismo hacia p (teorema 4.5).

Una sucesión $\{a_n\}$ cuyos términos son números reales diverge hacia $+\infty$ si, para cada $M > 0$, existe un entero N (dependiente M) tal que

$$a_n > M \qquad \text{siempre que } n \geq N.$$

En este caso diremos que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Si $\text{lím}_{n\to\infty} (-a_n) = +\infty$, escribiremos que $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = -\infty$ y diremos que $\{a_n\}$ diverge hacia $-\infty$. Además, existen sucesiones reales divergentes que no divergen ni hacia $+\infty$ ni hacia $-\infty$. Por ejemplo, la sucesión $\{(-1)^n(1 + 1/n)\}$ diverge pero no diverge ni hacia $+\infty$ ni hacia $-\infty$.

8.3 LÍMITE SUPERIOR Y LÍMITE INFERIOR DE UNA SUCESIÓN REAL

Definición 8.2 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Supongamos que existe un número real U que satisface las dos condiciones siguientes:*
i) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $n > N$ implica*

$$a_n < U + \varepsilon.$$

ii) *Dado $\varepsilon > 0$ y dado $m > 0$, existe un entero $n > m$ tal que*

$$a_n > U - \varepsilon.$$

Entonces U se llama el límite superior de $\{a_n\}$ y se escribe

$$U = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

La proposición (i) *implica que el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\}$ está acotado superiormente. Si este conjunto no está acotado superiormente, definimos*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Si el conjunto está acotado superiormente pero en cambio no lo está inferiormente y si $\{a_n\}$ carece de límite superior finito, entonces se dice $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$. *El límite inferior de $\{a_n\}$ se define como sigue:*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty} b_n, \quad \textit{en donde } b_n = -a_n \quad \textit{para } n = 1, 2, \ldots$$

NOTA. La condición (i) significa que *todos* los términos de la sucesión a partir de uno en adelante están a la izquierda de $U + \varepsilon$. La condición (ii) significa que *una infinidad* de términos se hallan a la derecha de $U - \varepsilon$. Es claro que no puede existir más que un número U que satisfaga simultáneamente (i) y (ii).

Toda sucesión real tiene un límite superior y un límite inferior en el sistema de los números reales $\mathbf{R}^*$ (ver ejercicio 8.1).

El lector puede realizar las demostraciones de los siguientes teoremas:

Teorema 8.3 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Se tiene entonces:*

a) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.
b) *La sucesión converge si, y sólo si,* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *y* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *son ambos finitos e iguales; en este caso,* $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.
c) *La sucesión diverge hacia $+\infty$ si, y sólo si,* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
d) *La sucesión diverge hacia $-\infty$ si, y sólo si,* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

NOTA. Una sucesión en la que $\liminf_{n\to\infty} a_n \neq \limsup_{n\to\infty} a_n$ se llama oscilante.

Teorema 8.4. *Supongamos que $a_n \leq b_n$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ Se tiene entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n \quad \textit{y} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Ejemplos

1. $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$,	$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$,	$\limsup a_n = +1$.
2. $a_n = (-1)^n$,	$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$,	$\limsup_{n\to\infty} a_n = +1$.
3. $a_n = (-1)^n n$,	$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$,	$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
4. $a_n = n^2 \operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}n\pi)$,	$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$,	$\limsup a_n = +\infty$.

8.4. SUCESIONES MONÓTONAS DE NÚMEROS REALES

Definición 8.5. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que la sucesión es creciente y escribiremos $a_n \nearrow$ si $a_n \leq a_{n+1}$ para $n = 1, 2, \ldots$ Si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n, diremos que la sucesión es decreciente y escribiremos $a_n \searrow$. Una sucesión se llama monótona si es creciente o decreciente.*

La convergencia o divergencia de una sucesión monótona se puede determinar con facilidad. En efecto, tenemos

Teorema 8.6. *Una sucesión monótona converge si, y sólo si, está acotada.*

Demostración. Si $a_n \nearrow$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$. *Si* $a_n \searrow$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$.

8.5 SERIES INFINITAS

Sea $\{a_n\}$ una sucesión dada de números reales o complejos, y formemos una nueva sucesión $\{s_n\}$ como sigue:

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Definición 8.7. *El par ordenado de sucesiones $(\{a_n\}, \{s_n\})$ se llama serie infinita. El número s_n se llama suma parcial n-ésima de la serie. Se dice que una serie converge o diverge según que la sucesión $\{s_n\}$ sea convergente o divergente. Los símbolos que siguen sirven para designar la serie definida por* (1):

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

NOTA. La letra k que aparece en el símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una «variable muda» y puede sustituirse por cualquier otro signo conveniente. Si p es un entero ≥ 0, un símbolo de la forma $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ se puede interpretar como el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, en donde $a_n = b_{n+p-1}$. Si no hay peligro de confusión, escribiremos $\sum b_n$ en vez de $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$.

Si la sucesión $\{s_n\}$ definida por (1) converge hacia s, el número s se llama *suma* de la serie y se escribe

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Por lo tanto, en el caso de las series convergentes el símbolo $\sum a_k$ se utiliza tanto para designar la serie como para designar su suma.

Ejemplo. Si x tiene un desarrollo decimal infinito $x = a_0 \cdot a_1\ a_2 \cdot \ldots$ (ver sección 1.17), entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$ converge en x.

Teorema 8.8. *Sean $a = \sum a_n$ y $b = \sum b_n$ dos series convergentes. Entonces, para cada par de constantes α y β, la serie $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ converge hacia la suma $\alpha a + \beta b$. Esto es,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración. $\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Teorema 8.9. *Supongamos que $a_n \geq 0$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ Entonces $\sum a_n$ converge si, y sólo si, la sucesión de las sumas parciales está acotada superiormente.*

Demostración. Sea $s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Entonces $s_n \nearrow$ y basta aplicar el teorema 8.6.

Teorema 8.10 (Series telescópicas). *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n = b_{n+1} - b_n$ para $n = 1, 2, \ldots$ Entonces $\sum a_n$ converge si, y sólo si, existe $\lim_{n\to\infty} b_n$, en cuyo caso se tiene*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1.$$

Demostración. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$.

Teorema 8.11 (Condición de Cauchy para series). *La serie $\sum a_n$ converge si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $n > N$ implica*

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{para cada } p = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Demostración. Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; escribamos $s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$, y apliquemos el teorema 4.8.

Tomando $p = 1$ en (2), resulta que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es una condición *necesaria* para la convergencia de la serie $\sum a_n$. Sin embargo, esta condición *no es suficiente* y esto se ve al considerar el ejemplo dado por $a_n = 1/n$. Cuando $n = 2^m$ y $p = 2^m$ en (2), se obtiene

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} = \frac{1}{2^m + 1} + \cdots + \frac{1}{2^m + 2^m} \geq \frac{2^m}{2^m + 2^m} = \frac{1}{2},$$

y por consiguiente no se satisface la condición de Cauchy cuando $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge. Esta serie se llama *serie armónica.*

8.6 INTRODUCCIÓN Y SUPRESIÓN DE PARÉNTESIS

Definición 8.12 *Sea p una función cuyo dominio sea el conjunto de los enteros positivos y cuyo recorrido sea un subconjunto del conjunto de los enteros positivos tal que*

i) $$p(n) < p(m), \quad \text{si } n < m.$$

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series relacionadas como sigue:

$$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{p(1)},$$

ii) $\qquad b_{n+1} = a_{p(n)+1} + a_{p(n)+2} + \cdots + a_{p(n+1)}, \qquad si\ n = 1, 2, \ldots$

Entonces diremos que $\sum b_n$ se ha obtenido a partir de $\sum a_n$ introduciendo paréntesis, y que $\sum a_n$ se ha obtenido de $\sum b_n$ suprimiendo paréntesis.

Teorema 8.13 *Si $\sum a_n$ converge hacia s, toda serie $\sum b_n$ obtenida a partir de $\sum a_n$ introduciendo paréntesis también converge hacia s.*

Demostración. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series relacionadas por (ii) y sean $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Entonces $\{t_n\}$ es una subsucesión de $\{s_n\}$. En efecto, $t_n = s_{p(n)}$. Por lo tanto, la convergencia de $\{s_n\}$ hacia s implica la convergencia de $\{t_n\}$ hacia s.

Suprimiendo paréntesis puede destruirse la convergencia. Para verlo, considérese la serie $\sum b_n$ tal que cada uno de sus términos es 0 (que obviamente es convergente). Sea $p(n) = 2n$ y sea $a_n = (-1)^n$. Entonces (i) y (ii) se satisfacen y sin embargo $\sum a_n$ es divergente.

Los paréntesis se *pueden* suprimir si imponemos restricciones a $\sum a_n$ y a p.

Teorema 8.14. *Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$ relacionadas como en la definición 8.12. Supongamos que existe una constante $M > 0$ tal que $p(n + 1) - p(n) < M$ para todo n, y supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces $\sum a_n$ converge si, y sólo si, $\sum b_n$ converge, y en dicho caso tienen la misma suma.*

Demostración. Si $\sum a_n$ converge, el resultado se sigue del teorema 8.13. Toda la dificultad radica en la deducción inversa. Sea

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n, \qquad t_n = b_1 + \cdots + b_n, \qquad t = \lim_{n\to\infty} t_n.$$

Dado $\varepsilon > 0$, elegimos un N tal que $n > N$ implique

$$|t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad y \qquad |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Si $n > p(N)$, podemos encontrar $m \geq N$ tal que

$$N \leq p(m) \leq n < p(m + 1).$$

[¿Por qué?] Para este n se tiene

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_{p(m+1)} - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{p(m+1)}) \\ &= t_{m+1} - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{p(m+1)}), \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} |s_n - t| &\leq |t_{m+1} - t| + |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{p(m+1)}| \\ &\leq |t_{m+1} - t| + |a_{p(m)+1}| + |a_{p(m)+2}| + \cdots + |a_{p(m+1)}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \big(p(m + 1) - p(m)\big)\frac{\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ello demuestra que $\lim_{n\to\infty} s_n = t$.

8.7 SERIES ALTERNADAS

Definición 8.15. *Si $a_n > 0$ para cada n, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ se llama una serie alternada.*

Teorema 8.16. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente que converge hacia 0, la serie alternada $\sum(-1)^{n+1} a_n$ converge. Si s designa su suma y s_n su suma parcial n-ésima, se verifica la desigualdad*

$$0 < (-1)^n(s - s_n) < a_{n+1}, \qquad para\ n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

NOTA. La desigualdad (3) nos dice que al «aproximarnos» a s por medio de las s_n, el error que se comete tiene el mismo signo que el primer término despreciado y es menor que el valor absoluto de dicho término.

Demostración. Introducimos paréntesis en $\sum(-1)^{n+1} a_n$, a fin de agrupar los términos de dos en dos. Esto es, tomamos $p(n) = 2n$ y formamos una nueva serie $\sum b_n$ de acuerdo con la definición 8.12, haciendo

$$b_1 = a_1 - a_2, \quad b_2 = a_3 - a_4, \quad \ldots, \quad b_n = a_{2n-1} - a_{2n}.$$

Como que $a_n \to 0$ y $p(n + 1) - p(n) = 2$, el teorema 8.14 nos asegura que $\sum(-1)^{n+1} a_n$ converge si $\sum b_n$ converge. Pero $\sum b_n$ es una serie de términos no negativos (puesto que $a_n \searrow$), y sus sumas parciales están acotadas superiormente, ya que

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1.$$

Por lo tanto $\sum b_n$ converge, y $\sum(-1)^{n+1} a_n$ también converge.

La desigualdad (3) es consecuencia de las siguientes relaciones:

$$(-1)^n(s - s_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) > 0,$$

y

$$(-1)^n(s - s_n) = a_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n+2k} - a_{n+2k+1}) < a_{n+1}.$$

8.8 CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL

Definición 8.17. *Una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente si $\sum|a_n|$ converge. Se llama condicionalmente convergente si $\sum a_n$ converge pero $\sum|a_n|$ diverge.*

Teorema 8.18. *La convergencia absoluta de $\sum a_n$ implica la convergencia.*

Demostración. Basta aplicar la condición de Cauchy a la desigualdad

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|.$$

Para ver que el recíproco es falso, basta considerar el ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Esta serie alternada es convergente, en virtud del teorema 8.16, pero no es absolutamente convergente

Teorema 8.19. Sea *$\sum a_n$ una sere de términos reales dada y definamos*

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \qquad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Entonces:

i) *Si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son ambas divergentes.*
ii) *Si $\sum|a_n|$* converge, *$\sum p_n$ y $\sum q_n$ son ambas convergentes y se tiene*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n.$$

NOTA. $p_n = a_n$ y $q_n = 0$ si $a_n \geq 0$, mientras que $q_n = -a_n$ y $p_n = 0$ si $a_n \leq 0$.

Demostración Tenemos $a_n = p_n - q_n$, $|a_n| = p_n + q_n$. Para probar (i), supongamos que $\sum a_n$ converge y $\sum|a_n|$ diverge. Si $\sum q_n$ converge, entonces $\sum p_n$ también convergerá (en virtud del teorema 8.8), ya que $p_n = a_n + q_n$. Análogamente, si $\sum p_n$ converge, entonces $\sum q_n$ también convergerá. De lo que se deduce que, si $\sum p_n$ o $\sum q_n$ convergen, convergerán *las dos* y entonces $\sum|a_n|$ convergerá, ya que $|a_n| = p_n + q_n$. Esta contradicción prueba (i).

Para probar (ii), basta utilizar (4) junto con el teorema 8.8.

8.9 PARTE REAL Y PARTE IMAGINARIA DE UNA SERIE COMPLEJA

Sea $\sum c_n$ una serie de términos complejos y escribámosla $c_n = a_n + ib_n$, en donde a_n y b_n sean números reales. Las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ se llaman, respectivamente, partes real e imaginaria de la serie $\sum c_n$. En aquellas situaciones en que intervengan serie complejas es, a menudo, conveniente tratar las partes real e imaginaria por separado. Es claro que la convergencia de las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ implica la convergencia de la serie $\sum c_n$. Recíprocamente, la convergencia de la serie $\sum c_n$ implica simultáneamente la convergencia de las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$. Idénticas observaciones son válidas para la convergencia *absoluta.* Sin embargo, si $\sum c_n$ es *condicionalmente* convergente, una (pero no ambas) de las series $\sum a_n$ o $\sum b_n$ puede ser absolutamente convergente. (Ver el ejercicio 8.19.)

Si $\sum c_n$ converge absolutamente, podemos aplicar la parte (ii) del teorema 8.19 a las partes real e imaginaria, por separado, para obtener la descomposición siguiente:

$$\sum c_n = \sum(p_n + iu_n) - \sum(q_n + iv_n),$$

en donde $\sum p_n$, $\sum q_n$, $\sum u_n$, $\sum v_n$ son series convergentes de términos no negativos.

8.10 CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA LAS SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

Teorema 8.20 (Criterio de comparación). *Si $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para $n = 1, 2, \ldots$ y existen dos constantes positivas c y N tales que*

$$a_n < cb_n \quad \text{para } n \geq N$$

la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Demostración. Las sumas parciales de $\sum a_n$ están acotadas si las de $\sum b_n$ lo están. Aplicando el teorema 8.9, el teorema queda demostrado.

Teorema 8.21 (Criterio de comparación por paso al límite). *Supongamos que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Entonces $\sum a_n$ *converge si, y sólo si,* $\sum b_n$ *converge.*

Demostración. Existe un N tal que $n \leq N$ implica $\frac{1}{2} < a_n/b_n < \frac{3}{2}$. El teorema queda demostrado si aplicamos dos veces el teorema 8.20.

NOTA. El teorema 8.21 también se verifica si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c$, siempre que $c \neq 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$, sólo se puede afirmar que la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

8.11 LA SERIE GEOMÉTRICA

Para que el criterio de comparación sea efectivo es preciso disponer de algunos ejemplos de series de comportamiento conocido. Una de las series más importantes en relación con el criterio de comparación es la *serie geométrica.*

Teorema 8.22. *Si* $|x| < 1$, *la serie* $1 + x + x^2 + \ldots$ *converge y su suma vale* $1/(1 - x)$. *Si* $|x| \geq 1$, *la serie diverge.*

Demostración. $(1 - x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}$. Cuando $|x| < 1$, tendremos que $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$. Si $|x| \geq 1$, el término general no tiende a cero y por lo tanto la serie no converge.

8.12 EL CRITERIO DE LA INTEGRAL

Otros ejemplos de series de comportamiento conocido pueden obtenerse fácilmente aplicando el *criterio de la integral.*

Teorema 8.23 (Criterio de la integral). *Sea f una función decreciente definida en* $[1, +\infty)$ *tal que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Para $n = 1, 2, \ldots$, *definimos*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \qquad t_n = \int_1^n f(x)\,dx, \qquad d_n = s_n - t_n.$$

Se tiene entonces:

i) $0 < f(n + 1) \leq d_{n+1} \leq d_n \leq f(1)$, *para* $n = 1, 2, \ldots$

ii) $\lim_{n\to\infty} d_n$ *existe.*

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *converge si, y sólo si, la sucesión* $\{t_n\}$ *converge.*

iv) $0 \leq d_k - \lim_{n\to\infty} d_n \leq f(k)$, *para* $k = 1, 2, \ldots$

Demostración. Para probar (i), escribimos

$$t_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(k)\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n.$$

Esto implica que $f(n + 1) = s_{n+1} - s_n \leq s_{n+1} - t_{n+1} = d_{n+1}$, y obtenemos

$$0 < f(n + 1) \leq d_{n+1}.$$

Pero tenemos también

$$d_n - d_{n+1} = t_{n+1} - t_n - (s_{n+1} - s_n) = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n + 1) \tag{5}$$
$$\geq \int_n^{n+1} f(n + 1)\,dx - f(n + 1) = 0,$$

y por consiguiente $d_{n+1} \leq d_n \leq d_1 = f(1)$. Esto demuestra (i). Pero ahora es evidente que (i) implica (ii) y que (ii) implica (iii).

Para demostrar (iv), utilizamos de nuevo (5) y escribimos

$$0 \leq d_n - d_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx - f(n + 1) = f(n) - f(n + 1).$$

Si sumamos con respecto de n, obtenemos

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\infty}(d_n - d_{n+1}) \leq \sum_{n=k}^{\infty}(f(n) - f(n + 1)), \qquad si\ k \geq 1.$$

Y cuando calculamos las sumas de estas series telescópicas, tenemos (iv).

NOTA. Sea $D = \lim_{n\to\infty} d_n$. Entonces (i) implica $0 \leq D \leq f(1)$, mientras que (iv) nos da

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx - D \leq f(n). \tag{6}$$

Esta desigualdad es verdaderamente útil a la hora de aproximar ciertas sumas finitas por medio de integrales.

8.13 LAS NOTACIONES O GRANDE Y o PEQUEÑA

Definición 8.24. *Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $b_n \geq 0$ para todo n, escribimos*

$$a_n = O(b_n) \qquad (\textit{se lee: «}a_n \textit{ es O grande de } b_n\textit{»}),$$

si existe una constante $M > 0$ tal que $|a_n| \leq Mb_n$ para todo n. Escribimos

$$a_n = o(b_n) \textit{ cuando } n \to \infty \qquad (\textit{se lee: «}a_n \textit{ es o pequeña de } b_n\textit{»}),$$

si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$.

NOTA. Una ecuación de la forma $a_n = c_n + O(b_n)$ significa $a_n - c_n = O(b_n)$. Análogamente, $a_n = c_n + o(b_n)$ significa que $a_n - c_n = o(b_n)$. La ventaja de esta notación consiste en el hecho de que permite reemplazar cierto tipo de desigualdades por ecuaciones. Por ejemplo, (6) implica

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx + D + O(f(n)). \tag{7}$$

Ejemplo 1. En el teorema 8.23 hacemos $f(x) = 1/x$. Encontramos $t_n = \ln n$ y por lo tanto $\sum 1/n$ diverge. Sin embargo, el apartado (ii) establece la existencia del límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right),$$

número famoso llamado *constante de Euler*, que se designa normalmente por C (o por γ). La ecuación (7) se convierte en

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Ejemplo 2. Sea $f(x) = x^{-s}$, $s \neq 1$ en el teorema 8.23. Obtenemos que $\sum n^{-s}$ converge si $s > 1$ y diverge si $s < 1$. Para $s > 1$, esta serie define una función muy importante conocida como *función zeta de Riemann*:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s > 1).$$

Para $s > 0$, $s \neq 1$, podemos aplicar (7) para escribir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s} - 1}{1 - s} + C(s) + O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$

donde $C(s) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{-s} - (n^{1-s} - 1)/(1 - s)\right)$.

8.14 EL CRITERIO DEL COCIENTE Y EL CRITERIO DE LA RAÍZ

Teorema 8.25 (Criterio del cociente). *Dada una serie $\sum a_n$ de términos complejos no nulos, sea*

$$r = \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \qquad R = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

a) *La serie $\sum a_n$ converge absolutamente si $R < 1$.*
b) *La serie $\sum a_n$ diverge si $r > 1$.*
c) *El criterio no permite llegar a ninguna conclusión si $r \leq 1 \leq R$.*

Demostración. Supongamos que $R < 1$ y elijamos x tal que $R < x < 1$. La definición de R implica la existencia de un N tal que $|a_{n+1}/a_n| < x$ si $n \geq N$. Como que $x = x^{n+1}/x^n$, esto significa que

$$\frac{|a_{n+1}|}{x^{n+1}} < \frac{|a_n|}{x^n} \leq \frac{|a_N|}{x^N}, \qquad \text{si } n \geq N,$$

y entonces $|a_n| \leq cx^n$ si $n \geq N$, en donde $c = |a_N|x^{-N}$. La afirmación (a) se deduce ahora aplicando el criterio de comparación.

Para probar (b), obsérvese simplemente que $r > 1$ implica $|a_{n+1}| > |a_n|$ para $n \geq N$ para un cierto N y por lo tanto no es posible que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Para probar (c), considerar los dos ejemplos siguientes $\sum n^{-1}$ y $\sum n^{-2}$. En ambos casos, $r = R = 1$ pero $\sum n^{-1}$ diverge, mientras que $\sum n^{-2}$ converge.

Teorema 8.26 (Criterio de la raíz). *Dada una serie $\sum a_n$ compleja, sea*

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

a) *La serie $\sum a_n$ converge absolutamente si $\rho < 1$.*
b) *La serie $\sum a_n$ diverge si $\rho > 1$.*
c) *Si $\rho = 1$, el criterio no permite llegar a ninguna conclusión.*

Demostración. Supongamos que $\rho < 1$ y elijamos x tal que $\rho < x < 1$. La definición de ρ implica la existencia de N tal que $|a_n| < x^n$ para $n \geq N$. Por lo tanto, $\sum |a_n|$ converge en virtud del criterio de comparación. Esto demuestra (a).

Para demostrar (b), obsérvese que $\rho > 1$ implica $|a_n| > 1$ para una infinidad de términos y por tanto es imposible que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Finalmente, para probar (c) basta utilizar el mismo ejemplo que en el teorema 8.25.

NOTA. El criterio de la raíz es más «potente» que el criterio del cociente. Es decir, si el criterio de la raíz no permite llegar a ninguna conclusión el del cociente tampoco lo permitirá. Pero existen ejemplos en los que el criterio del cociente da resultado dudoso y en cambio el criterio de la raíz *es* concluyente. (Ver ejercicio 8.4.)

8.15 CRITERIOS DE DIRICHLET Y DE ABEL

Los criterios dados en el apartado anterior nos permiten determinar la convergencia *absoluta* de una serie de términos complejos. Es importante también disponer de criterios que permitan decidir si una serie es convergente cuando no lo es absolutamente. Los criterios de este apartado son particularmente útiles en este sentido. Todos ellos radican en la *fórmula de sumación parcial* de Abel (ecuación (9) del próximo teorema.)

Teorema 8.27. *Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones de números complejos, se define*

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Entonces se tiene la identidad

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k(b_{k+1} - b_k). \tag{9}$$

Por consiguiente, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ converge si tanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_{k+1} - b_k)$ como la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$ convergen.

Demostración. Haciendo $A_0 = 0$, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1}.$$

La segunda afirmación se sigue inmediatamente de esta identidad.

NOTA. La fórmula (9) es análoga a la fórmula de la integración por partes de una integral de Riemann-Stieltjes.

Teorema 8.28 (Criterio de Dirichlet). *Sea $\sum a_n$ una serie de términos complejos cuyas sumas parciales constituyen una sucesión acotada. Sea $\{b_n\}$ una sucesión decreciente de términos reales que converja hacia 0. Entonces $\sum a_n b_n$ converge.*

Demostración. Sea $A_n = a_1 + \dots + a_n$ y supongamos que $|A_n| \leq M$ para todo n. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = 0.$$

Por consiguiente, para establecer la convergencia de $\sum a_n b_n$ basta probar solamente que $\sum A_k(b_{k+1} - b_k)$ es convergente. Como que $b_n \searrow$, tenemos

$$|A_k(b_{k+1} - b_k)| \leq M(b_k - b_{k+1}).$$

Pero la serie $\sum(b_{k+1} - b_k)$ es una serie telescópica convergente Luego el criterio de comparación de series implica la convergencia *absoluta* de $\sum A_k(b_{k+1} - b_k)$.

Teorema 8.29 (Criterio de Abel). *La serie $\sum a_n b_n$ converge si $\sum a_n$ converge y si $\{b_n\}$ es una sucesión monótona convergente de números reales.*

Demostración. La convergencia de $\sum a_n$ y de $\{b_n\}$ establece la existencia del límite $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, en donde $A_n = a_1 + \cdots + a_n$. Además, $\{A_n\}$ es una sucesión acotada. El resto de la demostración es análogo a la del teorema 8.28. (En el ejercicio 8.27 se dan dos criterios más, parecidos a los anteriores.)

8.16 SUMAS PARCIALES DE LA SERIE GEOMÉTRICA $\sum z^n$ SOBRE EL CÍRCULO UNIDAD $|z| = 1$

Para poder utilizar correctamente el criterio de Dirichlet, es preciso disponer de algunas series cuyas sumas parciales estén acotadas. Naturalmente, todas las series *convergentes* gozan de esta propiedad. El teorema que sigue nos proporciona un ejemplo de una serie divergente cuyas sumas parciales están acotadas. Este ejemplo lo constituye la serie geométrica $\sum z^n$ con $|z| = 1$, es decir con $z = e^{ix}$ en donde x es real. La fórmula de las sumas parciales de esta serie es de importancia fundamental en la teoría de las series de Fourier.

Teorema 8.30. *Para cada x real $\neq 2m\pi$ (m es un entero), tenemos*

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\operatorname{sen}(nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)} e^{i(n+1)x/2}. \tag{10}$$

NOTA. Esta identidad genera la siguiente aproximación:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| \leq \frac{1}{|\operatorname{sen}(x/2)|}. \tag{11}$$

Demostración. $(1 - e^{ix}) \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n} (e^{ikx} - e^{i(k+1)x}) = e^{ix} - e^{i(n+1)x}$.

Esto establece la primera igualdad de (10). La segunda se obtiene de la identidad

$$e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{inx/2} - e^{-inx/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} e^{i(n+1)x/2}.$$

NOTA. Considerando las partes real e imaginaria de (10), obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \operatorname{sen} \frac{nx}{2} \cos(n+1)\frac{x}{2} \Big/ \operatorname{sen} \frac{x}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2n+1)\frac{x}{2} \Big/ \operatorname{sen}\frac{x}{2}, \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \operatorname{sen} \frac{nx}{2} \operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2} \Big/ \operatorname{sen}\frac{x}{2}. \tag{13}$$

Utilizando (10), podemos también escribir

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)x} = e^{-ix} \sum_{k=1}^{n} e^{ik(2x)} = \frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x} e^{inx}, \tag{14}$$

identidad válida para cada $x \neq m\pi$ (m es un entero). Considerando las partes real e imaginaria de (14) obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{2 \operatorname{sen} x}, \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(2k-1)x = \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{\operatorname{sen} x}. \tag{16}$$

Las fórmulas (12) y (16) aparecen en la teoría de las series de Fourier.

8.17 REORDENACIÓN DE SERIES

Recordemos que $\mathbf{Z}^+$ designa el conjunto de los enteros positivos, $\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Definición 8.31. *Sea f una función cuyo dominio es $\mathbf{Z}^+$ y su recorrido es $\mathbf{Z}^+$, y supongamos que f es uno a uno. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series tales que*

$$b_n = a_{f(n)} \quad \text{para } n = 1\ 2, \ldots \tag{17}$$

Entonces se dice que $\sum b_n$ es una reordenada de $\sum a_n$.

NOTA. La ecuación (17) implica que $a_n = b_{f^{-1}(n)}$ y por lo tanto $\sum a_n$ es también una reordenada de $\sum b_n$.

Teorema 8.32. *Sea $\sum a_n$ una serie absolutamente convergente de suma s. Entonces cada reordenada de $\sum a_n$ es también absolutamente convergente y su suma es s.*

Demostración. Sea $\{b_n\}$ definida por (17). Entonces

$$|b_1| + \cdots + |b_n| = |a_{f(1)}| + \cdots + |a_{f(n)}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

Por lo que $\sum |b_n|$ tiene sumas parciales acotadas.

Para demostrar que $\sum b_n = s$, sea $t_n = b_1 + \cdots + b_n$, $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos N tal que $|s_N - s| < \varepsilon/2$ y tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| \le \varepsilon/2$. Entonces

$$|t_n - s| \le |t_n - s_N| + |s_N - s| < |t_n - s_N| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Elijamos M de modo que

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subseteq \{f(1), f(2), \ldots, f(M)\}.$$

Entonces $n > M$ implica $f(n) > N$, y por tanto para ese n tenemos

$$\begin{aligned} |t_n - s_N| &= |b_1 + \cdots + b_n - (a_1 + \cdots + a_N)| \\ &= |a_{f(1)} + \cdots + a_{f(n)} - (a_1 + \cdots + a_N)| \\ &\le |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots \le \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

ya que todos los términos $a_1, \ldots, a_N$ se destruyen entre sí en la sustracción. Por lo que $n > M$ implica $|t_n - s| < \varepsilon$ y esto significa que $\sum b_n = s$.

8.18 TEOREMA DE RIEMANN PARA SERIES CONDICIONALMENTE CONVERGENTES

La hipótesis de la convergencia absoluta es esencial en el teorema 8.32. Riemann descubrió que una serie de términos reales *condicionalmente* convergente puede reordenarse de tal suerte que la serie obtenida converja hacia una suma prefijada. Este hecho notable es una consecuencia del teorema que sigue:

Teorema 8.33. *Sea $\sum a_n$ una serie condicionalmente convergente de términos reales. Sean x e y números del intervalo $[-\infty, +\infty]$, dados de antemano, con $x \le y$. Entonces existe una reordenada $\sum b_n$ de $\sum a_n$ tal que*

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = x \qquad y \qquad \limsup_{n\to\infty} t_n = y,$$

en donde $t_n = b_1 + \ldots + b_n$.

Demostración. Descartemos los términos de la serie que son nulos puesto que dichos términos no afectan ni a su convergencia ni a su divergencia. Por lo tanto podemos perfectamente suponer que la serie $\sum a_n$ carece de términos nulos. Sea p_n el n-ésimo término positivo de $\sum a_n$ y sea $-q_n$ el n-ésimo término negativo de $\sum a_n$. Entonces $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son ambas series de términos positivos divergentes. [¿Por qué?] A continuación construimos dos sucesiones de números reales, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, tales que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y, \qquad \text{con } x_n < y_n, \quad y_1 > 0.$$

La idea de la demostración es ahora realmente simple. Tomemos el número de términos positivos (digamos k_1) estrictamente necesario para que

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} > y_1,$$

seguido de los términos negativos precisos (digamos r_1) para que

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} < x_1.$$

Ahora, incorporamos el mínimo bloque de términos positivos *posteriores* para que

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} > y_2,$$

seguido de los términos negativos siguientes indispensables para que

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - \cdots - q_{r_2} < x_2.$$

Estos pasos son posibles dado que $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son ambas series de términos positivos divergentes. Si proseguimos este mismo proceso, obtenemos evidentemente una reordenación de $\sum a_n$. Se deja como un ejercicio para el lector probar que las sumas parciales de esta reordenación tienen límite superior y y límite inferior x.

8.19 SERIES PARCIALES

Definición 8.34. *Sea f una función cuyo dominio es $\mathbf{Z}^+$ y cuyo recorrido es un subconjunto infinito de $\mathbf{Z}^+$, y supongamos que f es una aplicación uno a uno. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series tales que*

$$b_n = a_{f(n)}, \quad si \quad n \in \mathbf{Z}^+.$$

Entonces $\sum b_n$ se llama serie parcial de $\sum a_n$.

Teorema 8.35. *Si $\sum a_n$ converge absolutamente, cada serie parcial $\sum b_n$ también converge absolutamente. Además, tenemos*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Demostración Dado n, sea N el mayor entero del conjunto $\{f(1), \ldots, f(n)\}$. Entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |b_k| \le \sum_{k=1}^{N} |a_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

La desigualdad $\sum_{k=1}^{n} |b_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ implica la convergencia absoluta de $\sum b_n$.

Teorema 8.36. *Sea $\{f_1, f_2, \ldots\}$ una colección numerable de funciones, cada una definida en $\mathbf{Z}^+$, que satisface las siguientes propiedades:*

a) *Cada f_n es uno a uno en $\mathbf{Z}^+$*

b) *El recorrido $f_n(\mathbf{Z}^+)$ es un subconjunto Q_n de $\mathbf{Z}^+$.*

c) *$\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ es una colección de conjuntos disjuntos cuya reunión es $\mathbf{Z}^+$.*

Sea $\sum a_n$ una serie absolutamente convergente y definamos

$$b_k(n) = a_{f_k(n)}, \quad si \quad n \in \mathbf{Z}^+, \quad k \in \mathbf{Z}^+.$$

Entonces:

i) *Para cada k, $\sum_{n=1}^{\infty} b_k(n)$ es una serie parcial de $\sum a_n$ absolutamente convergente.*

ii) *Si $s_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_k(n)$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ converge absolutamente y tiene la misma suma que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Demostración. El teorema 8.35 implica (i). Para demostrar (ii), sea $t_k = |s_1| + \cdots + |s_k|$. Entonces

$$t_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_1(n)| + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} |b_k(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} (|b_1(n)| + \cdots + |b_k(n)|)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (|a_{f_1(n)}| + \cdots + |a_{f_k(n)}|).$$

Pero $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_{f_1(n)}| + \cdots + |a_{f_k(n)}|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Esto demuestra que la serie $\sum |s_k|$ posee sumas parciales acotadas y por lo tanto $\sum s_k$ converge absolutamente.

Para hallar la suma de $\sum s_k$, procedemos como sigue: Fijado $\varepsilon > 0$ de antemano, elegimos N tal que $n \geq N$ implique

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Elegimos suficientes funciones $f_1, \ldots, f_r$ para que cada término $a_1, \ldots, a_N$ aparezca alguna vez en la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f_1(n)} + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} a_{f_r(n)}.$$

El número r depende de N y por consiguiente de ε. Si $n > r$ y $n > N$, tenemos

$$\left| s_1 + s_2 + \cdots + s_n - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{19}$$

puesto que los términos $a_1, a_2, \ldots, a_N$ se destruyen en la sustracción. Ahora (18) implica

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Al combinar este resultado con (19) obtenemos

$$\left| s_1 + \cdots + s_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon,$$

si $n > r$, $n > N$. Esto termina la demostración de (ii).

8.20 SUCESIONES DOBLES

Definición 8.37. *Llamaremos sucesión doble a toda función f de dominio* $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$.

NOTA. Sólo nos interesamos por las sucesiones dobles de términos reales o complejos.

Definición 8.38. *Si $a \in \mathbf{C}$, escribimos $\lim_{p,q\to\infty} f(p, q) = a$ y decimos que la sucesión doble f converge hacia a, cuando se satisface la siguiente condición: Para cada $\varepsilon > 0$, existe un N tal que $|f(p, q) - a| < \varepsilon$ siempre que $p > N$ y $q > N$.*

Teorema 8.39. *Supongamos que $\lim_{p,q\to\infty} f(p, q) = a$. Supongamos además que, para cada p fijo, el límite $\lim_{q\to\infty} f(p, q)$ existe. Entonces tendremos que el límite $\lim_{p\to\infty} (\lim_{q\to\infty} f(p, q))$ también existe y tiene valor a.*

NOTA. A fin de distinguir $\lim_{p,q\to\infty} f(p, q)$ de $\lim_{p\to\infty} (\lim_{q\to\infty} f(p, q))$, al primero lo llamamos *límite doble* y al segundo, *límite reiterado.*

Demostración. Sea $F(p) = \lim_{q\to\infty} f(p, q)$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos N_1 tal que

$$|f(p, q) - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si } p > N_1 \text{ y } q > N_1. \tag{20}$$

Para cada p podemos elegir N_2 tal que

$$|F(p) - f(p, q)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si } q > N_2. \tag{21}$$

(Observemos que N_2 depende tanto de p como de ε.) Para cada $p > N_1$ elegimos N_2, y entonces elegimos un q fijo mayor que N_1 y que N_2. Entonces se verifican simultáneamente (20) y (21) y por lo tanto

$$|F(p) - a| < \varepsilon, \quad \text{si } p > N_1.$$

Por consiguiente, $\lim_{p\to\infty} F(p) = a$.

NOTA. Si intercambiamos los papeles de p y q se verifica un resultado similar. Así pues, la existencia del límite doble $\lim_{p,q\to\infty} f(p, q)$ y de $\lim_{q\to\infty} f(p, q)$ implica la existencia del límite reiterado

$$\lim_{p\to\infty}\left(\lim_{q\to\infty} f(p, q)\right).$$

El ejemplo que sigue prueba que el recíproco es falso.

Ejemplo. Sea

$$f(p, q) = \frac{pq}{p^2 + q^2}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, \quad q = 1, 2, \ldots).$$

Entonces $\lim_{q\to\infty} f(p, q) = 0$ y por lo tanto $\lim_{p\to\infty} (\lim_{q\to\infty} f(p, q)) = 0$. Pero $f(p, q) = \frac{1}{2}$ cuando $p = q$ y $f(p, q) = \frac{2}{5}$ cuando $p = 2q$, y entonces es claro que el límite doble no puede existir en este caso.

Introduciendo la noción de *convergencia uniforme* es posible establecer un recíproco conveniente del teorema 8.39. (Esto lo veremos en el capítulo siguiente, en el teorema 9.6.)

En el ejercicio 8.28 pueden verse otros ejemplos que ilustran el comportamiento de las sucesiones dobles.

8.21 SERIES DOBLES

Definición 8.40. *Sea f una sucesión doble y sea s la sucesión doble definida por medio de la ecuación*

$$s(p, q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} f(m, n).$$

El par (f, s) se llama serie doble y se designa por medio del símbolo $\sum_{m,n} f(m, n)$ o, más brevemente, por $\sum f(m, n)$. La serie doble es convergente hacia la suma a si

$$\lim_{p,q\to\infty} s(p, q) = a.$$

Cada uno de los números $f(m, n)$ es un *término* de la serie doble y cada $s(p, q)$ una suma parcial. Si $\sum f(m, n)$ tiene sólo términos positivos, es fácil demostrar que es convergente si, y sólo si, el conjunto de las sumas parciales está acotado. (Ver el ejercicio 8.29.) Diremos que $\sum f(m, n)$ converge *absolutamente* si $\sum |f(m, n)|$ converge. El teorema 8.18 es válido para series dobles. (Ver el ejercicio 8.29.)

8.22 TEOREMA DE REORDENACIÓN PARA SERIES DOBLES

Definición 8.41. *Sea f una sucesión doble y sea g una función uno a uno definida en $\mathbf{Z}^+$ y con recorrido $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$. Sea G la sucesión definida por*

$$G(n) = f[g(n)] \qquad si\ n \in \mathbf{Z}^+.$$

Entonces g es una reordenación de la sucesión doble f en la sucesión G.

Teorema 8.42. *Sea $\sum f(m, n)$ una serie doble dada y sea g una reordenación de la sucesión doble f en la sucesión G. Entonces*

a) *$\sum G(n)$ converge absolutamente si, y sólo si, $\sum f(m, n)$ converge absolutamente. Suponiendo que $\sum f(m, n)$ converja absolutamente, con suma S, se tiene además:*

b) $\sum_{n=1}^{\infty} G(n) = S$.

c) *$\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ y $\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ son ambas absolutamente convergentes.*

d) *Si $A_m = \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ y $B_n = \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$, las series $\sum A_m$ y $\sum B_n$ son ambas absolutamente convergentes y su suma es S. Esto es,*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = S.$$

Demostración. Sea $T_k = |G(1)| + \ldots + |G(k)|$ y sea

$$S(p, q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} |f(m, n)|.$$

Entonces, para cada k, existe un par (p, q) tal que $T_k \leq S(p, q)$ y, recíprocamente, para cada par (p, q) existe un entero r tal que $S(p, q) \leq T_r$. Estas desigualdades nos dicen que $\sum |G(n)|$ tiene sumas parciales acotadas si, y sólo si, $\sum |f(m, n)|$ tiene sumas parciales acotadas. Esto prueba (a).

Supongamos ahora que $\sum |f(m, n)|$ converge. Antes de demostrar (b), probaremos que la suma de la serie $\sum G(n)$ es independiente de la función g utilizada para construir G a partir de f. Para ver esto, sea h otra reordenación de la sucesión doble f en una sucesión H. Entonces tenemos

$$G(n) = f[g(n)] \qquad \text{y} \qquad H(n) = f[h(n)].$$

Pero esto significa que $G(n) = H[k(n)]$, en donde $k(n) = h^{-1}[g(n)]$. Puesto que k es una aplicación uno a uno de $\mathbf{Z}^+$ sobre $\mathbf{Z}^+$, la serie $\sum H(n)$ es una reordenación de $\sum G(n)$, y por lo tanto tienen la misma suma. A esta suma común la designaremos S'. Más adelante probaremos que $S' = S$.

Obsérvese ahora que cada serie de (c) es una serie parcial de $\sum G(n)$. Por lo tanto (c) se deduce inmediatamente de (a). Aplicando el teorema 8.36, se concluye que $\sum A_m$ converge absolutamente y tiene suma S'. El mismo resultado es verdadero para $\sum B_n$. Queda por demostrar que $S' = S$.

A este respecto sea $T = \lim_{p,q\to\infty} S(p, q)$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos N tal que $0 \le T - S(p, q) < \varepsilon/2$ siempre que $p > N$ y $q > N$. Ahora escribimos

$$t_k = \sum_{n=1}^{k} G(n), \qquad s(p, q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} f(m, n).$$

Elegimos M tal que t_M incluya todos los términos $f(m, n)$ con

$$1 \le m \le N + 1, \qquad 1 \le n \le N + 1.$$

Entonces $t_M - s(N + 1, N + 1)$ es una suma de términos $f(m, n)$ con $m > N$ o con $n > N$. Por consiguiente, si $n \ge M$, tenemos

$$|t_n - s(N + 1, N + 1)| \le T - S(N + 1, N + 1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Análogamente,

$$|S - s(N + 1, N + 1)| \le T - S(N + 1, N + 1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar siempre un M tal que $|t_n - S| < \varepsilon$ siempre que $n \ge M$. Dado que $\lim_{n\to\infty} t_n = S'$, se sigue que $S' = S$.

NOTA. Las series $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ se llaman «series reiteradas». La convergencia de las dos series reiteradas no implica su igualdad. Por ejemplo, supongamos

$$f(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n + 1,\ n = 1, 2, \dots, \\ -1, & \text{si } m = n - 1,\ n = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = -1, \qquad \text{pero} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = 1.$$

8.23 UNA CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA IGUALDAD DE SERIES REITERADAS

Teorema 8.43. *Sea f una sucesión doble de términos complejos. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ converge absolutamente para cada m fijo y que*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |f(m, n)|,$$

converge. Entonces:

a) *La serie doble $\sum_{m,n} f(m, n)$ converge absolutamente.*

b) *La serie $\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ converge absolutamente para cada n.*

c) *Las dos series reiteradas $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ y $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ convergen abolutamente y se tiene*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{m,n} f(m, n).$$

Demostración. Sea g una reordenación de la sucesión doble f en una sucesión G. Entonces $\sum G(n)$ es absolutamente convergente ya que todas las sumas parciales de $\sum |G(n)|$ están acotadas por $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |f(m, n)|$. Por el teorema 8.42(a), la serie doble $\sum_{m,n} f(m, n)$ converge absolutamente, y las proposiciones (b) y (c) se obtienen también del teorema 8.42.

Como aplicación del teorema 8.43 se demuestra el teorema que sigue que trata de series dobles $\sum_{m,n} f(m, n)$ cuyos términos pueden factorizarse en una función que es m veces una cierta función de n.

Teorema 8.44. *Sea $\sum a_m$ y $\sum b_n$ dos series absolutamente convergentes de sumas A y B, respectivamente. Sea f la sucesión doble definida por la ecuación*

$$f(m, n) = a_m b_n, \qquad si\ (m, n) \in \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+.$$

Entonces $\sum_{m,n} f(m, n)$ converge absolutamente y tiene suma AB.

Demostración. Tenemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{m=1}^{\infty} \left(|a_m| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_m| \, |b_n|.$$

Entonces, por el teorema 8.43, la serie doble $\sum_{m,n} a_m b_n$ converge absolutamente y tiene suma AB.

8.24 MULTIPLICACIÓN DE SERIES

Dadas dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$, es posible formar la serie doble $\sum f(m, n)$, en donde $f(m, n) = a_m b_n$. Para cada reordenación g de f en una sucesión G obtenemos una nueva serie $\sum G(n)$. Por analogía con las sumas finitas, parece natural referirse a $\sum f(m, n)$ o a $\sum G(n)$ como al «producto» de $\sum a_n$ y de $\sum b_n$, y el teorema 8.44 justifica esta terminología cuando las dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son absolutamente convergentes. Sin embargo, si $\sum a_n$ o $\sum b_n$ es *condicionalmente convergente*, no es posible garantizar la convergencia de la serie $\sum f(m, n)$, ni la de la serie $\sum G(n)$. Además, si una de ellas converge, su suma no es necesariamente AB. La convergencia y la suma dependen de la reordenación g. Distintas reordenaciones g pueden originar distintos valores del producto. Existe un caso muy importante en el que los términos $f(m, n)$ son ordenados «en diagonal» para producir $\sum G(n)$, y entonces los paréntesis se introducen para agrupar juntos aquellos términos $a_m b_n$ para los que $m + n$ tiene un valor fijo. Este producto se llama *producto de Cauchy* y se define como sigue:

Definición 8.45. *Dadas dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, definimos*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \qquad si\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{22}$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ se llama el producto de Cauchy de $\sum a_n$ y $\sum b_n$.

NOTA. El producto de Cauchy se presenta de manera espontánea al multiplicar dos series de potencias. (Ver el ejercicio 8.33.)

En virtud de los teoremas 8.44 y 8.13, la convergencia absoluta de las *dos* series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ implica la convergencia del producto de Cauchy hacia el valor

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right). \tag{23}$$

Esta igualdad puede fallar si las dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son *condicionalmente* convergentes. (Ver el ejercicio 8.32.) Sin embargo, es posible probar que (23) es válida si *una*, por lo menos, de las series $\sum a_n$, $\sum b_n$ es absolutamente convergente.

Teorema 8.46 (Mertens). *Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y que su suma es A, y supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge con suma B. Entonces el producto de Cauchy de estas dos series tiene suma AB.*

Demostración. Definamos $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, en donde c_k está dado por (22). Sea $d_n = B - B_n$ y $e_n = \sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k}$. Entonces

$$C_p = \sum_{n=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} f_n(k), \tag{24}$$

en donde

$$f_n(k) = \begin{cases} a_k b_{n-k}, & \text{si } n \geq k, \\ 0, & \text{si } n < k. \end{cases}$$

Entonces (24) se convierte en

$$C_p = \sum_{k=0}^{p} \sum_{n=0}^{p} f_n(k) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{n=k}^{p} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{m=0}^{p-k} b_m = \sum_{k=0}^{p} a_k B_{p-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k (B - d_{p-k}) = A_p B - e_p.$$

Para completar la demostración, es suficiente probar que $e_p \to 0$ cuando $p \to \infty$. La sucesión $\{d_n\}$ converge hacia 0, ya que $B = \sum b_n$. Elegimos $M > 0$ tal que $|d_n| \leq M$ para todo n, y sea $K = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos N tal que $n > N$ implique $|d_n| < \varepsilon/(2K)$ y además que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Entonces, para $p > 2N$ podemos escribir

$$|e_p| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k d_{p-k}| + \sum_{k=N+1}^{p} |a_k d_{p-k}| \leq \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{k=0}^{N} |a_k| + M \sum_{k=N+1}^{p} |a_k|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + M \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto demuestra que $e_p \to 0$ cuando $p \to \infty$, y por lo tanto que $C_p \to AB$ cuando $p \to \infty$.

Un teorema relacionado con éste (debido a Abel), en el que no se supone la convergencia absoluta, será demostrado en el capítulo siguiente. (Ver teorema 9.32.)

Otro producto, conocido como el *producto de Dirichlet*, es particularmente importante en la teoría de números. Hacemos $a_0 = b_0 = 0$ y, en vez de definir c_n por medio de (22), usamos la fórmula

$$c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}, \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{25}$$

en donde $\sum_{d/n}$ significa que la suma está extendida sobre todos los *divisores positivos* de n (incluyendo a 1 y a n). Por ejemplo, $c_6 = a_1b_6 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_6b_1$, y $c_7 = a_1b_7 + a_7b_1$. El teorema análogo al teorema de Mertens vale también para este producto. El producto de Dirichlet aparece de forma natural al multiplicar series de Dirichlet. (Ver el ejercicio 8.34.)

8.25 SUMABILIDAD DE CESÀRO

Definición 8.47. *Sea s_n la suma parcial n-ésima de la serie $\sum a_n$ y sea $\{\sigma_n\}$ la sucesión de las medias aritméticas definidas por*

$$\sigma_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n}, \quad si\ n = 1, 2, \dots \tag{26}$$

La serie $\sum a_n$ es sumable de Cesàro (o (C, 1) *sumable) si $\{\sigma_n\}$ converge. Si $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$, entonces S se llama suma de Cesàro (o suma* (C, 1)*) de $\sum a_n$, y se escribe*

$$\sum a_n = S \qquad (C, 1).$$

Ejemplo 1. Sea $a_n = z^n$, $|z| = 1$, $z \neq 1$. Entonces

$$s_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z} \quad \text{y} \quad \sigma_n = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{n}\frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2}.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z} \qquad (C, 1).$$

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \tfrac{1}{2} \qquad (C, 1).$$

Ejemplo 2. Sea $a_n = (-1)^{n+1}n$. En este caso,

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n = \tfrac{1}{2}, \qquad \liminf_{n\to\infty} \sigma_n = 0,$$

y, por lo tanto, $\sum(-1)^{n+1}n$ no es (C, 1) sumable.

Teorema 8.48. *Si una serie es convergente con suma S, entonces es* (C, 1) *sumable con suma de Cesàro S.*

Demostración. Sea s_n la suma parcial n-ésima de la serie, definimos σ_n por medio de (26), e introducimos $t_n = s_n - S$, $\tau_n = \sigma_n - S$. Entonces tenemos

$$\tau_n = \frac{t_1 + \cdots + t_n}{n}, \tag{27}$$

y debemos demostrar que $\tau_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Elegimos $A > 0$ tal que cada $|t_n| \leq A$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos N tal que $n > N$ implique $|t_n| < \varepsilon$. Haciendo $n > N$ en (27), obtenemos

$$|\tau_n| \leq \frac{|t_1| + \cdots + |t_N|}{n} + \frac{|t_{N+1}| + \cdots + |t_n|}{n} < \frac{NA}{n} + \varepsilon.$$

Por consiguiente, $\limsup_{n\to\infty} |\tau_n| \leq \varepsilon$. Al ser ε arbitrario, se sigue que $\lim_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$.

NOTA. Lo que realmente hemos demostrado es que si una sucesión $\{s_n\}$ converge, entonces la sucesión $\{\sigma_n\}$ de las medias aritméticas también converge y, además, hacia el mismo límite.

La sumabilidad de Cesàro es precisamente uno de los numerosos «métodos de sumabilidad» que pueden utilizarse para asignar una «suma» a una serie infinita. El teorema 8.48 y el ejemplo 1 (que sigue a la definición 8.47) prueban que el método de Cesàro tiene un alcance más amplio que la convergencia ordinaria. La teoría de los métodos de sumabilidad es una materia importante y fascinante, pero en la que, no obstante, no podemos entrar en estas páginas. Para un excelente tratamiento de la teoría, el lector puede recurrir al libro de Hardy *Divergent Series* (referencia 8.1). Más adelante veremos que la sumabilidad (C, 1) juega un papel importante en la teoría de las series de Fourier. (Ver el teorema 11.15.)

8.26 PRODUCTOS INFINITOS

En este párrafo se da una introducción a la teoría de los productos infinitos.

Definición 8.49. *Dada una sucesión $\{u_n\}$ de números reales o complejos, sea*

$$p_1 = u_1, \quad p_2 = u_1 u_2, \quad p_n = u_1 u_2 \cdots u_n = \prod_{k=1}^{n} u_k. \tag{28}$$

El par ordenado de sucesiones $(\{u_n\}, \{p_n\})$ se llama producto infinito (o simplemente, producto). El número p_n se llama producto parcial n-ésimo y u_n se llama factor n-ésimo del producto. Los símbolos que siguen sirven para designar el producto definido por (28):

$$u_1 u_2 \cdots u_n \cdots, \qquad \prod_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{29}$$

NOTA. El símbolo $\prod_{n=N+1}^{\infty} u_n$ significa $\prod_{n=1}^{\infty} u_{N+n}$. Se escribe también $\prod u_n$ cuando no hay peligro de confusión.

Por analogía con las series infinitas, parecería natural decir que el producto (29) es convergente si $\{p_n\}$ converge. Sin embargo, esta definición no es conveniente ya que todo producto con un factor igual a cero valdría cero, independientemente del comportamiento de los factores restantes. La definición que sigue resulta más útil:

Definición 8.50. *Dado un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$, sea $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.*

a) *Si una infinidad de factores u_n son cero, diremos que el producto es cero.*

b) *Si ningún factor u_n es cero, diremos que el producto converge si existe un número $p \neq 0$ tal que $\{p_n\}$ converja hacia p. En este caso, p se llama valor del producto y se escribe $p = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$. Si $\{p_n\}$ converge hacia cero, diremos que el producto diverge hacia cero.*

c) *Si existe un N tal que $n > N$ implica $u_n \neq 0$, diremos que $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, siempre que $\prod_{n=N+1}^{\infty} u_n$ converja en el sentido descrito en* (b). *En este caso, el valor del producto $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ es*

$$u_1 u_2 \cdots u_N \prod_{n=N+1}^{\infty} u_n.$$

d) *$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ es divergente si no converge en ninguno de los sentidos descritos en* (b) *o en* (c).

Obsérvese que el valor de un producto infinito convergente puede ser cero. Pero esto sólo ocurrirá si un número finito de factores son cero. La convergencia de un producto infinito no se altera si introducimos o suprimimos un número finito de factores, nulos o no. Es este hecho el que hace sea conveniente la definición 8.50.

Ejemplo. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)$ y $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - 1/n)$ son ambos divergentes. En el primer caso, $p_n = n + 1$, y en el segundo caso, $p_n = 1/n$.

Teorema 8.51 (Condición de Cauchy para el producto). *El producto infinito $\prod u_n$ converge si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $n > N$ implique*

$$|u_{n+1} u_{n+2} \cdots u_{n+k} - 1| < \varepsilon, \qquad \textit{para } k = 1, 2, \ldots \tag{30}$$

Demostración. Supongamos que el producto $\prod u_n$ converge. Podemos suponer que ningún u_n es cero (suprimiendo algunos términos, si es necesario). Sea $p_n = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$ y $p = \lim_{n\to\infty} p_n$. Entonces $p \neq 0$ y por lo tanto existe un $M > 0$ tal que $|p_n| > M$. Como $\{p_n\}$ satisface la condición de Cauchy para sucesiones, dado un $\varepsilon > 0$, existe un N tal que $n > N$ implica $|p_{n+k} - p_n| < \varepsilon M$ para $k = 1, 2, \ldots$ Dividiendo por $|p_n|$, se obtiene (30).

Supongamos ahora que (30) se verifica. Entonces $n > N$ implica $u_n \neq 0$. [¿Por qué?] En (30) hagamos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, sea N_0 el N que le corresponde, y sea $q_n = u_{N_0+1} u_{N_0+2} \cdots u_n$ si $n > N_0$. Entonces (30) implica $\frac{1}{2} < |q_n| < \frac{3}{2}$. Por consiguiente, si $\{q_n\}$ converge, no puede converger hacia cero. Para probar que $\{q_n\}$ converge, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y escribamos (30) como sigue:

$$\left| \frac{q_{n+k}}{q_n} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Esto nos da $|q_{n+k} - q_n| < \varepsilon |q_n| < \frac{3}{2}\varepsilon$. Por consiguiente, $\{q_n\}$ satisface la condición de Cauchy para sucesiones y por lo tanto es convergente. Ello significa que el producto $\prod u_n$ es convergente.

NOTA. Haciendo $k = 1$ en (30), tenemos que la convergencia de $\prod u_n$ implica $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. Por este motivo, los factores de un producto se escriben $u_n = 1 + a_n$. Entonces la convergencia de $\prod(1 + a_n)$ implica $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema 8.52. *Supongamos cada $a_n > 0$; entonces el producto $\prod(1 + a_n)$ converge si, y sólo si, la serie $\sum a_n$ converge.*

Demostración. Parte de la demostración se base en la siguiente desigualdad:

$$1 + x \leq e^x. \tag{31}$$

Si bien (31) se verifica para todo x real, sólo precisamos de ella para $x \geq 0$. Cuando $x > 0$, (31) es una simple consecuencia del teorema del valor medio, que nos da

$$e^x - 1 = xe^{x_0}, \quad \text{en donde } 0 < x_0 < x.$$

Dado que $e^{x_0} \geq 1$, (31) resulta inmediatamente de esta ecuación.

Sea ahora $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $p_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n)$. Las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{p_n\}$ son crecientes, y por lo tanto para probar el teorema basta demostrar que $\{s_n\}$ está acotada si, y sólo si, $\{p_n\}$ está acotada.

En primer lugar, la desigualdad $p_n > s_n$ es obvia. A continuación, hagamos $x = a_k$ en (31), donde $k = 1, 2, \ldots, n$, y multiplicando obtenemos $p_n < e^{s_n}$. Por consiguiente, $\{s_n\}$ está acotada si, y sólo si, $\{p_n\}$ está acotada. Obsérvese que $\{p_n\}$ no converge hacia cero ya que cada $p_n \geq 1$. Nótese también que $p_n \to +\infty$ si $s_n \to +\infty$.

Definición 8.53. *El producto $\prod(1 + a_n)$ es absolutamente convergente si $\prod(1 + |a_n|)$ es convergente.*

Teorema 8.54. *La convergencia absoluta de $\prod(1 + a_n)$ implica la convergencia.*

Demostración. Úsese la condición de Cauchy junto con la desigualdad

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \cdots (1 + a_{n+k}) - 1| \\ \leq (1 + |a_{n+1}|)(1 + |a_{n+2}|) \cdots (1 + |a_{n+k}|) - 1.$$

NOTA. El teorema 8.52 nos dice que $\prod(1 + a_n)$ converge absolutamente si, y sólo si, $\sum a_n$ converge absolutamente. En el ejercicio 8.43 se da un ejemplo en el que $\prod(1 + a_n)$ converge y sin embargo $\sum a_n$ diverge.

Un resultado análogo al teorema 8.52 es el siguiene:

Teorema 8.55. *Supongamos que cada $a_n \geq 0$. Entonces el producto $\prod(1 - a_n)$ converge si, y sólo si, la serie $\sum a_n$ converge.*

Demostración. La convergencia de $\sum a_n$ implica la convergencia absoluta (y por lo tanto la convergencia) de $\prod(1 - a_n)$.

Para probar el recíproco, supongamos que $\sum a_n$ diverge. Si $\{a_n\}$ no converge hacia cero, entonces $\prod(1 - a_n)$ también diverge. Por consiguiente podemos suponer que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Eliminando algunos términos, si es necesario, podemos suponer que cada $a_n \leq \frac{1}{2}$. Entonces cada factor $1 - a_n \geq \frac{1}{2}$ (y por lo tanto $\neq 0$). Sea

$$p_n = (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n), \qquad q_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n).$$

Puesto que tenemos

$$(1 - a_k)(1 + a_k) = 1 - a_k^2 \leq 1,$$

podemos escribir $p_n \leq 1/q_n$. Pero en la demostración del teorema 8.52 se ha observado que $q_n \to +\infty$ si $\sum a_n$ diverge. Así pues, $p_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, en virtud de la parte (b) de la definición 8.50, se sigue que $\prod(1 - a_n)$ diverge hacia 0.

8.27 PRODUCTO DE EULER PARA LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

Para terminar este capítulo daremos un teorema de Euler que expresa la función zeta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ por medio de un producto infinito extendido sobre todos los números primos.

Teorema 8.56. *Sea p_k el k-ésimo número primo. Entonces si $s > 1$ tenemos*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}.$$

El producto converge absolutamente.

Demostración. Consideremos el producto parcial $P_m = \prod_{k=1}^{m} (1 - p_k^{-s})^{-1}$ y veamos que $P_m \to \zeta(s)$ cuando $m \to \infty$. Si escribimos cada uno de los factores como una serie geométrica tenemos

$$P_m = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \cdots\right),$$

con lo que P_m queda expresado como producto de un número finito de series absolutamente convergentes. Si multiplicamos a la vez todas estas series y ordenamos los términos de acuerdo con el crecimiento de los denominadores, obtenemos otra serie absolutamente convergente, cuyo término general es de la forma

$$\frac{1}{p_1^{a_1 s}\, p_2^{a_2 s} \cdots p_m^{a_m s}} = \frac{1}{n^s}, \quad \text{en donde} \quad n = p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m},$$

y cada $a_i \geq 0$. Por consiguiente tenemos

$$P_m = \sum_1 \frac{1}{n^s},$$

en donde $\sum_1$ está extendida a aquellos n cuyos factores primos son todos $\leq p_m$. En virtud del teorema de descomposición única (teorema 1.9), cada n aparece en $\sum_1$ una vez y una sola. Restando P_m de $\zeta(s)$ obtenemos

$$\zeta(s) - P_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_1 \frac{1}{n^s} = \sum_2 \frac{1}{n^s},$$

en donde $\sum_2$ está extendida a aquellos n que poseen por lo menos un divisor primo $> p_m$. Puesto que estos n se hallan entre los enteros $> p_m$, tenemos

$$|\zeta(s) - P_m| \leq \sum_{n > p_m} \frac{1}{n^s}.$$

Cuando $m \to \infty$ la última suma tiende a 0 ya que $\sum n^{-s}$ converge, luego $P_m \to \zeta(s)$. Para probar que el producto converge absolutamente usaremos el teorema 8.52. El producto tiene la forma $\prod(1 + a_k)$, en donde

$$a_k = \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \cdots$$

La serie $\sum a_k$ converge absolutamente ya que está dominada por $\sum n^{-s}$. Por consiguiente, $\prod(1 + a_k)$ converge también absolutamente.

EJERCICIOS

Sucesiones

8.1 Dada una sucesión real $\{a_n\}$ acotada superiormente, sea $u_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Entonces $u_n \searrow$ y, en consecuencia, $U = \lim_{n\to\infty} u_n$ es finito o $-\infty$. Demostrar que

$$U = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}).$$

b) Análogamente, si $\{a_n\}$ es acotado inferiormente, probar que

$$V = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf\{a\,;\, k \geq n\}).$$

Si U y V son finitos, probar que:

c) Existe una subsucesión de $\{a_n\}$ que converge hacia U y una subsucesión que converge hacia V.

d) Si $U = V$, cada subsucesión de $\{a_n\}$ converge hacia U.

8.2 Dadas dos sucesiones reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, acotadas inferiormente, probar que

a) $\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

b) $\limsup_{n\to\infty} (a_n b_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$ si $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo n, y si los límites $\limsup_{n\to\infty} a_n$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n$ son ambos finitos o ambos infinitos.

8.3 Demostrar los teoremas 8.3 y 8.4.

8.4 Si cada $a_n > 0$, probar que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

8.5 Sea $a_n = n^n/n!$. Probar que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = e$ y utilizar el ejercicio 8.4 para deducir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e.$$

8.6 Sea $\{a_n\}$ una sucesión real y sea $\sigma_n = (a_1 + \ldots + a_n)/n$. Probar que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

8.7 Calcular $\limsup_{n\to\infty} a_n$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n$ si a_n está dado por

a) $\cos n$, b) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\cos n\pi$, c) $n \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{3}$,

d) $\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2} \cos \dfrac{n\pi}{2}$, e) $(-1)^n n/(1+n)^n$, f) $\dfrac{n}{3} - \left[\dfrac{n}{3}\right]$.

NOTA. En (f), $[x]$ designa el mayor entero $\leq x$.

8.8 Sea $a_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k}$. Probar que la sucesión $\{a_n\}$ converge hacia un límite p en el intervalo $1 < p < 2$.

En cada uno de los ejercicios que van del 8.9 al 8.14, probar que la sucesión real $\{a_n\}$ es convergente. Las condiciones que se dan se supone se verifican para todo $n \geq 1$. En los ejercicios que van del 8.10 al 8.14, probar que $\{a_n\}$ tiene el límite L que se indica.

8.9 $|a_n| \le 2, \quad |a_{n+2} - a_{n+1}| \le \frac{1}{8}|a_{n+1}^2 - a_n^2|$.

8.10 $a_1 \ge 0, \quad a_2 \ge 0, \quad a_{n+2} = (a_n a_{n+1})^{1/2}, \quad L = (a_1 a_2^2)^{1/3}$.

8.11 $a_1 = 2, \quad a_2 = 8, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n+1}), \quad a_{2n+2} = \dfrac{a_{2n}a_{2n-1}}{a_{2n+1}}, \; L = 4$.

8.12 $a_1 = -\frac{3}{2}, \quad 3a_{n+1} = 2 + a_n^3, \quad L = 1$. Modificar a_1 para que $L = -2$.

8.13 $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{3(1 + a_n)}{3 + a_n}, \quad L = \sqrt{3}$.

8.14 $a_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ en donde $b_1 = b_2 = 1, \quad b_{n+2} = b_n + b_{n+1}, \quad L = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Indicación. Probar que $b_{n+2}b_n - b_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ y deducir que

$$|a_n - a_{n+1}| < n^{-2}, \text{ si } n > 4.$$

Series

8.15 Estudiar la convergencia (p y q son números reales fijos).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^p$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} p^n n^p \quad (p > 0)$, d) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^p - n^q} \quad (0 < q < p)$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-1/n}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p^n - q^n} \quad (0 < q < p)$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \log (1 + 1/n)}$, h) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\log n)^{\log n}}$,

i) $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \log n (\log \log n)^p}$, j) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\log \log n}\right)^{\log \log n}$,

k) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1 + n^2} - n)$, l) $\sum_{n=2}^{\infty} n^p \left(\dfrac{1}{\sqrt{n - 1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

m) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$, n) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p(\sqrt{n + 1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n - 1})$.

8.16 Sea $S = \{n_1, n_2, \ldots\}$ la colección de los enteros positivos que no contienen la cifra 0 en su representación decimal. (Por ejemplo, $7 \in S$ pero $10 \notin S$.) Probar que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$ converge y tiene una suma menor que 90.

8.17 Dados enteros $a_1, a_2, \ldots$ tales que $1 \le a_n \le n - 1$, $n = 2, 3, \ldots$, probar que la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n!$ es racional si, y sólo si, existe un entero N tal que $a_n = n - 1$ para todo $n \ge N$. *Indicación.* Para demostrar la suficiencia, probar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (n - 1)/n!$ es una serie telescópica con suma 1.

8.18 Sean p y q enteros fijos, $p \ge q \ge 1$, y sea

$$x_n = \sum_{k=qn+1}^{pn} \frac{1}{k}, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

a) Utilizar la fórmula (8) para demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = \ln (p/q)$.

b) Cuando $q = 1$, $p = 2$, probar que $s_{2n} = x_n$ y deducir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

c) Reordenar la serie (b), escribiendo alternativamente p términos positivos seguidos de q términos negativos y utilizar (a) para demostrar que esta reordenada tiene suma

$$\ln 2 + \tfrac{1}{2} \ln (p/q).$$

d) Hallar la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(1/(3n - 2) - 1/(3n - 1))$.

8.19 Sea $c_n = a_n + ib_n$, en donde $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, $b_n = 1/n^2$. Probar que $\sum c_n$ es condicionalmente convergente.

8.20 Utilizar el teorema 8.23 para obtener las fórmulas siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k} = \frac{1}{2} \log^2 n + A + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ (A constante).

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k} = \log (\log n) + B + O\left(\frac{1}{n \log n}\right)$ (B constante).

8.21 Si $0 < a \le 1$, $s > 1$, definamos $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + a)^{-s}$.

a) Probar que esta serie converge absolutamente para $s > 1$ y probar que

$$\sum_{h=1}^{k} \zeta\left(s, \frac{h}{k}\right) = k^s \zeta(s) \qquad \text{si } k = 1, 2, \ldots,$$

en donde $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$ es la función zeta de Riemann.

b) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^s = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ si $s > 1$.

8.22 Dada una serie convergente $\sum a_n$, en donde cada $a_n \ge 0$. Probar que $\sum \sqrt{a_n} n^{-p}$ converge si $p > \frac{1}{2}$. Dar un contraejemplo para $p = \frac{1}{2}$.

8.23 Si $\sum a_n$ diverge, demostrar que $\sum n a_n$ también diverge.

8.24 Suponiendo que $\sum a_n$ converge y que cada $a_n > 0$, demostrar que

$$\sum (a_n a_{n+1})^{1/2}$$

también converge. Demostrar que el recíproco también es cierto si $\{a_n\}$ es monótona.

8.25 Supongamos que $\sum a_n$ converge absolutamente. Probar que cada una de las series que siguen también converge absolutamente:

a) $\sum a_n^2$, b) $\sum \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ (si $a_n \neq -1$),

c) $\sum \dfrac{a_n^2}{1 + a_n^2}$.

8.26 Determinar todos los valores reales de x para los que la serie que sigue es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

8.27 Probar las siguientes proposiciones:

a) $\sum a_n b_n$ converge si $\sum a_n$ converge y si $\sum(b_n - b_{n+1})$ converge absolutamente.
b) $\sum a_n b_n$ converge si $\sum a_n$ tiene las sumas parciales acotadas y si $\sum(b_n - b_{n+1})$ converge absolutamente, con tal que $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Sucesiones dobles y series dobles

8.28 Investigar la existencia de los dos límites reiterados así como del límite doble de las sucesiones dobles f definidas por

a) $f(p, q) = \dfrac{1}{p + q}$, b) $f(p, q) = \dfrac{p}{p + q}$,

c) $f(p, q) = \dfrac{(-1)^p p}{p + q}$, d) $f(p, q) = (-1)^{p+q}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\right)$,

e) $f(p, q) = \dfrac{(-1)^p}{q}$, f) $f(p, q) = (-1)^{p+q}$,

g) $f(p, q) = \dfrac{\cos p}{q}$, h) $f(p, q) = \dfrac{p}{q^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{q} \operatorname{sen} \frac{n}{p}$.

Respuesta. El límite doble existe en (a), (d), (e), (g). Los dos límites reiterados existen en (a), (b), (h). En (c), (e) sólo existe un límite reiterado. En (d), (f) no existe ningún límite reiterado.

8.29 Probar las proposiciones siguientes:

a) Una serie doble de términos positivos converge si, y sólo si, el conjunto de las sumas parciales está acotado.
b) Una serie doble converge si converge absolutamente.
c) $\sum_{m,n} e^{-(m^2+n^2)}$ converge.

8.30 Supongamos que la serie doble $\sum_{m,n} a(n)x^{mn}$ converge absolutamente para $|x| < 1$. Llamemos a su suma $S(x)$. Probar que cada una de las series que siguen también convergen absolutamente para $|x| < 1$ y que tienen suma $S(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) \frac{x^n}{1 - x^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} A(n)x^n, \text{ en donde } A(n) = \sum_{d|n} a(d).$$

8.31 Si α es real, probar que la serie doble $\sum_{m,n} (m + in)^{-\alpha}$ converge absolutamente si, y sólo si, $\alpha > 2$. *Indicación.* Sea $s(p, q) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} |m + in|^{-\alpha}$. El conjunto

$$\{m + in : m = 1, 2, \ldots, p, n = 1, 2, \ldots, p\}$$

consta de p^2 números complejos de los que uno tiene valor absoluto $\sqrt{2}$, tres satisfacen $|1 + 2i| \leq |m + in| \leq 2\sqrt{2}$, cinco satisfacen $|1 + 3i| \leq |m + in| \leq 3\sqrt{2}$, etc. Verificar este resultado geométricamente y deducir la desigualdad

$$2^{-\alpha/2} \sum_{n=1}^{p} \frac{2n - 1}{n^\alpha} \leq s(p, p) \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{2n - 1}{(n^2 + 1)^{\alpha/2}}.$$

8.32 a) Probar que el producto de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}/\sqrt{n + 1}$ por sí misma es una serie divergente.
b) Probar que el producto de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}/(n + 1)$ por sí misma es la serie

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

¿Converge? ¿Por qué?

8.33 Dadas dos series de potencias absolutamente convergentes, a saber $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, con sumas $A(x)$ y $B(x)$, respectivamente, probar que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = A(x)B(x)$, en donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

8.34 Una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ se llama *serie de Dirichlet*. Dadas dos series de Dirichlet absolutamente convergentes, a saber $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n^s$, con sumas $A(s)$ y $B(s)$, respectivamente, probar que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n/n^s = A(s)B(s)$ en donde $c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}$.

8.35 Si $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$, $s > 1$, probar que $\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)/n^s$, en donde $d(n)$ es el número de divisores positivos de n (incluyendo a 1 y a n).

Sumabilidad de Cesàro

8.36 Probar que cada una de las series siguientes tiene suma (C, 1) igual a 0:

a) $1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - - + + \cdots$.
b) $\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + + - \cdots$.
c) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots$ (x real, $x \neq m\pi$).

8.37 Dada una serie $\sum a_n$, sean

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad t_n = \sum_{k=1}^{n} k a_k, \qquad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k.$$

Probar que

a) $t_n = (n+1)s_n - n\sigma_n$.

b) Si $\sum a_n$ es (C, 1) sumable, entonces $\sum a_n$ converge si, y sólo si, $t_n = o(n)$ cuando $n \to \infty$.

c) $\sum a_n$ es (C, 1) sumable si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n/n(n+1)$ converge.

8.38 Dada una sucesión monótona $\{a_n\}$ de términos positivos, tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, consideremos

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k s_k.$$

Probar que

a) $v_n = \frac{1}{2}u_n + (-1)^n s_n/2$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n$ is (C, 1) sumable y tiene suma de Cesàro igual a $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(1 + \frac{1}{2} + \cdots + 1/n) = -\log\sqrt{2}$ (C, 1).

Productos infinitos

8.39 Determinar si convergen o no los productos infinitos siguientes. Encontrar el valor de cada uno de los que convergen.

a) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$, b) $\prod_{n=2}^{\infty}(1 - n^{-2})$,

c) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$, d) $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n})$ si $|z| < 1$.

8.40 Si cada una de las sumas parciales s_n de la serie convergente $\sum a_n$ es no nula y si la suma es asimismo no nula, probar que el producto infinito $a_1\prod_{n=2}^{\infty}(1 + a_n/s_{n-1})$ converge y tiene el valor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

8.41 Hallar los valores de los siguientes productos estableciendo las siguientes identidades y sumando las series:

a) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2^n - 2}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$. b) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

8.42 Determinar todos los números reales x para los que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}\cos(x/2^n)$ converge y hallar el valor del producto cuando sea convergente.

8.43 a) Sea $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ para $n = 1, 2, \ldots$ Probar que $\prod(1 + a_n)$ diverge pero que $\sum a_n$ converge.

b) Sea $a_{2n-1} = -1/\sqrt{n}$, $a_{2n} = 1/\sqrt{n} + 1/n$ para $n = 1, 2, \ldots$ Probar que $\prod(1 + a_n)$ converge pero que $\sum a_n$ diverge.

8.44 Supongamos que $a_n \geq 0$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ Supongamos, además, que

$$a_{2n+2} < a_{2n+1} < \frac{a_{2n}}{1 + a_{2n}} \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Probar que $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + (-1)^k a_k)$ converge si, y sólo si, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ converge.

8.45 Una sucesión compleja $\{f(n)\}$ se llama *multiplicativa* si $f(1) = 1$ y si $f(mn) = f(m)f(n)$ siempre que m y n sean primos entre sí. (Ver sección 1.7.) Se llama *completamente multiplicativa* si

$$f(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad f(mn) = f(m)f(n) \qquad \text{para todo } m \text{ y } n.$$

a) Si $\{f(n)\}$ es multiplicativa y si la serie $\sum f(n)$ es absolutamente convergente, probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{k=1}^{\infty}\{1 + f(p_k) + f(p_k^2) + \cdots\},$$

en donde p_k designa el k-ésimo número primo, siendo el producto absolutamente convergente.

b) Si, además, $\{f(n)\}$ es completamente multiplicativa, probar que la fórmula de (a) se transforma en

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1 - f(p_k)}.$$

Obsérvese que el producto de Euler para $\zeta(s)$ (teorema 8.56) es el caso particular en que $f(n) = n^{-s}$.

8.46 Este ejercicio esboza una demostración simple de la fórmula $\zeta(2) = \pi^2/6$. Partamos de la desigualdad sen $x < x <$ tg x, válida para $0 < x < \pi/2$, tomemos recíprocos, y elevemos al cuadrado cada miembro, con lo cual obtenemos

$$\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x.$$

Ahora hagamos $x = k\pi/(2m+1)$, en donde k y m son enteros, con $1 \leq k \leq m$, y sumemos para k y obtenemos

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}$$

Usar la fórmula del ejercicio 1.47(c) para deducir la desigualdad

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{2m(m+1)\pi^2}{3(2m+1)^2}.$$

Ahora hagamos $m \to \infty$ y obtenemos $\zeta(2) = \pi^2/6$.

8.47 Usar un argumento análogo al esbozado en el ejercicio 8.46 para probar que $\zeta(4) = \pi^4/90$.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

8.1 Hardy, G. H., *Divergent Series*. Oxford University Press, Oxford, 1949.
8.2 Hirschmann, I. I., *Infinite Series*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.
8.3 Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*, 2.ª ed. Traductor, R. C. Young. Hafner, New York, 1948.

CAPÍTULO 9

Sucesiones de funciones

9.1 CONVERGENCIA PUNTUAL DE SUCESIONES DE FUNCIONES

Este capítulo se refiere a sucesiones $\{f_n\}$ cuyos términos son funciones reales o complejas que tienen todas un mismo dominio sobre la recta real **R** o sobre el plano complejo **C**. Para cada x del dominio podemos formar otra sucesión $\{f_n(x)\}$ cuyos términos son los correspondientes valores imágenes. S designa el conjunto de los x para los que esta segunda sucesión converge. La función f definida por medio de la ecuación

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \text{si } x \in S,$$

se llama la *función límite* de la sucesión $\{f_n\}$, y se dice que $\{f_n\}$ *converge puntualmente* hacia f en el conjunto S.

El interés primordial de este capítulo lo constituyen preguntas del tipo siguiente: Si cada una de las funciones de una sucesión $\{f_n\}$ posee una cierta propiedad, tal como la continuidad, la diferenciabilidad, o la integrabilidad, ¿hasta qué punto esta propiedad se transfiere a la función límite? Por ejemplo, si cada función f_n es continua en x_0, ¿su función límite f es también continua en x_0? Veremos que, en general, esto no es así. Comprobaremos que la convergencia puntual no es lo suficientemente fuerte para transferir las propiedades mencionadas de los términos individuales f_n a la función límite f. Por consiguiente nos veremos obligados a estudiar métodos de convergencia más fuertes que preserven estas propiedades. El más importante de ellos lo constituye la noción de convergencia *uniforme*.

Antes de introducir la convergencia uniforme, formularemos de otra manera una de nuestras preguntas básicas. Cuando preguntamos si la continuidad de cada una de las funciones f_n en c implica la continuidad de la función f en c, lo que realmente estamos preguntando es si la ecuación

$$\lim_{x\to c} f_n(x) = f_n(c),$$

implica la ecuación

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c). \tag{1}$$

Pero (1) se puede expresar también escribiendo:

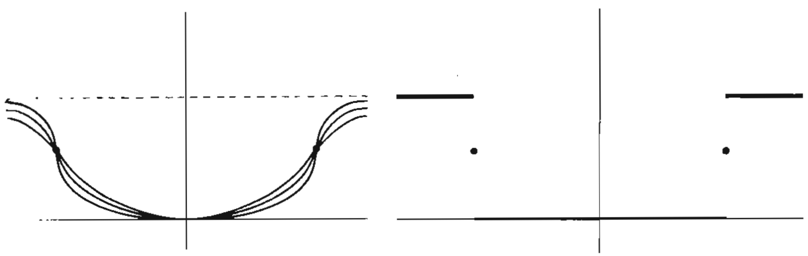
$$\lim_{x\to c}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to c} f_n(x). \tag{2}$$

Por consiguiente nuestra pregunta acerca de la continuidad equivale a la siguiente: ¿Es posible intercambiar los símbolos de límite en (2)? Veremos que, en general, no. En primer lugar, es posible que el límite de (1) no exista. En segundo lugar, incluso si existe, no es necesario que sea igual a $f(c)$. Nos hemos encontrado ya en el capíulo 8 con una situación análoga en conexión con las series reiteradas cuando encontramos que $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ no es necesariamente igual a $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$.

La cuestión de si es posible invertir el orden de paso al límite se presenta repetidas veces en Análisis matemático. Veremos que la convergencia uniforme es una condición *suficiente* de gran alcance para la validez de la inversión del paso al límite, pero no constituye una respuesta completa a la cuestión planteada. Nos encontraremos con ejemplos en los que es posible intercambiar el orden de los límites y sin embargo la sucesión no es uniformemente convergente.

9.2. EJEMPLOS DE SUCESIONES DE FUNCIONES REALES

Los ejemplos que se exponen a continuación ilustran algunas de las posibilidades que pueden aparecer cuando se forma la función límite de una sucesión de funciones reales.



$f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $n = 1, 2, 3.$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Figura 9.1

Ejemplo 1. *Una sucesión de funciones continuas con función límite discontinua.* Sea $f_n(x) = x^{2n}/(1 + x^{2n})$ si $x \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Las gráficas de algunos de los términos están representadas en la figura 9.1. En este caso $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para cada x real, y la función límite está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = 1, \\ 1 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Cada f_n es continua en $\mathbf{R}$, sin embargo f es discontinua en $x = 1$ y en $x = -1$.

Ejemplo 2. *Una sucesión de funciones para las que* $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$. Sea $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$ si $x \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Si $0 \le x \le 1$ el límite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe y es igual a 0. (Ver fig. 9.2.) Por lo tanto, $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Pero

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= n^2\int_0^1 x(1-x)^n\,dx \\ &= n^2\int_0^1 (1-t)t^n\,dt = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

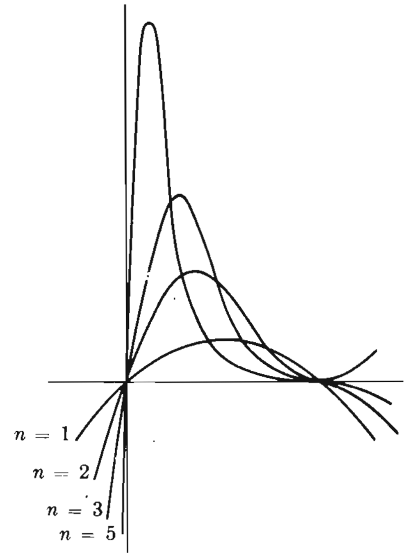


Figura 9.2

luego $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$. En otras palabras, el límite de las integrales no es igual a la integral de la función límite. Luego, las operaciones de «límite» y de «integración» no pueden ser intercambiadas.

Ejemplo 3. *Una sucesión de funciones diferenciables con una función límite no diferenciable.* Sea $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/\sqrt{n}$ si $x \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para cada x. Sin embargo, $f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$, luego $\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ no existe para todo x. (Ver fig. 9.3.)

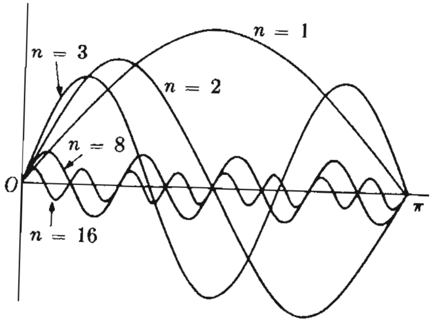


Figura 9.3

9.3 DEFINICIÓN DE CONVERGENCIA UNIFORME

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converja puntualmente hacia una función límite f en un cierto conjunto S. Esto significa que para cada punto x de S y para cada $\varepsilon > 0$, existe un N (que depende a la vez de x y de ε) tal que

$$n > N \quad \text{implica} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Si un mismo N sirve para *todo* punto de S, la convergencia se llama *uniforme* en S. Esto es, tenemos

Definición 9.1 *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ se llama uniformemente convergente a f en el conjunto S si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un N (que depende sólo de ε) tal que $n > N$ implica*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para cada } x \textit{ de } S.$$

Expresamos esto simbólicamente escribiendo

$$f_n \to f \quad \textit{uniformemente en } S.$$

Cuando cada uno de los términos de la sucesión $\{f_n\}$ es una función real, es posible dar una interpretación geométrica útil de la convergencia uniforme. La desigualdad $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ equivale entonces a las *dos* desigualdades

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon. \tag{3}$$

Si (3) se verifica para todo $n > N$ y para todo x de S, significa que la gráfica entera de f_n (esto es, el conjunto $\{(x, y): y = f_n(x),\ x \in S\}$ está todo él contenido en una «banda» de altura 2ε situada simétricamente en torno a la gráfica de f. (Ver fig. 9.4.)

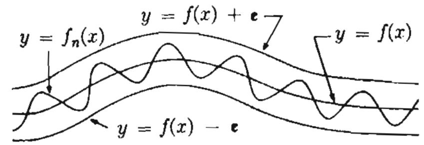


Figura 9.4

Una sucesión $\{f_n\}$ se llama *uniformemente acotada* en S si existe una constante $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \le M$ para todo x de S y todo n. El número M se llama *cota uniforme* de $\{f_n\}$. Si cada función individual está acotada y si $f_n \to f$ uniformemente en S, entonces es fácil demostrar que $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en S. (Ver el ejercicio 9.1.) Esta observación permite a veces concluir que una sucesión *no* es uniformemente convergente. Por ejemplo, una simple inspección a la figura 9.2 nos dice inmediatamente que la sucesión del ejemplo 2 no puede ser uniformemente convergente sobre ningún subconjunto que contenga un entorno del origen. Sin embargo, la convergencia en este ejemplo *es* uniforme en todo subintervalo compacto que no contenga al origen.

9.4 CONVERGENCIA UNIFORME Y CONTINUIDAD

Teorema 9.2. *Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en S. Si cada f_n es continua en un punto c de S, entonces la función límite f también es continua en c.*

NOTA. Si c es un punto de acumulación de S, la conclusión implica que

$$\lim_{x\to c} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to c} f_n(x).$$

Demostración. Si c es un punto aislado de S, entonces f es automáticamente continua en c. Supongamos, entonces, que c es un punto de acumulación de S. Por hipótesis, para cada $\varepsilon > 0$ existe un M tal que $n \ge M$ implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para cada } x \text{ de } S.$$

Como que f_M es continua en c, existe un entorno $B(c)$ tal que $x \in B(c) \cap S$ implica

$$|f_M(x) - f_M(c)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pero

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f_M(c)| + |f_M(c) - f(c)|.$$

Si $x \in B(c) \cap S$, cada término de la derecha es menor que $\varepsilon/3$ y por lo tanto $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Esto prueba el teorema.

NOTA. La convergencia uniforme de $\{f_n\}$ es suficiente pero no es necesaria para transmitir la continuidad de los términos individuales a la función límite. En el ejemplo 2 (sección 9.2), teníamos una sucesión convergente pero no uniformemente convergente de funciones continuas con función límite continua.

9.5 LA CONDICIÓN DE CAUCHY PARA LA CONVERGENCIA UNIFORME

Teorema 9.3. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto S. Existe una función f tal que $f_n \to f$ uniformemente en S si, y sólo si, se satisface la siguiente condición (llamada la condición de Cauchy): Para cada $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $m > N$ y $n > N$ implican*

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para cada } x \text{ de } S.$$

Demostración. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en S. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, podemos hallar un N tal que $n > N$ implique $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ para todo x de S. Tomando $m > N$, tendremos también $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2$, y entonces $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para cada x de S.

Recíprocamente, supongamos que se satisface la condición de Cauchy. Entonces, para cada x de S, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente. Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ si $x \in S$. Debemos probar que $f_n \to f$ uniformemente en S. Dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir N tal que $n > N$ implique $|f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon/2$ para cada $k = 1, 2, \ldots$ y cada x de S. Entonces, $\lim_{k\to\infty} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Luego, $n > N$ implica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para cada x de S. Esto prueba que $f_n \to f$ uniformemente en S.

NOTA. La convergencia puntual y la convergencia uniforme pueden formularse en el escenario más general de los espacios métricos. Si f_n y f son funciones de un conjunto no vacío S en un espacio métrico (T, d_T), decimos que $f_n \to f$ uniformemente en S, si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un N (que depende sólo de ε) tal que $n \geq N$ implica

$$d_T(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{para todo } x \text{ de } S.$$

El teorema 9.3 es válido en este ámbito más general y, si S es un espacio métrico; el teorema 9.2 también es válido. Valen exactamene las mismas demostraciones, cambiando adecuadamente las métricas euclídeas por las métricas d_S y d_T. Dado que nosotros estamos interesados primordialmente en las funciones reales o complejas definidas en subconjuntos de **R** o de **C**, en adelante no proseguiremos esta extensión de los conceptos excepto para describir el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Consideremos el espacio métrico $(B(S), d)$ de todas las funciones reales acotadas sobre un cierto conjunto S no vacío, provisto de la métrica $d(f, g) = \|f - g\|$, en donde $\|f\| = \sup_{x\in S} |f(x)|$ es la norma del supremo. (Ver ejercicio 4.66.) Entonces $f_n \to f$ en el espacio métrico $(B(S), d)$ si, y sólo si, $f_n \to f$ uniformemente en S. En otras palabras, la convergencia uniforme en S coincide con la convergencia ordinaria en el espacio métrico $(B(S), d)$.

9.6 CONVERGENCIA UNIFORME DE SERIES INFINITAS DE FUNCIONES

Definición 9.4. *Dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en un conjunto S, para cada x de S se considera*

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Si existe una función f tal que $s_n \to f$ uniformemente en S, se dice que la serie $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en S y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \text{ (uniformemente en } S\text{)}.$$

Teorema 9.5 (Condición de Cauchy para la convergencia uniforme de series). *La serie infinita $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en S si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $n > N$ implique*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{para } p = 1, 2, \ldots, \text{ y cada } x \text{ de } S.$$

Demostración. Definir s_n por (4) y aplicar el teorema 9.3.

Teorema 9.6 (Criterio M de Weierstrass). *Sea $\{M_n\}$ una sucesión de números no negativos tal que*

$$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots, \text{ y cada } x \text{ de } S.$$

Entonces $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en S si $\sum M_n$ converge.

Demosración. Aplicar los teoremas 8.11 y 9.5 junto con la desigualdad

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k.$$

Teorema 9.7. *Supongamos que $\sum f_n(x) = f(x)$ (uniformemente en S). Si cada f_n es continua en un punto x_0 de S, entonces f también es continua en x_0.*
Demostración. Definimos s_n por (4). La continuidad de cada f_n en x_0 implica la continuidad de s_n en x_0, y la conclusión se sigue inmediatamente del teorema 9.2.

NOTA. Si x_0 es un punto de acumulación de S, este teorema nos permite intercambiar los límites y las sumas infinitas, como sigue:

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

9.7 UNA CURVA QUE LLENA TODO EL ESPACIO

Podemos aplicar el teorema 9.7 para construir una *curva que llene todo el espacio.* Es decir, una curva de $\mathbf{R}^2$ que pase por cada uno de los puntos del cuadrado unidad $[0,1] \times [0,1]$. Peano (1890) fue el primero en dar un ejemplo de una curva de este tipo. El ejemplo que damos aquí se debe a I. J. Schoenberg (*Bulletin of the American Mathematical Society,* 1938) y es el siguiente:

Sea ϕ una función definida en el intervalo [0,2] por medio de las fórmulas siguientes:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \text{ o si } \frac{5}{3} \leq t \leq 2, \\ 3t - 1, & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ 1, & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq \frac{4}{3}, \\ -3t + 5, & \text{si } \frac{4}{3} \leq t \leq \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Extendemos la definición de ϕ a todo $\mathbf{R}$ por medio de la ecuación

$$\phi(t + 2) = \phi(t).$$

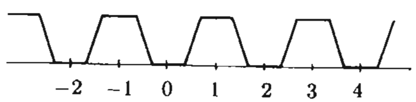


Figura 9.5

De esta manera la función ϕ es periódica de período 2. (La gráfica de ϕ puede verse en la figura 9.5.)

Ahora definimos dos funciones f_1 y f_2 por medio de las siguientes ecuaciones:

$$f_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-2}t)}{2^n}, \qquad f_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-1}t)}{2^n}.$$

Ambas series convergen absolutamente para cada real t y su convergencia es *uniforme* en $\mathbf{R}$. En efecto, dado que $|\phi(t)| \leq 1$ para todo t, podemos aplicar el criterio M de Weierstrass haciendo $M_n = 2^{-n}$. Como ϕ es continua en $\mathbf{R}$, el teorema 9.7 nos dice que f_1 y f_2 son también continuas en $\mathbf{R}$. Sea $f = (f_1, f_2)$ y sea Γ la imagen del intervalo unidad [0,1] por medio de f. Probaremos que Γ «llena» el cuadrado unidad, es decir que $\Gamma = [0,1] \times [0,1]$.

Es evidente, ante todo, que $0 \leq f_1(t) \leq 1$ y $0 \leq f_2(t) \leq 1$ para cada t, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$. Luego, Γ es un subconjunto del cuadrado unidad. A continuación, debemos probar que $(a, b) \in \Gamma$ siempre que $(a, b) \in [0,1] \times [0,1]$. A este fin expresamos a y b en el sistema binario. Esto es, escribimos

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \qquad b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n},$$

en donde cada a_n y cada b_n es 0 ó 1. (Ver el ejercicio 1.22.) Sea ahora

$$c = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, \qquad \text{donde } c_{2n-1} = a_n \quad \text{y} \quad c_{2n} = b_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Es claro que $0 \leq c \leq 1$ ya que $2\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = 1$. Demostraremos que $f_1(c) = a$ y $f_2(c) = b$.

Si podemos probar que

$$\phi(3^k c) = c_{k+1}, \qquad \text{para cada } k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

entonces tendremos $\phi(3^{2n-2}c) = c_{2n-1} = a_n$ y $\phi(3^{2n-1}c) = c_{2n} = b_n$, y esto nos dará $f_1(c) = a, f_2(c) = b$. Para probar (5), escribimos

$$3^k c = 2\sum_{n=1}^{k} \frac{c_n}{3^{n-k}} + 2\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^{n-k}} = (\text{un entero par}) + d_k,$$

en donde $d_k = 2\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k}/3^n$. Puesto que ϕ tiene período 2, se deduce que

$$\phi(3^k c) = \phi(d_k).$$

Si $c_{k+1} = 0$, entonces tenemos que $0 \le d_k \le 2\sum_{n=2}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{3}$, y por tanto $\phi(d_k) = 0$. Por consiguiente, $\phi(3^k c) = c_{k+1}$ en este caso. El único caso que queda por considerar es $c_{k+1} = 1$. Pero entonces obtenemos $\frac{2}{3} \le d_k \le 1$ y por ello $\phi(d_k) = 1$. Por consiguiente, $\phi(3^k c) = c_{k+1}$ en todos los casos y ello prueba que $f_1(c) = a, f_2(c) = b$. Luego, Γ llena el cuadrado unidad.

9.8 CONVERGENCIA UNIFORME E INTEGRACIÓN DE RIEMANN-STIELTJES

Teorema 9.8. *Sea α de variación acotada en $[a, b]$. Supongamos que cada término de la sucesión $\{f_n\}$ es una función real tal que $f_n \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$ y definamos $g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, d\alpha(t)$ si $x \in [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$ Entonces tenemos:*

a) *$f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$.*

b) *$g_n \to g$ uniformemente en $[a, b]$ en donde $g(x) = \int_a^x f(t)\, d\alpha(t)$.*

NOTA. La conclusión implica que, para cada x de $[a, b]$, podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\, d\alpha(t) = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, d\alpha(t).$$

Esta propiedad se enuncia a menudo diciendo que una sucesión uniformemente convergente se puede integrar término a término.

Demostración. Podemos suponer que α es creciente con $\alpha(a) < \alpha(b)$. Para probar (*a*), demostraremos que f satisface una condición de Riemann respecto de α en $[a, b]$. (Ver teorema 7.19.)

Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N tal que

$$|f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3[\alpha(b) - \alpha(a)]}, \quad \text{para todo } x \text{ de } [a, b]$$

Entonces, para cada partición P de $[a, b]$, se tiene

$$|U(P, f - f_N, \alpha)| \le \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad |L(P, f - f_N, \alpha)| \le \frac{\varepsilon}{3},$$

(utilizando la notación de la definición 7.14). Para este N, elegimos P_ε tal que si P es más fina que P_ε se verifique $U(P, f_N, \alpha) - L(P, f_N, \alpha) < \varepsilon/3$. Entonces para esa P se tiene

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &\le U(P, f - f_N, \alpha) - L(P, f - f_N, \alpha) \\ &\quad + U(P, f_N, \alpha) - L(P, f_N, \alpha) \\ &< |U(P, f - f_N, \alpha)| + |L(P, f - f_N, \alpha)| + \frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba la parte (a). Para probar (b), sea $\varepsilon > 0$ fijo y elijamos N tal que

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]},$$

para todo $n > N$ y todo t de $[a, b]$. Si $x \in [a, b]$, tenemos

$$|g_n(x) - g(x)| \le \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, d\alpha(t) \le \frac{\alpha(x) - \alpha(a)}{\alpha(b) - \alpha(a)} \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $g_n \to g$ uniformemente en $[a, b]$.

Teorema 9.9. *Sea α de variación acotada en $[a, b]$ y supongamos que $\sum f_n(x) = f(x)$ (uniformemente en $[a, b]$), en donde cada f_n es una función real tal que $f_n \in R(\alpha)$ en $[a, b]$. Entonces tenemos:*

a) *$f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$.*
b) *$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, d\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\, d\alpha(t)$ (uniformemente en $[a, b]$).*

Demostración. Basta aplicar el teorema 9.8 a la sucesión de las sumas parciales.

NOTA. Este teorema se enuncia diciendo que una serie uniformemente convergente puede ser integrada término a término.

9.9 SUCESIONES CONVERGENTES CON CONVERGENCIA NO UNIFORME QUE PUEDEN SER INTEGRADAS TÉRMINO A TÉRMINO

La convergencia uniforme es una condición suficiente pero no necesaria para la integración término a término, según puede verse en el ejemplo que sigue.

Ejemplo. Sea $f_n(x) = x^n$ si $0 \le x \le 1$. (Ver fig. 9.6.) La función límite f tiene valor 0 en $[0, 1)$ y $f(1) = 1$. Dado que esta sucesión está formada por funciones continuas y la función límite no lo es, la convergencia no es uniforme en $[0, 1]$. A pesar de ello, la integración término a término en $[0, 1]$ nos lleva, en este caso, a un resul-

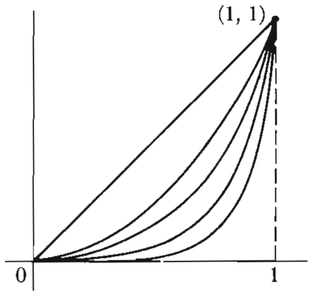


Figura 9.6

tado correcto. En efecto, tenemos

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \to \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

luego $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

La sucesión del anterior ejemplo, a pesar de no ser uniformemente convergente en [0, 1], es uniformemente convergente en todo subintervalo de [0, 1] que no contenga al 1. El teorema que damos a continuación es un resultado general que permite la integración término a término en ejemplos de este tipo. La hipótesis que se añade es que $\{f_n\}$ sea una sucesión uniformemente acotada en $[a, b]$ y que la función límite f sea integrable.

Definición 9.10. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ es acotadamente convergente en T si $\{f_n\}$ es puntualmente convergente y uniformemente acotada en T.*

Teorema 9.11. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión acotadamente convergente en $[a, b]$. Supongamos que cada $f_n \in R$ en $[a, b]$, y que la función límite $f \in R$ en $[a, b]$. Supongamos también que existe una partición P de $[a, b]$, a saber*

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\},$$

tal que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente convergente hacia f en cada subintervalo $[c, d]$ que no contenga ninguno de los puntos x_k. Entonces tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \tag{6}$$

Demostración. Puesto que f está acotada y $\{f_n\}$ es uniformemente acotada, existe un número positivo M tal que $|f(x)| \le M$ y $|f_n(x)| \le M$ para todo x de $[a, b]$ y todo $n \ge 1$. Dado $\varepsilon > 0$ tal que $2\varepsilon < \|P\|$, sea $h = \varepsilon/(2m)$, en donde m es el número de subintervalos de P, y consideremos una nueva partición P' de $[a, b]$ dada por

$$P' = \{x_0, x_0 + h, x_1 - h, x_1 + h, \ldots, x_{m-1} - h, x_{m-1} + h, x_m - h, x_m\}.$$

Dado que $|f - f_n|$ es integrable en $[a, b]$ y acotada por $2M$, la suma de las integrales de $|f - f_n|$ tomadas sobre los intervalos

$$[x_0, x_0 + h],\quad [x_1 - h, x_1 + h],\quad \ldots,\quad [x_{m-1} - h, x_{m-1} + h],\quad [x_m - h, x_m],$$

es a lo sumo $2M(2mh) = 2M\varepsilon$. El subconjunto restante de $[a, b]$ (llamémosle S) es la reunión de un número finito de intervalos cerrados, en los que $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f. Por consiguiente, existe un entero N (que sólo depende de ε) tal que para cada x de S se verifica

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{siempre que } n \ge N.$$

Luego la suma de las integrales de $|f - f_n|$ sobre los intervalos de S es a lo sumo $\varepsilon(b - a)$, luego

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \le (2M + b - a)\varepsilon \quad \text{siempre que } n \ge N.$$

Esto demuestra que $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ cuando $n \to \infty$.

Existe un teorema más fuerte debido a Arzelà, que no hace ninguna referencia a la convergencia uniforme.

Teorema 9.12 (Arzelà). *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión acotadamente convergente en $[a, b]$ y supongamos que cada f_n es integrable de Riemann en $[a, b]$. Supongamos también que la función límite f es integrable de Riemann en $[a, b]$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

La demostración del teorema de Arzelà es mucho más difícil que la del teorema 9.11 y la omitiremos. En el próximo capítulo demostraremos un teorema acerca de las integrales de Lebesgue que incluye al teorema de Arzelà como caso particular (Ver teorema 10.29).

NOTA. Es fácil dar un ejemplo de una sucesión acotadamente convergente $\{f_n\}$ de funciones integrables de Riemann cuyo límite f no sea integrable de Riemann. Si $\{r_1, r_2, \ldots\}$ designa el conjunto de los números racionales de $[0,1]$, definimos $f_n(x)$ como la función que toma el valor 1 si $x = r_k$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, y el valor 0 en cualquier otro caso. Entonces la integral $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ para cada n, y en cambio la función límite puntual f no es integrable de Riemann en $[0, 1]$.

9.10 CONVERGENCIA UNIFORME Y DIFERENCIACIÓN

Por analogía con los teoremas 9.2 y 9.8, se puede esperar que se verifique el siguiente resultado: Si $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$ y si f_n' existe para cada n, entonces f' existe y $f_n' \to f'$ uniformemente en $[a, b]$. Sin embargo, el ejemplo 3 de la sección 9.2 prueba que no es así. A pesar de que la sucesión $\{f_n\}$ del ejemplo 3 converge uniformemente en $\mathbf{R}$, la sucesión $\{f_n'\}$ no converge puntualmente en $\mathbf{R}$. Por ejemplo, $\{f_n'(0)\}$ diverge ya que $f_n'(0) = \sqrt{n}$. Por consiguiente el teorema análogo a los teoremas 9.2 y 9.8 relativo a la diferenciación debe tomar una forma distinta.

Teorema 9.13. *Supongamos que cada término de $\{f_n\}$ es una función real con derivada finita en cada punto de un intervalo abierto (a, b). Supongamos que para un punto x_0, por lo menos, de (a, b) la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ converge. Supongamos además que existe una función g tal que $f_n' \to g$ uniformemente en (a, b). Entonces:*

a) *Existe una función f tal que $f_n \to f$ uniformemente en (a, b).*
b) *Para cada x de (a, b) la derivada $f'(x)$ existe y es igual a $g(x)$.*

Demostración. Supongamos que $c \in (a, b)$ y definamos una nueva sucesión $\{g_n\}$ como sigue:

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} & \text{si } x \neq c, \\ f_n'(c) & \text{si } x = c. \end{cases} \tag{8}$$

La sucesión $\{g_n\}$ así formada depende de la elección de c. La convergencia de $\{g_n(c)\}$ se sigue de las hipótesis, ya que $g_n(c) = f_n'(c)$. Ahora veremos que $\{g_n\}$ converge uniformemente en (a, b). Si $x \neq c$, tenemos

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{h(x) - h(c)}{x - c}, \tag{9}$$

en donde $h(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Existe $h'(x)$ para cada x de (a, b) y vale $f_n'(x) - f_m'(x)$. Si aplicamos el teorema del valor medio en (9), obtenemos

$$g_n(x) - g_m(x) = f_n'(x_1) - f_m'(x_1), \tag{10}$$

con x_1 comprendido entre x y c. Puesto que $\{f_n'\}$ converge uniformemente en (a, b) (por hipótesis), podemos utilizar (10), junto con la condición de Cauchy (teorema 9.3), para deducir que $\{g_n\}$ converge uniformemente en (a, b).

Ahora podemos demostrar que $\{f_n\}$ es uniformemente convergente en (a, b). Formemos la sucesión particular $\{g_n\}$ correspondiente al punto particular $c = x_0$ para el que $\{f_n(x_0)\}$ se ha supuesto convergente. En virtud de (8) podemos escribir

$$f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)g_n(x),$$

ecuación que se verifica para todo x de (a, b). Entonces tenemos

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)[g_n(x) - g_m(x_0)].$$

Esta ecuación, con la ayuda de la condición de Cauchy, establece la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en (a, b). Esto termina la demostración de (a).

Para demostrar (b), volvamos a la sucesión $\{g_n\}$ definida por (8) para un punto *arbitrario* c de (a, b) y sea $G(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. La hipótesis de que f_n' existe significa que $\lim_{x\to c} g_n(x) = g_n(c)$. En otras palabras, cada g_n es continua en c. Como que $g_n \to G$ uniformemente en (a, b), la función límite G es asimismo continua en c. Esto significa que

$$G(c) = \lim_{x\to c} G(x), \tag{11}$$

y la existencia de este límite forma parte de la conclusión. Pero, para $x \neq c$, tenemos

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Entonces, (11) establece que la derivada $f'(c)$ existe y es igual a $G(c)$. Pero

$$G(c) = \lim_{n\to\infty} g_n(c) = \lim_{n\to\infty} f_n'(c) = g(c);$$

por lo tanto $f'(c) = g(c)$. Ya que c es un punto arbitrario de (a, b), la parte (b) queda demostrada.

Si formulamos de nuevo el teorema 9.13 pero en términos de series, obtenemos

Teorema 9.14. *Supongamos que cada f_n es una función real definida en (a, b) tal que la derivada $f_n'(x)$ existe para cada x de (a, b). Supongamos que, para un punto x_0 de (a, b), por lo menos, la serie $\sum f_n(x_0)$ converge. Supongamos además que existe una función g tal que $\sum f_n'(x) = g(x)$ (uniformemente en (a, b)). Entonces:*

a) *Existe una función f tal que $\sum f_n(x) = f(x)$ (uniformemente en (a, b)).*

b) *Si $x \in (a, b)$, la derivada $f'(x)$ existe y es igual a $\sum f_n'(x)$.*

9.11 CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA CONVERGENCIA UNIFORME DE SERIES

La importancia de las series uniformemente convergentes ha quedado ampliamente ilustrada en alguno de los teoremas precedentes. Parece pues natural buscar algunos métodos sencillos para decidir la convergencia uniforme de las series sin tener que recurrir a la definición en cada caso. Uno de tales criterios, el *criterio M de Weierstrass*, ha sido desarrollado en el teorema 9.6. Existen otros que pueden resultar útiles cuando el criterio M no es aplicable. Uno de ellos es análogo al teorema 8.28.

Teorema 9.15 (Criterio de Dirichlet para la convergencia uniforme). *Designemos por medio de $F_n(x)$ la n-ésima suma parcial de la serie $\sum f_n(x)$, en donde cada f_n es una función compleja definida en un cierto conjunto S. Supongamos que $\{F_n\}$ es uniformemente acotada en S. Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones reales tales que $g_{n+1}(x) \le g_n(x)$ para cada x de S y para cada $n = 1, 2, \ldots$, y supongamos que $g_n \to 0$ uniformemente en S. Entonces la serie $\sum f_n(x)g_n(x)$ converge uniformemente en S.*

Demostración. Sea $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(x)$. Por sumación parcial tenemos

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x)F_n(x),$$

y entonces si $n > m$, podemos escribir

$$s_n(x) - s_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x)F_n(x) - g_{m+1}(x)F_m(x)$$

Por consiguiente, si M es una cota uniforme de $\{F_n\}$, tenemos

$$\begin{aligned}|s_n(x) - s_m(x)| &\le M \sum_{k=m+1}^{n} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) + Mg_{n+1}(x) + Mg_{m+1}(x)\\ &= M(g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x)) + Mg_{n+1}(x) + Mg_{m+1}(x)\\ &= 2Mg_{m+1}(x).\end{aligned}$$

Dado que $g_n \to 0$ uniformemente en S, esta desigualdad (junto con la condición de Cauchy) implica que $\sum f_n(x)g_n(x)$ converge uniformemente en S.

El lector no encontrará ninguna dificultad en extender el teorema 8.29 (criterio de Abel) de modo análogo, resultando un criterio para la convergencia uniforme. (Ver ejercicio 9.13.)

Ejemplo. Sea $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$. En el capítulo anterior (ver el teorema 8.30), hemos obtenido la desigualdad $|F_n(x)| \le 1/|\text{sen}\,(x/2)|$, válida para todo número real $x \ne 2m\pi$ (m es un entero). Por consiguiente, si $0 < \delta < \pi$, tenemos la aproximación

$$|F_n(x)| \le 1/\text{sen}(\delta/2) \quad \text{si} \quad \delta \le x \le 2\pi - \delta.$$

Luego, $\{F_n\}$ es uniformemente acotada en el intervalo $[\delta, 2\pi - \delta]$. Si $\{g_n\}$ satisface la condición del teorema 9.15, podemos concluir que la serie $\sum g_n(x)e^{inx}$ converge uniformemente en $[\delta, 2\pi - \delta]$. En particular, si hacemos $g_n(x) = 1/n$, obtenemos la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$$

en $[\delta, 2\pi - \delta]$ si $0 < \delta < \pi$. Obsérvese que el criterio M de Weierstrass no sirve para establecer la convergencia uniforme en este caso, ya que $|e^{inx}| = 1$.

9.12 CONVERGENCIA UNIFORME Y SUCESIONES DOBLES

Otro tipo distinto de aplicaciones de la convergencia uniforme lo proporciona el teorema siguiente que trata de sucesiones dobles y puede considerarse como un recíproco del teorema 8.39.

Teorema 9.16. *Sea f una sucesión doble y sea $\mathbf{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos. Para cada $n = 1, 2, \ldots$, definimos una función g_n en $\mathbf{Z}^+$ por medio de:*

$$g_n(m) = f(m, n),$$

si $m \in \mathbf{Z}^+$.

Supongamos que $g_n \to g$ uniformemente en $\mathbf{Z}^+$, en donde $g(m) = \lim_{n\to\infty} f(m, n)$ Si el límite reiterado $\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} f(m, n))$ existe, entonces el límite doble $\lim_{m,n\to\infty} f(m, n)$ también existe y tiene el mismo valor.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos N_1 tal que $n > N_1$ implique

$$|f(m, n) - g(m)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para cada } m \text{ de } \mathbf{Z}^+$$

Sea $a = \lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} f(m, n)) = \lim_{m\to\infty} g(m)$. Para el mismo ε, elegimos un N_2 tal que $m > N_2$ implique $|g(m) - a| < \varepsilon/2$. Entonces, si N es el mayor de los números N_1 y N_2, tenemos $|f(m, n) - a| < \varepsilon$ siempre que $m > N$ y $n > N$. En otras palabras, $\lim_{m,n\to\infty} f(m, n) = a$.

9.13 CONVERGENCIA EN MEDIA

Las funciones que se manejan en este apartado son o bien reales o bien complejas.

Definición 9.17. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables Riemann definidas en $[a, b]$. Supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$. La sucesión $\{f_n\}$ converge en media hacia f en $[a, b]$, y se escribe*

$$\operatorname*{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{en } [a, b],$$

si

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = 0.$$

Si la desigualdad $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ se verifica para cada x de $[a, b]$, entonces tenemos $\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 \, dx \le \varepsilon^2(b - a)$. Por consiguiente, la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ hacia f en $[a, b]$ implica la convergencia en media en el supuesto de que cada f_n sea integrable de Riemann en $[a, b]$. Un resultado que no deja de ser sorprendente es que la convergencia en media no implica necesariamente la convergencia puntual en ningún punto del intervalo. Esto puede verse con el siguiente ejemplo: Para cada entero $n \ge 0$, subdividimos el intervalo $[0, 1]$ en 2^n subintervalos iguales y designamos por medio de I_{2^n+k} el subintervalo cuyo extremo derecho es el punto $(k + 1)/2^n$, en donde $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Esto origina una colección $\{I_1, I_2, \ldots\}$ de subintervalos de $[0, 1]$, cuyos primeros términos son:

$$I_1 = [0, 1], \qquad I_2 = [0, \tfrac{1}{2}], \qquad I_3 = [\tfrac{1}{2}, 1],$$
$$I_4 = [0, \tfrac{1}{4}], \qquad I_5 = [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}], \qquad I_6 = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}],$$

y así sucesivamente. Definimos f_n en $[0, 1]$ como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I_n, \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] - I_n. \end{cases}$$

Entonces $\{f_n\}$ converge en media hacia 0, ya que $\int_0^1 |f_n(x)|^2 \, dx$ es la longitud de I_n, y estas longitudes tienden a cero cuando $n \to \infty$. Por otro lado, para cada x de $[0, 1]$ tenemos

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

[¿Por qué?] Luego $\{f_n(x)\}$ no converge para ningún punto x de $[0, 1]$.

El teorema que damos a continuación pone de manifiesto la importancia de la convergencia en media.

Teorema 9.18. *Supongamos que* $\operatorname{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n = f$ en $[a, b]$. *Si* $g \in R$ en $[a, b]$, definimos

$$h(x) = \int_a^x f(t)g(t)\, dt, \qquad h_n(x) = \int_a^x f_n(t)g(t)\, dt,$$

si $x \in [a, b]$. Entonces $h_n \to h$ uniformemente en $[a, b]$.

Demostración. La demostración se basa en la desigualdad

$$\begin{aligned} 0 &\le \left(\int_a^x |f(t) - f_n(t)|\, |g(t)|\, dt\right)^2 \\ &\le \left(\int_a^x |f(t) - f_n(t)|^2\, dt\right)\left(\int_a^x |g(t)|^2\, dt\right), \end{aligned} \tag{12}$$

que es una aplicación directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales. (Ver el ejercicio 7.16 que establece la desigualdad de Cauchy-Schwarz y ofrece un esbozo de su demostración.) Dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir N tal que $n > N$ implique

$$\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2\, dt < \frac{\varepsilon^2}{A}, \tag{13}$$

en donde $A = 1 + \int_a^b |g(t)|^2\, dt$. Sustituyendo (13) en (12), obtenemos que $n > N$ implica $0 \le |h(x) - h_n(x)| < \varepsilon$ para cada x de $[a, b]$.

Este teorema es particularmente útil en la teoría de las series de Fourier. (Ver teorema 11.16.) También merece interés la siguiente generalización.

Teorema 9.19. *Supongamos que* $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n = f$ *y* $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} g_n = g$ *en* $[a, b]$. *Definimos*

$$h(x) = \int_a^x f(t)g(t)\,dt, \qquad h_n(x) = \int_a^x f_n(t)g_n(t)\,dt,$$

si $x \in [a, b]$. *Entonces* $h_n \to h$ *uniformemente en* $[a, b]$.

Demostración. Tenemos

$$h_n(x) - h(x) = \int_a^x (f - f_n)(g - g_n)\,dt$$
$$+ \left(\int_a^x f_n g\,dt - \int_a^x fg\,dt\right) + \left(\int_a^x fg_n\,dt - \int_a^x fg\,dt\right).$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, podemos escribir

$$0 \le \left(\int_a^x |f - f_n|\,|g - g_n|\,dt\right)^2 \le \left(\int_a^b |f - f_n|^2\,dt\right)\left(\int_a^b |g - g_n|^2\,dt\right).$$

La demostración es ahora una consecuencia inmediata del teorema 9.18.

9.14 SERIES DE POTENCIAS

Una serie infinita de la forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

o más brevemente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{14}$$

se llama una serie de potencias en $z - z_0$. En ella z, z_0 y a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ son números complejos. A toda serie de potencias (14) se asocia un círculo, llamado el *círculo de convergencia,* tal que la serie es absolutamente convergente en todo z del interior de este círculo y divergente en todo z de su exterior. El centro del círculo es z_0 y su radio se llama el *radio de convergencia* de la serie de potencias. (El radio puede tomar los valores 0 o $+\infty$ en los casos extremos.) El próximo teorema establece la existencia del círculo de convergencia y nos proporciona un método para calcular su radio.

Teorema 9.20. *Dada una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, *sea*

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad r = \frac{1}{\lambda},$$

(en donde $r = 0$ *si* $\lambda = +\infty$ *y* $r = +\infty$ *si* $\lambda = 0$*). Entonces la serie converge absolutamente si* $|z - z_0| < r$ *y diverge si* $|z - z_0| > r$. *Además la serie converge uniformemente en todo subconjunto compacto interior al círculo de convergencia.*

Demostración. Aplicando el criterio de la raíz (teorema 8.26), tenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \frac{|z - z_0|}{r},$$

y entonces $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente si $|z - z_0| < r$ y diverge si $|z - z_0| > r$.

Para probar la segunda parte del teorema, basta observar que si T es un subconjunto compacto del círculo de convergencia, existe un punto p de T tal que $z \in T$ implica

$$|z - z_0| \le |p - z_0| < r.$$

Luego $|a_n(z - z_0)^n| \le |a_n(p - z_0)^n|$ para cada z de T y entonces es aplicable el criterio M de Weierstrass.

NOTA. Si el límite $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ existe (o si es $+\infty$), su valor es igual al radio de convergencia de (14). (Ver el ejercicio 9.30.)

Ejemplo 1. Las dos series $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ tienen el mismo radio de convergencia, $r = 1$. En la frontera del círculo de convergencia, la primera no converge en ningún punto, y la segunda converge en todos.

Ejemplo 2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ tiene radio de convergencia $r = 1$, pero no converge en $z = 1$. Sin embargo, converge en todos los demás puntos de la frontera en virtud del criterio de Dirichlet (teorema 8.28).

Estos ejemplos ponen de manifiesto porqué el teorema 9.20 no dice nada acerca del comportamiento de una serie de potencias en la *frontera* del círculo de convergencia.

Teorema 9.21 *Supongamos que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge para cada z de $B(z_0; r)$. Entonces la función f definida por la ecuación*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \text{si } z \in B(z_0; r), \tag{15}$$

es continua en $B(z_0; r)$.

Demostración. Puesto que cada punto de $B(z_0; r)$ pertenece a algún subconjunto compacto de $B(z_0; r)$, la conclusión se deduce inmediatamente del teorema 9.7.

NOTA. Diremos que la serie (15) *representa* f en $B(z_0; r)$. Se llama también *desarrollo de f en serie de potencias* en torno de z_0. Las funciones que admiten un desarrollo en serie de potencias son continuas en el interior del círculo de convergencia. Sin embargo, se verifican mucho más que esto. Probaremos más adelante que tales funciones admiten derivadas de cualquier orden en el interior del círculo de convergencia. Para demostrarlo deberemos utilizar el siguiente teorema:

Teorema 9.22. *Supongamos que $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge si $z \in B(z_0; r)$. Supongamos que la ecuación*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

es válida para cada z de un cierto subconjunto abierto S de $B(z_0; r)$. Entonces, para cada punto z_1 de S, existe un entorno $B(z_1; R) \subseteq S$ en el que f tiene un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_1)^k, \tag{16}$$

en donde

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n(z_1 - z_0)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Demostración. Si $z \in S$, tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_1 + z_1 - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_1)^k(z_1 - z_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n(k),$$

en donde

$$c_n(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} a_n(z - z_1)^k(z_1 - z_0)^{n-k}, & \text{si } k \le n, \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Ahora elegimos R tal que $B(z_1; R) \subseteq S$ y suponemos que $z \in B(z_1; R)$. Entonces la serie reiterada $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n(k)$ converge absolutamente, ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_n(k)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|z - z_1| + |z_1 - z_0|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(z_2 - z_0)^n, \tag{18}$$

en donde

$$z_2 = z_0 + |z - z_1| + |z_1 - z_0|.$$

Pero

$$|z_2 - z_0| < R + |z_1 - z_0| \le r,$$

y por lo tanto la serie (18) converge. Entonces, por el teorema 8.43, podemos intercambiar el orden de sumación para obtener

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n(z - z_1)^k(z_1 - z_0)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_1)^k,$$

en donde b_k está dado por (17). Esto termina la demostración.

NOTA. En la demostración hemos visto que es posible utilizar cualquier $R > 0$ con tal de que se verifique la condición

$$B(z_1; R) \subseteq S. \tag{19}$$

Teorema 9.23. *Supongamos que $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge para cada z de $B(z_0; r)$. Entonces la función f definida por medio de la ecuación*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \text{si } z \in B(z_0; r), \tag{20}$$

tiene una derivada $f'(z)$ para cada z de $B(z_0; r)$ dada por

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}. \tag{21}$$

NOTA. Las series dadas en (20) y en (21) tienen el mismo radio de convergencia.

Demostración. Supongamos que $z_1 \in B(z_0; r)$ y desarrollemos f en serie de potencias en torno de z_1, tal como se indicó en (16). Entonces, si $z \in B(z_1; R)$, $z \neq z_1$, tenemos

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1}(z - z_1)^k. \tag{22}$$

Por continuidad, el segundo miembro de (22) tiende hacia b_1 cuando $z \to z_1$. Luego, $f'(z_1)$ existe y es igual a b_1. Utilizando (17) para calcular b_1, obtenemos

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_1 - z_0)^{n-1}.$$

Puesto que z_1 es un punto arbitrario de $B(z_0; r)$, (21) queda demostrado. Las dos series tienen el mismo radio de convergencia puesto que $\sqrt[n]{n} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

NOTA. Aplicando reiteradamente (21) obtenemos que para cada $k = 1, 2, \ldots$, la derivada $f^{(k)}(z)$ existe en $B(z_0; r)$ y viene dada por la serie

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}. \tag{23}$$

Si en (23) hacemos $z = z_0$, obtenemos una fórmula realmente importante

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Esta ecuación nos dice que si dos series de potencias $\sum a_n(z - z_0)^n$ y $\sum b_n(z - z_0)^n$ representan ambas la misma función en un entorno $B(z_0; r)$, entonces $a_n = b_n$ para cada n. Esto es, el desarrollo en serie de potencias de una función f en torno de un punto dado z_0 (si existe), es único y viene dado por la fórmula

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

válida para todo z del círculo de convergencia.

9.15 MULTIPLICACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

Teorema 9.24. *Dados dos desarrollos en serie de potencias en torno del origen, por ejemplo*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad si\ z \in B(0; r)$$

y

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \qquad si\ z \in B(0; r)$$

El producto $f(z)g(z)$ viene dado por la serie de potencias

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad si\ z \in B(0; r) \cap B(0; R),$$

en donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Demostración. El producto de Cauchy de las dos series dadas es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

y entonces la conclusión se sigue del teorema 8.46 (teorema de Mertens).

NOTA. Si las dos series son idénticas, resulta

$$f(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

en donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{m_1+m_2=n} a_{m_1} a_{m_2}$. El símbolo $\sum_{m_1+m_2=n}$ indica que la suma está extendida a todos los números enteros no negativos m_1 y m_2 cuya suma es n. Análogamente, para todo entero $p > 0$, tenemos

$$f(z)^p = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p) z^n,$$

en donde

$$c_n(p) = \sum_{m_1 + \cdots + m_p = n} a_{m_1} \cdots a_{m_p}.$$

9.16 EL TEOREMA DE SUSTITUCIÓN

Teorema 9.25. *Dados dos desarrollos en serie de potencias en torno del origen, por ejemplo,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad si\ z \in B(0;\ r)$$

y

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \qquad si\ z \in B(0;\ r)$$

si, para un z fijo de $B(0;\ R)$, *tenemos* $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| < r$, *entonces para este z podemos escribir*

$$f[g(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

en donde los coeficientes c_k *han sido obtenidos como sigue: Definimos los números* $b_k(n)$ *por medio de la ecuación*

$$g(z)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(n) z^k.$$

Entonces $c_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k(n)$ *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$

NOTA. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ es la serie de potencias que se obtiene *formalmente* al sustituir z por la serie $g(z)$ en el desarrollo de f y al reordenar los términos en potencias crecientes de z.

Demostración. Por hipótesis, podemos elegir z de tal manera que $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| < r$. Para este z tenemos que $|g(z)| < r$ y entonces podemos escribir

$$f[g(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_k(n) z^k.$$

Si podemos invertir el orden de sumación, obtenemos

$$f[g(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k(n)\right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

que es precisamente lo que queremos demostrar. A fin de justificar el cambio en el orden de sumación, estableceremos la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_n b_k(n) z^k| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k(n) z^k|. \tag{25}$$

Ahora bien, cada uno de los números $b_k(n)$ es una suma finita de la forma

$$b_k(n) = \sum_{m_1 + \cdots + m_n = k} b_{m_1} \cdots b_{m_n},$$

y entonces $|b_k(n)| \le \sum_{m_1 + \cdots + m_n = k} |b_{m_1}| \cdots |b_{m_n}|$. Por otro lado tenemos

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| z^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(n) z^k,$$

en donde $B_k(n) = \sum_{m_1 + \cdots + m_n = k} |b_{m_1}| \cdots |b_{m_n}|$. Volviendo a (25), tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k(n) z^k| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} B_k(n) |z^k| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k z^k|\right)^n,$$

y esto establece la convergencia de (25).

9.17 RECÍPROCA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Como aplicación del teorema de sustitución, probaremos que el recíproco de una serie de potencias en z es asimismo una serie de potencias en z, en el supuesto de que el término constante no sea 0.

Teorema 9.26. *Supongamos que*

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \qquad si\ z \in B(0;\ h),$$

con $p(0) \neq 0$. *Entonces existe un entorno* $B(0;\ \delta)$ *en el que el recíproco de p posee un desarrollo en serie de potencias de la forma*

$$\frac{1}{p(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n.$$

Además, $q_0 = 1/p_0$.

Demostración. Sin perder generalidad podemos suponer que $p_0 = 1$. [¿Por qué?] Entonces $p(0) = 1$. Sea $P(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |p_n z^n|$ si $z \in B(0; h)$. Por continuidad, existe un entorno $B(0, \delta)$ tal que $|P(z) - 1| < 1$ si $z \in B(0; \delta)$. La conclusión se obtiene aplicando el teorema 9.25 a

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{y} \quad g(z) = 1 - p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n.$$

9.18 SERIES REALES DE POTENCIAS

Si x, x_0, y a_n son números reales, la serie $\sum a_n(x - x_0)^n$ se llama *serie real de potencias.* Su círculo de convergencia determina en el eje real un intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, llamado *intervalo de convergencia.*

Cada serie real de potencias define una función real suma, cuyo valor en x, para cada x del intervalo de convergencia, viene dado por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Se dice que la serie *representa* f en el intervalo de convergencia, y se denomina el *desarrollo de* f *en serie de potencias* en torno de x_0.

Dos problemas nos interesan ahora:

1) Dada la serie, hallar las propiedades de la función suma f.

2) Dada una función f, establecer si es posible o no desarrollarla en serie de potencias.

Resulta que sólo cierto tipo especial de funciones admite un desarrollo en serie de potencias. A pesar de esto, la clase de tales funciones incluye gran número de las funciones que intervienen en la práctica; de ahí que su estudio sea de gran importancia.

La cuestión (1) se contesta por medio de los teoremas que ya hemos demostrado para series complejas de potencias. Una serie de potencias converge absolutamente en cada x del subintervalo abierto de convergencia $(x_0 - r, x_0 + r)$, y converge uniformemente en cada subconjunto compacto de este intervalo. Dado que cada término de la serie de potencias es continuo en **R**, la función suma f es continua en cada subconjunto compacto del intervalo de convergencia y por lo tanto f es continua en $(x_0 - r, x_0 + r)$.

A causa de la convergencia uniforme, el teorema 9.9 nos dice que podemos integrar una serie de potencias término a término en cada subintervalo cerrado contenido en el intervalo de convergencia. Entonces, para cada x de $(x_0 - r, x_0 + r)$ tenemos

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

La serie obtenida por medio de la integración tiene el mismo radio de convergencia.

La función suma posee derivada de orden cualquiera en el intervalo de convergencia y ésta se obtiene derivando la serie término a término. Además $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$ y por lo tanto la función suma está representada por la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \tag{26}$$

Volvamos ahora a la cuestión (2). Supongamos que nos han dado una función real f definida en un cierto intervalo abierto $(x_0 - r, x_0 + r)$, y supongamos que f posee derivada de cualquier orden en este intervalo. Entonces podemos *formar* ciertamente la serie de potencias que aparece en el miembro de la derecha en (26). La serie así obtenida, ¿es convergente en algún punto x además de $x = x_0$? Si lo es, ¿su suma es igual a $f(x)$? En general, la respuesta a ambas preguntas es «No». (Ver en el ejercicio 9.33 un contraejemplo.) Una condición necesaria y suficiente para que la respuesta a ambas preguntas sea afirmativa se da en la sección que sigue con ayuda de la fórmula de Taylor (teorema 5.19).

9.19 SERIE DE TAYLOR GENERADA POR UNA FUNCIÓN

Definición 9.27. *Sea f una función real definida en un intervalo I de* **R**. *Si f tiene derivada de cualquier orden en cada punto de I, escribiremos* $f \in C^{\infty}$ *en I.*

Si $f \in C^{\infty}$ en un entorno del punto c, la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n,$$

se llama la *serie de Taylor generada por f en torno de c.* Para indicar que f genera esta serie, escribimos

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n.$$

La cuestión que nos interesa es la siguiente: ¿Cuándo es posible reemplazar el símbolo $\sim$ por el símbolo $=$? La fórmula de Taylor establece que si $f \in C^\infty$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $c \in [a, b]$, entonces, para cada x de $[a, b]$ y para cada n, tenemos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n, \tag{27}$$

en donde x_1 es un cierto punto comprendido entre x y c. El punto x_1 depende de x, de c, y de n. Luego una condición necesaria y suficiente para que la serie de Taylor converja hacia $f(x)$ es que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n = 0. \tag{28}$$

En la práctica puede resultar bastante difícil manejar este límite dado que la posición de x_1 es desconocida. En algunos casos, sin embargo, es posible hallar una cota superior de $f^{(n)}(x_1)$ conveniente y puede demostrarse que el límite es cero. Puesto que $A^n/n! \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo A, la ecuación (28) se verificará si existe una constante positiva M tal que

$$|f^{(n)}(x)| \le M^n,$$

para todo x de $[a, b]$. En otras palabras, la serie de Taylor de una función f converge si la n-ésima derivada $f^{(n)}$ no sobrepasa la n-ésima potencia de algún número positivo. Esto se establece más formalmente en el siguiente teorema.

Teorema 9.28. *Supongamos que $f \in C^\infty$ en $[a, b]$ y sea $c \in [a, b]$. Supongamos que existe un entorno $B(c)$ y una constante M (que puede depender de c) tal que $|f^{(n)}(x)| \le M^n$ para cada x de $B(c) \cap [a, b]$ y cada $n = 1, 2, \ldots$ Entonces, para cada x de $B(c) \cap [a, b]$, tenemos*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

9.20 TEOREMA DE BERNSTEIN

En esta sección vamos a deducir otra condición suficiente para la convergencia de la serie de Taylor de f, formulada por S. Bernstein. Para simplificar la demostración obtendremos ante todo otra expresión de la fórmula de Taylor en la que el término complementario viene dado por una integral.

Teorema 9.29. *Supongamos que f tiene una derivada continua de orden $n+1$ en un intervalo abierto I que contenga a c, y definamos $E_n(x)$ para cada x de I por medio de la ecuación*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + E_n(x). \tag{29}$$

Entonces $E_n(x)$ está dada también por la integral

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{30}$$

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre n. Para $n = 1$ tenemos

$$E_1(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) = \int_c^x [f'(t) - f'(c)]\,dt = \int_c^x u(t)\,dv(t),$$

en donde $u(t) = f'(t) - f'(c)$ y $v(t) = t - x$. La integración por partes da

$$\int_c^x u(t)\,dv(t) = u(x)v(x) - u(c)v(c) - \int_c^x v(t)\,du(t) = \int_c^x (x-t)f''(t)\,dt.$$

Esto prueba (30) para $n = 1$. Ahora supongamos que (30) es verdadero para n y lo probaremos para $n+1$. De (29) tenemos

$$E_{n+1}(x) = E_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Pongamos $E_n(x)$ en forma de integral y observemos que $(x-c)^{n+1} = (n+1)\int_c^x (x-t)^n\,dt$. Se obtiene

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int_c^x (x-t)^n\,dt$$

$$= \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n [f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(c)]\,dt = \frac{1}{n!}\int_c^x u(t)\,dv(t),$$

en donde $u(t) = f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(c)$ y $v(t) = -(x-t)^{n+1}/(n+1)$. La integración por partes nos da

$$E_{n+1}(x) = -\frac{1}{n!}\int_c^x v(t)\,du(t) = \frac{1}{(n+1)!}\int_c^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt.$$

Esto prueba (30).

NOTA. El cambio de variables $t = x + (c-x)u$ transforma la integral de (30) en la forma

$$E_n(x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}[x + (c-x)u]\,du. \tag{31}$$

Teorema 9.30 (Bernstein). *Supongamos que f y todas sus derivadas sean no negativas en un intervalo compacto $[b, b+r]$. Entonces, si $b \leq x < b+r$, la serie de Taylor*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)(x-b)^k}{k!}$$

converge hacia $f(x)$.

Demostración. Para una translación podemos suponer $b = 0$. El resultado es trivial si $x = 0$ luego supondremos que $0 < x < r$. Utilizaremos la fórmula de Taylor con resto y escribiremos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + E_n(x). \tag{32}$$

Comprobaremos que el término complementario satisface las desigualdades

$$0 \leq E_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} f(r). \tag{33}$$

Esto implica que $E_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ ya que $(x/r)^{n+1} \to 0$ si $0 < x < r$
Para probar (33) se usa (31) con $c = 0$ y se obtiene

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu)\,du,$$

para cada x de $[0, r]$. Si $x \neq 0$, sea

$$F_n(x) = \frac{E_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu)\,du.$$

La función $f^{(n+1)}$ es monótona creciente en $[0, r]$ ya que su derivada es no negativa. Por consiguiente tenemos

$$f^{(n+1)}(x - xu) = f^{(n+1)}[x(1-u)] \leq f^{(n+1)}[r(1-u)],$$

si $0 \leq u \leq 1$, y esto implica $F_n(x) \leq F_n(r)$ si $0 < x \leq r$. En otras palabras,

$$E_n(x)/x^{n+1} \leq E_n(r)/r^{n+1},$$

o

$$E_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} E_n(r). \tag{34}$$

Haciendo $x = r$ en (32), vemos que $E_n(r) \leq f(r)$ ya que cada término de la suma es no negativo. Substituyendo en (34), se obtiene (33) que, a su vez, termina la demostración.

9.21 LA SERIE BINÓMICA

A modo de ejemplo, que ilustre el uso del teorema de Bernstein, obtendremos el siguiente desarrollo, conocido con el nombre de *serie binómica*:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad \text{si } -1 < x < 1, \tag{35}$$

donde a es un número real arbitrario y

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

El teorema de Bernstein no es directamente aplicable en este caso. Sin embargo, podemos argumentar como sigue: Sea $f(x) = (1-x)^{-c}$, en donde $c > 0$ y $x < 1$. Entonces

$$f^{(n)}(x) = c(c+1)\cdots(c+n-1)(1-x)^{-c-n},$$

y por lo tanto $f^{(n)}(x) \geq 0$ para cada n, con tal que $x < 1$. Aplicando el teorema de Bernstein con $b = -1$ y $r = 2$, hallamos que $f(x)$ tiene un desarrollo en serie de potencias en torno al punto $b = -1$, convergente para $-1 \leq x < 1$. Por lo tanto, en virtud del teorema 9.22, $f(x)$ tiene también desarrollo en serie de potencias en torno a 0, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) x^k/k!$, convergente para $-1 < x < 1$.

Pero $f^{(k)}(0) = \binom{-c}{k}(-1)^k k!$; luego

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-c}{k} (-1)^k x^k, \qquad \text{si } 0 \leq x < 1 \tag{36}$$

Sustituyendo en (36) c por $-a$ y x por $-x$, encontramos que (35) es válida también para cada $a < 0$. Y ahora, por integraciones sucesivas, la ecuación (35) se puede extender a todo a real.

Es evidente que si a es un entero positivo, por ejemplo $a = m$, entonces $\binom{m}{n} = 0$ para $n > m$ y (35) se reduce a una suma finita (teorema del binomio).

9.22. TEOREMA DEL LÍMITE DE ABEL

Si $-1 < x < 1$, la integración de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

nos da el desarrollo en serie

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \tag{37}$$

válido también para $-1 < x < 1$. Si hacemos $x = -1$ en el segundo miembro de (37), obtenemos una serie alternada convergente, $\sum(-1)^{n+1}/n$. ¿Podemos también hacer $x = -1$ en el primer miembro de (37)? El teorema que sigue responde a esta pregunta afirmativamente.

Teorema 9.31 (Teorema del límite de Abel). *Supongamos que tenemos*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{si } -r < x < r. \tag{38}$$

Si la serie converge también en $x = r$, entonces el $\lim_{x\to r-} f(x)$ existe y se tiene

$$\lim_{x\to r-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Demostración. Para simplificar, suponemos que $r = 1$ (esto equivale a un cambio de escala). Entonces tenemos que $f(x) = \sum a_n x^n$ para $-1 < x < 1$ y que $\sum a_n$ converge. Hagamos $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Probaremos que $\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$, o, en otras palabras, que f es continua por la izquierda en $x = 1$.

Si multiplicamos la serie de $f(x)$ por la serie geométrica y aplicamos el teorema 9.24, obtenemos

$$\frac{1}{1-x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ en donde } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Luego tenemos

$$f(x) - f(1) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} [c_n - f(1)] x^n, \qquad \text{si } -1 < x < 1. \tag{39}$$

Por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} c_n = f(1)$. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$, podemos hallar un N tal que $n \geq N$ implique $|c_n - f(1)| < \varepsilon/2$. Si dividimos la suma (39) en dos partes, obtenemos

$$f(x) - f(1) = (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} [c_n - f(1)] x^n + (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} [c_n - f(1)] x^n. \tag{40}$$

Sea M el mayor de los N números $|c_n - f(1)|$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Si $0 < x < 1$, de (40) se obtiene

$$|f(x) - f(1)| \leq (1-x)NM + (1-x)\frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N}^{\infty} x^n$$

$$= (1-x)NM + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\frac{x^N}{1-x} < (1-x)NM + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora sea $\delta = \varepsilon/2NM$. Entonces $0 < 1 - x < \delta$ implica $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$, que significa $\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$. Esto termina la demostración.

Ejemplo. Si hacemos $x = -1$ en (37) obtenemos

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

(Véase en el ejercicio 8.18 otra deducción de esta fórmula.)

Como aplicación del teorema de Abel podemos deducir el siguiente resultado referente a la multiplicación de series:

Teorema 9.32. *Sean* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *dos series convergentes y sea* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *su producto de Cauchy. Si* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *converge, tenemos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

NOTA. Este resultado es análogo al teorema 8.46 salvo en el hecho de que no suponemos que una de ambas series tenga que ser absolutamente convergente. Sin embargo, *debemos* suponer que su producto de Cauchy es convergente.

Demostración. Las series de potencias $\sum a_n x^n$ y $\sum b_n x^n$ son ambas convergentes para $x = 1$, y por tanto convergen en el entorno $B(0; 1)$. Mantenemos $|x| < 1$ y escribimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right),$$

utilizando el teorema 9.24. Ahora hacemos que $x \to 1-$ y aplicamos el teorema de Abel.

9.23 TEOREMA DE TAUBER

El recíproco del teorema del límite de Abel, en general, es falso. Esto es, si f viene dada por (38), el límite $f(r-)$ puede existir sin que la serie $\sum a_n r^n$ tenga que ser convergente. Por ejemplo, hagamos $a_n = (-1)^n$. Entonces $f(x) = 1/(1+x)$ si $-1 < x < 1$ y $f(x) \to \frac{1}{2}$ cuando $x \to 1-$. Sin embargo, $\sum(-1)^n$ diverge. A. Tauber (1897) descubrió que imponiendo ciertas restricciones a los coeficientes a_n, es posible obtener un recíproco del teorema de Abel. Actualmente se conoce gran número de tales resultados y reciben el nombre de *teoremas tauberianos*. El más sencillo de ellos, conocido a veces como *primer teorema de Tauber*, es el siguiente:

Teorema 9.33 (Tauber). *Sea* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *para* $-1 < x < 1$, *y supongamos que* $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. *Si* $f(x) \to S$ *cuando* $x \to 1-$, *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge y tiene suma S.*

Demostración. Sea $n\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} k|a_k|$. Entonces $\sigma_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. (Ver la nota que sigue al teorema 8.48.) También, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = S$ si $x_n = 1 - 1/n$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir N tal que $n \geq N$ implique

$$|f(x_n) - S| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \sigma_n < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n|a_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ahora sea $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Entonces, para $-1 < x < 1$, podemos escribir

$$s_n - S = f(x) - S + \sum_{k=0}^{n} a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k.$$

Mantenemos ahora x en $(0, 1)$. Entonces

$$(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x),$$

para cada k. Por consiguiente, si $n \geq N$ y $0 < x < 1$, tenemos

$$|s_n - S| \leq |f(x) - S| + (1 - x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{\varepsilon}{3n(1 - x)}.$$

Haciendo $x = x_n = 1 - 1/n$, obtenemos $|s_n - S| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. Esto termina la demostración.

NOTA. Ver en el ejercicio 9.37 otro teorema tauberiano.

EJERCICIOS

Convergencia uniforme

9.1 Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en S y que cada f_n está acotada en S. Probar que $\{f_n\}$ es uniformemente acotada en S.

9.2 Definimos dos sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ como sigue:

$$f_n(x) = x\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{si } x \in \mathbf{R}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x = 0 \text{ o si } x \text{ es irracional,} \\[2mm] b + \dfrac{1}{n} & \text{si } x \text{ es racional, por ejemplo } x = \dfrac{a}{b}, \quad b > 0. \end{cases}$$

Sea $h_n(x) = f_n(x)g_n(x)$.

a) Probar que tanto $\{f_n\}$ como $\{g_n\}$ convergen uniformemente en cada intervalo acotado.
b) Probar que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en ningún intervalo acotado.

9.3 Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en S, $g_n \to g$ uniformemente en S.

a) Probar que $f_n + g_n \to f + g$ uniformemente en S.

b) Sea $h_n(x) = f_n(x)g_n(x)$, $h(x) = f(x)g(x)$, si $x \in S$. El ejercicio 9.2 prueba que la afirmación $h_n \to h$ uniformemente en S, en general, es falsa. Probar que *es* correcta si cada f_n y cada g_n está acotada en S.

9.4 Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en S y supongamos que existe una constante $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo x de S y todo n. Sea g una función continua en la frontera del círculo $B(0; M)$ y definamos $h_n(x) = g[f_n(x)]$, $h(x) = g[f(x)]$ si $x \in S$. Probar que $h_n \to h$ uniformemente en S.

9.5 a) Sea $f_n(x) = 1/(nx + 1)$ si $0 < x < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Probar que $\{f_n\}$ converge puntualmente pero no converge uniformemente en $(0, 1)$.

b) Sea $g_n(x) = x/(nx + 1)$ si $0 < x < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Probar que $g_n \to 0$ uniformemente en $(0, 1)$.

9.6 Sea $f_n(x) = x^n$. La sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, 1]$. Sea g continua en $[0, 1]$, con $g(1) = 0$. Probar que la sucesión $\{g(x)x^n\}$ converge uniformemente en $[0, 1]$.

9.7 Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en S, y que cada f_n es continua en S. Si $x \in S$, sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de S tal que $x_n \to x$. Probar que $f_n(x_n) \to f(x)$.

9.8 Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas definidas en un conjunto compacto S y supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente en S hacia una función límite f. Probar que $f_n \to f$ uniformemente en S si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones siguientes:

i) La función límite f es una función continua en S.

ii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $m > 0$ y un $\delta > 0$ tales que $n > m$ y $|f_k(x) - f(x)| < \delta$ implican $|f_{k+n}(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo x de S y todo $k = 1, 2, \ldots$

Indicación. Para probar la suficiencia de (i) y (ii), demuéstrese que para cada x_0 de S existe un entorno $B(x_0)$ y un entero k (dependiente de x_0) tal que

$$|f_k(x) - f(x)| < \delta \qquad \text{si } x \in B(x_0).$$

En virtud de la compacidad existe un conjunto finito de enteros, por ejemplo $A = \{k_1, \ldots, k_r\}$, que verifica la propiedad de que, para cada x de S, algún k de A satisface $|f_k(x) - f(x)| < \delta$. La convergencia uniforme es una consecuencia inmediata de este hecho.

9.9 a) Usar el ejercicio 9.8 para demostrar el siguiente teorema de Dini: *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones reales continua que converge puntualmente hacia una función límite continua f en un conjunto S, y si $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para cada x de S y cada $n = 1, 2, \ldots$, entonces $f_n \to f$ uniformemente en S.*

b) Utilizar la sucesión del ejercicio 9.5(a) para demostrar que la compacidad de S es esencial en el teorema de Dini.

9.10 Sea $f_n(x) = n^c x(1 - x^2)^n$ para x real y $n \geq 1$. Probar que $\{f_n\}$ converge puntualmente en $[0, 1]$ para cada número real c. Determinar aquellos c para los que la convergencia es uniforme en $[0, 1]$ y aquellos en los que la integración término a término en $[0, 1]$ conduce a un resultado correcto.

9.11 Probar que $\sum x^n(1 - x)$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, 1]$, mientras que $\sum(-1)^n x^n(1 - x)$ converge uniformemente en $[0, 1]$. Este hecho ilustra que la convergencia uniforme de $\sum f_n(x)$ junto con la convergencia puntual de $\sum|f_n(x)|$ no implica necesariamente la convergencia uniforme de $\sum|f_n(x)|$.

9.12 Supongamos que $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ para cada x de T y cada $n = 1, 2, \ldots$, y supongamos que $g_n \to 0$ uniformemente en T. Probar que $\sum(-1)^{n+1}g_n(x)$ converge uniformemente en T.

9.13 Probar el criterio de Abel para la convergencia uniforme: Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones reales tales que $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ para cada x de T y cada $n = 1, 2, \ldots$ Si $\{g_n\}$ es uniformemente acotada en T y si $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en T, entonces $\sum f_n(x)g_n(x)$ también converge uniformemente en T.

9.14 Sea $f_n(x) = x/(1 + nx^2)$ si $x \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Hallar la función límite f de la sucesión $\{f_n\}$ y la función límite g de la sucesión $\{f'_n\}$.

a) Probar que $f'(x)$ existe para cada x pero que $f'(0) \neq g(0)$. ¿Para qué valores de x se tiene $f'(x) = g(x)$?

b) ¿En qué subintervalos de $\mathbf{R}$, $f_n \to f$ uniformemente?

c) ¿En qué subintervalos de $\mathbf{R}$, $f'_n \to g$ uniformemente?

9.15 Sea $f_n(x) = (1/n)e^{-n^2x^2}$ si $x \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Probar que $f_n \to 0$ uniformemente en $\mathbf{R}$, que $f'_n \to 0$ puntualmente en $\mathbf{R}$, pero que la convergencia de $\{f'_n\}$ no es uniforme en ningún intervalo que contenga al origen.

9.16 Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales continuas definidas en $[0, 1]$ y supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en $[0, 1]$. Demostrar si es cierta o no la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

9.17 Matemáticos de Slobbovia decidieron que la integral de Riemann era demasiado complicada y la reemplazaron por la *integral Slobboviana*, definida como sigue: Si f es una función definida en el conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales de $[0, 1]$, la integral Slobboviana de f, designada por $S(f)$, es el límite

$$S(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

en el supuesto de que este límite exista. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones tales que $S(f_n)$ existe para cada n y tal que $f_n \to f$ uniformemente en $\mathbf{Q}$. Probar que $\{S(f_n)\}$ converge, que $S(f)$ existe, y que $S(f_n) \to S(f)$ cuando $n \to \infty$.

9.18 Sea $f_n(x) = 1/(1 + n^2x^2)$ si $0 \leq x \leq 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Probar que $\{f_n\}$ converge puntualmente en $[0, 1]$ pero no uniformemente. ¿Es posible la integración término a término?

9.19 Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} x/n^\alpha(1 + nx^2)$ converge uniformemente en cada intervalo finito de $\mathbf{R}$ si $\alpha > \frac{1}{2}$. ¿Es uniforme la convergencia en $\mathbf{R}$?

9.20 Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n/\sqrt{n})\, \mathrm{sen}(1 + (x/n))$ converge uniformemente en todo subconjunto compacto de $\mathbf{R}$.

9.21 Probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n+1}/(2n+1) - x^{n+1}/(2n+2))$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, 1]$.
9.22 Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ son uniformemente convergentes en $\mathbf{R}$ si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.
9.23 Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de términos positivos. Probar que la serie $\sum a_n \operatorname{sen} nx$ converge uniformemente en $\mathbf{R}$ si, y sólo si, $na_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
9.24 Dada una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, probar que la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ converge uniformemente en el semiintervalo infinito $0 \le s < +\infty$. Utilizar este resultado para demostrar que $\lim_{s\to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
9.25 Probar que la serie $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ converge uniformemente en todo semiintervalo infinito de la forma $1+h \le s < +\infty$, en donde $h > 0$. Probar que la ecuación

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}$$

es válida para cada $s > 1$ y obtener una fórmula análoga para la k-ésima derivada $\zeta^{(k)}(s)$.

Convergencia en media

9.26 Sea $f_n(x) = n^{3/2}xe^{-n^2x^2}$. Probar que $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia 0 en $[-1, 1]$ pero que $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n \neq 0$ en $[-1, 1]$.
9.27 Supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia f en $[a, b]$ y que $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n = g$, en $[a, b]$. Probar que $f = g$ si ambas funciones son continuas en $[a, b]$.
9.28 Sea $f_n(x) = \cos^n x$ si $0 \le x \le \pi$.
a) Probar que $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n = 0$ en $[0, \pi]$ pero que $\{f_n(\pi)\}$ no converge.
b) Probar que $\{f_n\}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, \pi/2]$.
9.29 Sea $f_n(x) = 0$ si $0 \le x \le 1/n$ o si $2/n \le x \le 1$, y sea $f_n(x) = n$ si $1/n < x < 2/n$. Probar que $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia 0 en $[0, 1]$ pero que $\text{l.e.m.}_{n\to\infty} f_n \neq 0$ en $[0, 1]$.

Series de potencias

9.30 Si r es el radio de convergencia de $\sum a_n(z - z_0)^n$, siendo $a_n \neq 0$, probar que

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \le r \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| .$$

9.31 En el supuesto de que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tenga radio de convergencia 2, hallar los radios de convergencia de cada una de las series siguientes:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$.

En (a) y (b), k es un entero positivo fijo.

9.32 Considérese una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cuyos coeficientes están relacionados por una ecuación de la forma

$$a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Probar que para todo x para el que la serie converge, su suma es

$$\frac{a_0 + (a_1 + Aa_0)x}{1 + Ax + Bx^2}.$$

9.33 Sea $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
a) Probar que $f^{(n)}(0)$ existe para todo $n \ge 1$.
b) Probar que la serie de Taylor en torno de $x_0 = 0$ generada por f converge en todo $\mathbf{R}$, pero sólo representa a f en el origen.

9.34 Probar que la serie binómica $(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ presenta el siguiente comportamiento en los puntos $x = \pm 1$.
a) Si $x = -1$, la serie converge para $\alpha \ge 0$ y diverge para $\alpha < 0$.
b) Si $x = 1$, la serie diverge para $\alpha \le -1$, converge condicionalmente en el intervalo $-1 < \alpha < 0$, y converge absolutamente para $\alpha \ge 0$.

9.35 Probar que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, 1]$ si $\sum a_n$ converge. Utilizar este resultado para dar otra demostración del teorema del límite de Abel.
9.36 Si cada $a_n \ge 0$ y si $\sum a_n$ diverge, probar que $\sum a_n x^n \to +\infty$ cuando $x \to 1^-$. (Suponer que $\sum a_n x^n$ converge para $|x| < 1$.)
9.37 Si cada $a_n \ge 0$ y si $\lim_{x\to 1^-} \sum a_n x^n$ existe y es igual a A, entonces $\sum a_n$ converge y su suma es A. (Comparar con el teorema 9.33.)
9.38 Para cada número real t, definimos $f_t(x) = xe^{xt}/(e^x - 1)$ si $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, $f_t(0) = 1$.
a) Probar que existe un círculo $B(0; \delta)$ en el que cada f_t admite un desarrollo en serie de potencias en x.
b) Definir $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, ..., por medio de la ecuación

$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\frac{x^n}{n!}, \qquad \text{si } x \in B(0; \delta)$$

y usar la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\frac{x^n}{n!} = e^{tx}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)\frac{x^n}{n!}$$

para probar que $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k(0)t^{n-k}$. Esto demuestra que cada función P_n es un polinomio. Éstos son los *polinomios de Bernoulli*. Los números $B_n = P_n(0), (n = 0, 1, 2, \ldots)$ se llaman *números de Bernoulli.* Deducir las propiedades siguientes:

c) $B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \qquad \text{si } n = 2, 3, \ldots$

d) $P_n'(t) = nP_{n-1}(t), \qquad \text{si } n = 1, 2, \ldots$

e) $P_n(t + 1) - P_n(t) = nt^{n-1} \qquad \text{si } n = 1, 2, \ldots$

f) $P_n(1 - t) = (-1)^n P_n(t)$ g) $B_{2n+1} = 0 \qquad \text{si } n = 1, 2, \ldots$

h) $1^n + 2^n + \cdots + (k - 1)^n = \dfrac{P_{n+1}(k) - P_{n+1}(0)}{n + 1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

9.1 Hardy, G. H., *Divergent Series.* Oxford Univ. Press, Oxford, 1949.
9.2 Hirschmann, I .I., *Infinite Series.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.
9.3 Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series,* 2.ª ed. Traductor, R. C. Young. Hafner, New York, 1948.

CAPÍTULO 10

La integral de Lebesgue

10.1 INTRODUCCIÓN

La integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$, tal como fue desarrolla en el capítulo 7, está bien motivada, es fácil describirla, y es útil a todas las necesidades del Cálculo elemental. Sin embargo, esta integral no cubre todas las necesidades del Análisis superior. En este capítulo daremos la *integral de Lebesgue,* que es una extensión de la integral de Riemann. La integral de Lebesgue permite integrar funciones más generales, trata simultáneamente funciones acotadas y no acotadas, y permite reemplazar el intervalo $[a, b]$ por conjuntos más generales.

En la integral de Lebesgue se cumplen un mayor número de teoremas de convergencia. Si una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia una función límite f en $[a, b]$, sería deseable poder concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

con un mínimo de hipótesis adicionales. El resultado definitivo en este sentido es el *teorema de convergencia dominada* de Lebesgue, que permite integrar término a término si cada $\{f_n\}$ es una función integrable de Lebesgue y si además la sucesión está dominada por una función integrable de Lebesgue. (Ver teorema 10.27.) En este teorema las integrales de Lebesgue son esenciales. El teorema es falso para integrales de Riemann.

En el método de Riemann, el intervalo de integración se subdivide en un número finito de subintervalos. En el de Lebesgue, el intervalo se subdivide en conjuntos de un tipo más general llamados *conjuntos medibles.* En un trabajo clásico, *Integral, longuer, aire,* publicado en 1902, Lebesgue da la definición de medida para un conjunto de puntos y lo aplica al desarrollo de esta nueva integral.

Desde este primer trabajo de Lebesgue, tanto la teoría de la medida como la teoría de la integración han sufrido muchas generalizaciones y modificaciones.

Los trabajos de Young, Daniell, Riesz, Stone y otros han probado que la integral de Lebesgue puede introducirse de tal manera que no dependa de la teoría de la medida sino que esté orientada directamente a las funciones y sus integrales. En este capítulo se sigue este método, tal como fue iniciado en la referencia 10.10. El único concepto de la teoría de la medida que necesitaremos es el de conjunto de medida cero, que es un concepto muy simple que ya fue introducido en el capítulo 7. Más adelante, indicaremos brevemente cómo, por medio de la integral de Lebesgue, es posible desarrollar la teoría de la medida.

10.2 INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN ESCALONADA

El método que presentaremos aquí consiste en definir primeramente la integral de las funciones escalonadas, después para una clase más amplia de funciones (llamadas funciones superiores) que contiene los límites de ciertas sucesiones crecientes de funciones escalonadas, y finalmente para una clase igualmente más amplia, la de las funciones integrables de Lebesgue.

Recordemos que una función s, definida en un intervalo compacto $[a, b]$, se llama función escalonada si existe una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que s es constante en cada subintervalo abierto, por ejemplo

$$s(x) = c_k \qquad \text{si } x \in (x_{k-1}, x_k),$$

Una función escalonada es integrable de Riemann en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y su integral sobre el mismo viene dada por

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} s(x)\, dx = c_k(x_k - x_{k-1}),$$

independientemente de los valores de s en los extremos. La integral de Riemann de s en $[a, b]$ es por consiguiente igual a la suma

$$\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}). \tag{1}$$

NOTA. La teoría de Lebesgue puede desarrollarse sin necesidad de tener un conocimiento previo de la integración de Riemann, utilizando la ecuación (1) como *definición* de la integral de una función escalonada.

Debe observarse que la suma en (1) es independiente de la elección de P mientras s sea constante en los subintervalos abiertos de P.

Es conveniente eliminar la restricción que supone exigir que el dominio de una función escalonada sea compacto.

Definición 10.1. *Supongamos que I designa un intervalo cualquiera (acotado, no acotado, abierto, cerrado o semiabierto). Una función s es una función escalonada en I si existe un subintervalo compacto $[a, b]$ de I en el que s sea una función escalonada en $[a, b]$, si además $s(x) = 0$ para $x \in I - [a, b]$. La integral de s en I, designada por $\int_I s(x)\, dx$ o por $\int_I s$, es la integral de s en $[a, b]$, dada por* (1).

Existen, naturalmente, muchos intervalos compactos fuera de los cuales la función s se anula, pero la integral de s es independiente de la elección de $[a, b]$.

La suma y el producto de dos funciones escalonadas es una función escalonada. Las propiedades de la integral de funciones escalonadas que se dan a continuación se deducen inmediatamente de la anterior definición:

$$\int_I (s + t) = \int_I s + \int_I t, \qquad \int_I cs = c\int_I s \quad \text{para toda constante } c,$$

$$\int_I s \leq \int_I t \qquad \text{si } s(x) \leq t(x) \text{ para todo } x \text{ de } I.$$

Además, si se expresa I como la reunión de un conjunto finito de subintervalos, por ejemplo $I = \bigcup_{r=1}^{p} [a_r, b_r]$, en la que dos subintervalos carecen de puntos interiores comunes, entonces

$$\int_I s(x)\, dx = \sum_{r=1}^{p} \int_{a_r}^{b_r} s(x)\, dx.$$

10.3 SUCESIONES MONÓTONAS DE FUNCIONES ESCALONADAS

Una sucesión de funciones reales $\{f_n\}$ definida en un conjunto S es *creciente* en S si

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } S \text{ y todo } n.$$

Una sucesión *decreciente* es la que verifica la desigualdad invertida.

NOTA. Recuerde el lector que un subconjunto T de $\mathbf{R}$ tiene medida 0 si, para cada $\varepsilon > 0$, es posible recubrir T por medio de una colección numerable de intervalos, la suma de cuyas longitudes es menor que ε. Se dice que una propiedad se verifica *casi en todo* un conjunto S (y se escribe: *c.e.t.* S) si se verifica en todo S salvo en un conjunto de medida 0.

NOTACIÓN. Si $\{f_n\}$ es una *sucesión creciente* de funciones definidas en S tal que $f_n \to f$ casi en todo S, escribiremos

$$f_n \nearrow f \qquad c.e.t.\ S.$$

Análogamente, la notación $f_n \searrow f$ *c.e.t.* S significa que $\{f_n\}$ es una sucesión decreciente en S que converge hacia f casi en todo S.

El teorema que sigue está relacionado con las sucesiones decrecientes de funciones escalonadas en un intervalo cualquiera I.

Teorema 10.2. *Sea $\{s_n\}$ una sucesión decreciente de funciones escalonadas no negativas tal que $s_n \searrow 0$ c.e.t. un intervalo I. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n = 0.$$

Demostración. La idea de la demostración consiste en escribir

$$\int_I s_n = \int_A s_n + \int_B s_n,$$

en donde tanto A como B es la reunión finita de intervalos. El conjunto A se obtiene eligiendo aquellos intervalos en los que el integrando es pequeño cuando n es suficientemente grande. En B el integrando no necesita ser pequeño, pero en cambio la suma de las longitudes de sus intervalos será pequeña. Para llevar a cabo esta idea procederemos como sigue.

Existe un intervalo compacto $[a, b]$ fuera del cual s_1 se anula. Dado que

$$0 \leq s_n(x) \leq s_1(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } I,$$

cada s_n se anula fuera de $[a, b]$. Ahora bien, s_n es constante en cada subintervalo abierto de una cierta partición de $[a, b]$. Designemos D_n al conjunto de los extremos de estos subintervalos, y sea $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Puesto que cada D_n es un conjunto finito, la reunión D es numerable y por lo tanto tiene medida cero. Sea E el conjunto de puntos de $[a, b]$ en los que la sucesión $\{s_n\}$ *no* converge hacia 0. Por hipótesis, E tiene medida cero, luego el conjunto

$$F = D \cup E$$

tendrá también medida 0. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ podemos recubrir F por medio de una colección numerable de intervalos abiertos $F_1, F_2, \ldots$, la suma de cuyas longitudes es menor que ε.

Ahora supongamos que $x \in [a, b] - F$. Entonces $x \notin E$, luego $s_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por consiguiente existe un entero $N = N(x)$ tal que $s_N(x) < \varepsilon$. Además, $x \notin D$ luego x es interior a alguno de los intervalos en los que s_N es constante. Así pues, existe un intervalo abierto $B(x)$ tal que $s_N(t) < \varepsilon$ para todo t de $B(x)$. Como $\{s_n\}$ es decreciente, tenemos, pues,

$$s_n(t) < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq N \text{ y todo } t \text{ de } B(x). \tag{2}$$

El conjunto de todos los intervalos $B(x)$ obtenidos cuando x recorre $[a, b] - F$, junto con los intervalos $F_1, F_2, \ldots$, forman un recubrimiento abierto de $[a, b]$. Puesto que $[a, b]$ es compacto existe un subrecubrimiento finito, por ejemplo

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i) \cup \bigcup_{r=1}^{q} F_r.$$

Sea N_0 el mayor de los enteros $N(x_1), \ldots, N(x_p)$. De (2) se deduce que

$$s_n(t) < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq N_0 \text{ y todo } t \text{ de } \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i). \tag{3}$$

Ahora definimos A y B como sigue:

$$B = \bigcup_{r=1}^{q} F_r, \qquad A = [a, b] - B.$$

Entonces A es una reunión finita de intervalos disjuntos y se tiene

$$\int_I s_n = \int_a^b s_n = \int_A s_n + \int_B s_n.$$

Primeramente calcularemos la integral sobre B. Sea M una cota superior de s_1 en $[a, b]$. Ya que $\{s_n\}$ es decreciente, tenemos $s_n(x) \leq s_1(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$. La suma de las longitudes de los intervalos que pertenecen a B es menor que ε, luego tenemos

$$\int_B s_n \leq M\varepsilon.$$

A continuación calcularemos la integral sobre A. Puesto que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i)$, la desigualdad de (3) prueba que $s_n(x) < \varepsilon$ si $x \in A$ y $n \geq N_0$. La suma de las longitudes de los intervalos de A no excede a $b - a$, luego tenemos

$$\int_A s_n \leq (b - a)\varepsilon \qquad \text{si } n \geq N_0.$$

Las dos estimaciones nos conducen a $\int_I s_n \leq (M + b - a)\varepsilon$ si $n \geq N_0$, y esto prueba que $\lim_{n\to\infty} \int_I s_n = 0$.

Teorema 10.3. *Sea $\{t_n\}$ una sucesión de funciones escalonadas en un intervalo I tal que:*

a) *Existe una función f tal que $t_n \nearrow f$ c.e.t. I,*
y
b) *la sucesión $\{\int_I t_n\}$ converge.*

Entonces toda función escalonada t tal que $t(x) \leq f(x)$ c.e.t. I verifica

$$\int_I t \leq \lim_{n\to\infty} \int_I t_n. \tag{4}$$

Demostración. Se define una nueva sucesión de funciones escalonadas no negativas $\{s_n\}$ en I como sigue:

$$s_n(x) = \begin{cases} t(x) - t_n(x) & \text{si } t(x) \geq t_n(x), \\ 0 & \text{si } t(x) < t_n(x). \end{cases}$$

Nótese que $s_n(x) = \text{máx}\ \{t(x) - t_n(x),\ 0\}$. Entonces $\{s_n\}$ es decreciente en I puesto que $\{t_n\}$ es creciente, y $s_n(x) \to \text{máx}\ \{t(x) - f(x),\ 0\}$ *c.e.t. I.* Pero $t(x) \leq f(x)$ *c.e.t. I,* y por consiguiente $s_n \searrow 0$ *c.e.t. I.* Luego, en virtud del teorema 10,2, $\lim_{n\to\infty} \int_I s_n = 0$. Pero $s_n(x) \geq t(x) - t_n(x)$ para todo x de I, luego

$$\int_I s_n \geq \int_I t - \int_I t_n.$$

Ahora hagamos que $n \to \infty$ y obtendremos (4).

10.4 FUNCIONES SUPERIORES Y SUS INTEGRALES

Sea $S(I)$ el conjunto de todas las funciones escalonadas en un intervalo I. Hemos definido la integral para todas las funciones de $S(I)$. Ahora deseamos extender la definición a una clase $U(I)$ más amplia que contenga los límites de ciertas sucesiones crecientes de funciones escalonadas. Las funciones de esta clase las llamaremos *funciones superiores* y se definen como sigue:

Definición 10.4. *Una función real f definida en un intervalo I se llama función superior en I, y se escribe $f \in U(I)$, si existe una sucesión creciente de funciones escalonadas $\{s_n\}$ tal que:*

a) $s_n \nearrow f$ *c.e.t I.*
y
b) $\lim_{n\to\infty} \int_I s_n$ *es finito.*

Se dice que la sucesión $\{s_n\}$ genera f. La integral de f en I se define por la ecuación

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n. \tag{5}$$

NOTA. Puesto que $\{\int_I s_n\}$ es una sucesión de números reales creciente, la condición (b) equivale a afirmar que la sucesión $\{\int_I s_n\}$ está acotada superiormente.

El próximo teorema demuestra que la definición de integral dada en (5) no es ambigua.

Teorema 10.5. *Supongamos que $f \in U(I)$ y sean $\{s_n\}$ y $\{t_m\}$ dos sucesiones que generen f. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n = \lim_{m\to\infty} \int_I t_m.$$

Demostración. La sucesión $\{t_m\}$ satisface las hipótesis (a) y (b) del teorema 10.3. Además, para cada n tenemos

$$s_n(x) \leq f(x) \qquad c.e.t.\ \ I,$$

Por consiguiente, (4) nos proporciona

$$\int_I s_n \leq \lim_{m\to\infty} \int_I t_m.$$

Esto se verifica para cada n, y por lo tanto tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n \leq \lim_{m\to\infty} \int_I t_m.$$

El mismo razonamiento, con las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_m\}$ intercambiadas, nos lleva a la desigualdad contraria y la demostración queda completada.

Es fácil ver que toda función escalonada es una función superior y que su integral, dada por (5), es la misma que la dada por la definición anterior de la sección 10.2. En el siguiente teorema se dan otras propiedades de la integral de las funciones superiores.

Teorema 10.6. *Supongamos que $f \in U(I)$ y que $g \in U(I)$. Entonces:*
a) $(f + g) \in U(I)$ *y*

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g.$$

b) $cf \in U(I)$ *para cada constante* $c \geq 0$, *y*

$$\int_I cf = c\int_I f.$$

c) $\int_I f \leq \int_I g$ *si* $f(x) \leq g(x)$ *c.e.t.* I.

NOTA. En (b) el requisito $c \geq 0$ es esencial. Hay ejemplos para los que $f \in U(I)$ y en cambio $-f \notin U(I)$. (Ver el ejercicio 10.4.) Sin embargo, si $f \in U(I)$ y si $s \in S(I)$, entonces $f - s \in U(I)$ ya que $f - s = f + (-s)$.

Demostración. Las partes (a) y (b) son consecuencias inmediatas de las propiedades correspondientes a las funciones escalonadas. Para probar (c), sea $\{s_m\}$ una sucesión que genere f, y sea $\{t_n\}$ una sucesión que genere g. Entonces $s_m \nearrow f$ y $t_n \nearrow g$ *c.e.t.* I, y

$$\lim_{m\to\infty}\int_I s_m = \int_I f, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_I t_n = \int_I g.$$

Pero para cada m tenemos

$$s_m(x) \leq f(x) \leq g(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x) \quad c.e.t.\ I.$$

Luego, aplicando el teorema 10.3,

$$\int_I s_m \leq \lim_{n\to\infty}\int_I t_n = \int_I g.$$

Y hacendo $m \to \infty$ obtenemos (c).

El teorema que sigue nos proporciona una consecuencia importante de la parte (c).

Teorema 10.7. *Si $f \in U(I)$ y $g \in U(I)$, y si $f(x) = g(x)$ casi por todo en I, entonces $\int_I f = \int_I g$.*

Demostración. Tenemos las desigualdades $f(x) \leq g(x)$ y $g(x) \leq f(x)$ casi en todo I, y entonces el teorema 10.6(c) nos da $\int_I f \leq \int_I g$ e $\int_I g \leq \int_I f$.

Definición 10.8. *Sean f y g funciones reales definidas en I. Definimos* máx (f, g) *y* mín (f, g) *como las funciones cuyo valor en cada x de I es, respectivamente,* máx $\{f(x), g(x)\}$ *y* mín $\{f(x), g(x)\}$.

El lector puede verificar fácilmente las siguientes propiedades de las funciones máx y mín.

a) máx (f, g) + mín $(f, g) = f + g$.
b) máx $(f+h, g+h)$ = máx $(f, g) + h$, y mín $(f+h, g+h)$ = mín $(f, g) + h$.
Si $f_n \nearrow f$ *c.e.t.* I, y si $g_n \nearrow g$ *c.e.t.* I, entonces
c) máx $(f_n, g_n) \nearrow$ máx (f, g) *c.e.t.* I, y mín $(f_n, g_n) \nearrow$ mín (f, g) *c.e.t.* I.

Teorema 10.9. *Si $f \in U(I)$ y $g \in U(I)$, entonces* máx $(f, g) \in U(I)$ *y* mín $(f, g) \in U(I)$.

Demostración. Sean $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ sucesiones de funciones escalonadas que generen, respectivamente, f y g, y sean u_n = máx (s_n, t_n), v_n = mín (s_n, t_n). Entonces u_n y v_n son funciones escalonadas tales que $u_n \nearrow$ máx (f, g) y $v_n \nearrow$ mín (f, g) *c.e.t.* I.

Para probar que mín $(f, g) \in U(I)$ es suficiente probar que la sucesión $\{\int_I v_n\}$ está acotada superiormente. Pero v_n = mín $(s_n, t_n) \leq f$, *c.e.t.* I, luego $\int_I v_n \leq \int_I f$. Por consiguiente, la sucesión $\{\int_I v_n\}$ converge. Pero la sucesión $\{\int_I u_n\}$ también converge puesto que, por la propiedad (a), $u_n = s_n + t_n - v_n$ y entonces

$$\int_I u_n = \int_I s_n + \int_I t_n - \int_I v_n \to \int_I f + \int_I g - \int_I \min(f, g).$$

El teorema que sigue nos da una propiedad aditiva de la integral respecto del intervalo de integración.

Teorema 10.10. *Supongamos que el intervalo I es la reunión de dos subintervalos, por ejemplo $I = I_1 \cup I_2$, en donde I_1 e I_2 carecen de puntos interiores comunes.*

a) *Si $f \in U(I)$ y además $f \geq 0$ c.e.t. I, entonces $f \in U(I_1)$, $f \in U(I_2)$, y*

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f. \tag{6}$$

b) *Supongamos que $f_1 \in U(I_1)$, $f_2 \in U(I_2)$, y sea f la función definida en I como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si\ x \in I_1 \\ f_2(x) & si\ x \in I - I_1. \end{cases}$$

Entonces $f \in U(I)$ y

$$\int_I f = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2.$$

Demostración. Si $\{s_n\}$ es una sucesión creciente de funciones escalonadas que genera f en I, sea $s_n^+(x) = \max\{s_n(x), 0\}$ para cada x de I. Entonces $\{s_n^+\}$ es una sucesión creciente de funciones escalonadas *no negativas* que genera f en I (ya que $f \geq 0$). Además, en cada subintervalo J de I tenemos $\int_J s_n^+ \leq \int_I s_n^+ \leq \int_I f$, por lo que $\{s_n^+\}$ genera f en J. También,

$$\int_I s_n^+ = \int_{I_1} s_n^+ + \int_{I_2} s_n^+,$$

y haciendo $n \to \infty$ obtenemos (a). La demostración de (b) se deja como ejercicio.

NOTA. Existe el correspondiente teorema (que se demuestra por inducción) para un intervalo que es expresado como la reunión de un número finito de subintervalos, tales que ningún par de ellos posea puntos interiores comunes.

10.5 LAS FUNCIONES INTEGRALES DE RIEMANN COMO EJEMPLO DE LAS FUNCIONES SUPERIORES

El teorema que sigue prueba que la clase de funciones superiores incluye todas las funciones integrables de Riemann.

Teorema 10.11. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo compacto $[a, b]$, y supongamos que f es continua casi en todo $[a, b]$. Entonces $f \in U([a, b])$ y la integral de f, como función de $U[(a, b])$, es igual a la integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Demostración. Sea $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2^n}\}$ una partición de $[a, b]$ en 2^n subintervalos iguales de longitud $(b - a)/2^n$. Los subintervalos de P_{n+1} se obtienen dividiendo en dos los de P_n. Sea

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \qquad \text{para } 1 \leq k \leq 2^n,$$

y definamos una función escalonada s_n en $[a, b]$ como sigue:

$$s_n(x) = m_k \text{ si } x_{k-1} < x \leq x_k, \qquad s_n(a) = m_1.$$

Entonces $s_n(x) \leq f(x)$ para todo x de $[a, b]$. Además, $\{s_n\}$ es creciente ya que el ínf de f en un subintervalo de $[x_{k-1}, x_k]$ no puede ser menor que en $[x_{k-1}, x_k]$.

A continuación vemos que $s_n(x) \to f(x)$ en cada punto de continuidad de f. Puesto que el conjunto de discontinuidades de f en $[a, b]$ tiene medida cero, esto demostrará que $s_n \to f$ c.e.t. $[a, b]$. Si f es continua en x, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un δ (que depende de x y de ε) tal que

$$f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$$

siempre que

$$x - \delta < y < x + \delta.$$

Sea $m(\delta) = \inf\{f(y) : y \in (x - \delta, x + \delta)\}$. Entonces $f(x) - \varepsilon \leq m(\delta)$, por lo que $f(x) \leq m(\delta) + \varepsilon$. Existe una partición P_N que posee un subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ que contiene a x y está contenido en el intervalo $(x - \delta, x + \delta)$. Por consiguiente,

$$s_N(x) = m_k \leq f(x) \leq m(\delta) + \varepsilon \leq m_k + \varepsilon = s_N(x) + \varepsilon.$$

Pero $s_n(x) \leq f(x)$ para todo n y $s_N(x) \leq s_n(x)$ para $n \geq N$. Luego

$$s_n(x) \leq f(x) \leq s_n(x) + \varepsilon \qquad si\ n \geq N,$$

que prueba que $s_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$.

La sucesión de integrales $\{\int_a^b s_n\}$ converge puesto que es una sucesión creciente, acotada superiormente por $M(b - a)$, en donde $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Además,

$$\int_a^b s_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_k(x_k - x_{k-1}) = L(P_n, f),$$

en donde $L(P_n, f)$ es una suma inferior de Riemann. Dado que el límite de una sucesión creciente es igual a su supremo, la sucesión $\{\int_a^b s_n\}$ converge hacia la integral de Riemann de f en $[a, b]$. (La integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ existe en virtud del criterio de Lebesgue, teorema 7.48.)

NOTA. Como ya hemos indicado anteriormente, existen funciones f de $U(I)$ tales que $-f \notin U(I)$. Por consiguiente la clase $U(I)$ es ahora más amplia que la clase de las funciones integrables de Riemann en I, ya que $-f \in R$ en I si $f \in R$ en I.

10.6 LA CLASE DE LAS FUNCIONES INTEGRABLES DE LEBESGUE EN UN INTERVALO GENERAL

Si u y v son funciones superiores, la diferencia $u - v$ no es necesariamente una función superior. Eliminaremos esta propiedad indeseable ampliando la clase de las funciones integrables.

Definición 10.12. *Designaremos por $L(I)$ al conjunto de todas las funciones f de la forma $f = u - v$, en donde $u \in U(I)$ y $v \in U(I)$. Cada función f de $L(I)$ se llamará función integrable de Lebesgue en I, y su integral se definirá por medio de la ecuación*

$$\int_I f = \int_I u - \int_I v. \tag{7}$$

Toda función $f \in L(I)$ se puede escribir como diferencia de dos funciones superiores y no necesariamente de forma única. El próximo teorema prueba que la integral de f no depende de la elección de las funciones superiores u y v.

Teorema 10.13. *Sean u, v, u_1, y v_1 funciones de $U(I)$ tales que $u - v = u_1 - v_1$. Entonces*

$$\int_I u - \int_I v = \int_I u_1 - \int_I v_1. \tag{8}$$

Demostración. Las funciones $u + v_1$ y $u_1 + v$ pertenecen a $U(I)$ y $u + v_1 = u_1 + v$. Luego, por el teorema 10.6 (a), tenemos que $\int_I u + \int_I v_1 = \int_I u_1 + \int_I v$, que prueba (8).

NOTA. Si el intervalo I tiene por extremos los puntos a y b del sistema ampliado de los números reales R^*, con $a \leq b$, escribiremos también

$$\int_a^b f \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

para designar la integral de Lebesgue $\int_I f$. Definimos también $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Si $[a, b]$ es un intervalo compacto, toda función integrable de Riemann en $[a, b]$ pertenece a $U([a, b])$ y por lo tanto también pertenece a $L([a, b])$.

10.7 PROPIEDADES BÁSICAS DE LA INTEGRAL DE LEBESGUE

Teorema 10.14. *Supongamos que $f \in L(I)$ y $g \in L(I)$. Entonces tenemos:*

a) *$(af + bg) \in L(I)$ para cada par de números reales a y b, y*

$$\int_I (af + bg) = a \int_I f + b \int_I g.$$

b) $\int_I f \geq 0$ *si $f(x) \geq 0$ c.e.t. I.*

c) $\int_I f \geq \int_I g$ *si $f(x) \geq g(x)$ c.e.t. I.*

d) $\int_I f = \int_I g$ *si $f(x) = g(x)$ c.e.t. I.*

Demostración. La parte (a) se obtiene fácilmente a partir del teorema 10.6. Para probar (b) ponemos $f = u - v$, en donde $u \in U(I)$ y $v \in U(I)$. Entonces $u(x) \geq v(x)$ *c.e.t.* I luego, por el teorema 10.6(c), tenemos $\int_I u \geq \int_I v$, y entonces

$$\int_I f = \int_I u - \int_I v \geq 0.$$

La parte (c) se sigue aplicando (b) a $f - g$, y la parte (d) se sigue aplicando dos veces (c).

Definición 10.15. *Si f es una función real, su parte positiva, designada por f^+, y su parte negativa, designada por f^-, se definen por medio de las ecuaciones*

$$f^+ = \max(f, 0), \qquad f^- = \max(-f, 0).$$

Nótese que f^+ y f^- son funciones no negativas y que

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

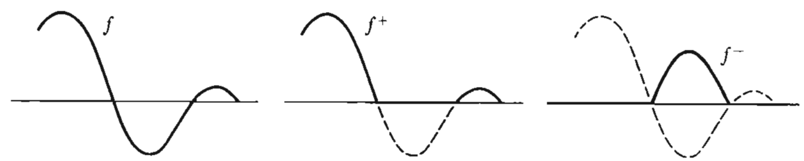


Figura 10.1

En la figura 10.1 pueden verse algunos ejemplos.

Teorema 1016. *Si f y g son funciones de $L(I)$, entonces también lo son f^+ f^-, $|f|$, máx (f, g) y mín (f, g). Además, tenemos*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|. \tag{9}$$

Demostración. Pongamos $f = u - v$, en donde $u \in U(I)$ y $v \in U(I)$. Entonces

$$f^+ = \max(u - v, 0) = \max(u, v) - v.$$

Pero máx $(u, v) \in U(I)$, en virtud del teorema 10.9, y $v \in U(I)$, luego $f^+ \in L(I)$. Dado que $f^- = f^+ - f$, vemos que $f^- \in L(I)$. Finalmente $|f| = f^+ + f^-$, luego $|f| \in L(I)$.

Puesto que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ para todo x de I tenemos

$$-\int_I |f| \leq \int_I f \leq \int_I |f|,$$

que prueba (9). Para terminar la demostración usaremos las relaciones

$$\max(f, g) = \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|), \qquad \min(f, g) = \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

El próximo teorema describe el comportamiento de una integral de Lebesgue cuando el intervalo de integración se traslada, se dilata o contrae, o se refleja respecto del origen. Usaremos la siguiente notación, en donde c designa un número real:

$$I + c = \{x + c : x \in I\}, \qquad cI = \{cx : x \in I\}.$$

Teorema 10.17. *Supongamos que $f \in L(I)$. Entonces tenemos:*

a) *Invariancia por traslaciones. Si $g(x) = f(x - c)$ para x pertenecientes a $I + c$, entonces $g \in L(I + c)$,* y

$$\int_{I+c} g = \int_I f.$$

b) *Comportamiento de la integral bajo una dilatación o una contracción. Si $g(x) = f(x/c)$ para x pertenecientes a cI, en donde $c > 0$, entonces $g \in L(c)I$ y*

$$\int_{cI} g = c\int_I f.$$

c) *Invariancia por reflexión. Si $g(x) = f(-x)$ para x pertenecientes a $-I$, entonces $g \in L(-I)$ y*

$$\int_{-I} g = \int_I f.$$

NOTA. Si I tiene extremos $a < b$, en donde a y b pertenecen al sistema ampliado de los números reales $\mathbf{R}^*$, la fórmula de (a) se puede escribir también como sigue:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x - c)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Las propiedades (b) y (c) se pueden combinar en una sola fórmula que incluya tanto valores positivos como negativos de c:

$$\int_{ca}^{cb} f(x/c)\, dx = |c| \int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{si } c \neq 0.$$

Demostración. Para demostrar un teorema de esta índole se sigue siempre el mismo procedimiento. En primer lugar se verifica el teorema para funciones escalonadas, después para funciones superiores, y finalmente para funciones integrables de Lebesgue. La demostración es, en cada caso, directa por lo cual omitimos los detalles.

Teorema 10.18. *Sea I un intervalo unión de dos subintervalos, por ejemplo $I = I_1 \cup I_2$, en donde I_1 e I_2 no tienen puntos interiores comunes.*

a) *Si $f \in L(I)$, entonces $f \in L(I_1)$, $f \in L(I_2)$, y*

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

b) *Supongamos que $f_1 \in L(I_1), f_2 \in L(I_2)$, y sea f una función definida en I como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si\ x \in I_1, \\ f_2(x) & si\ x \in I - I_1. \end{cases}$$

Entonces $f \in L(I)$ y $\int_I f = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2$.

Demostración. Pongamos $f = u - v$ en donde $u \in U(I)$ y $v \in U(I)$. Entonces $u = u^+ - u^-$ y $v = v^+ - v^-$, luego $f = u^+ + v^- - (u^- + v^+)$. Apliquemos ahora el teorema 10.10 a cada una de las funciones no negativas $u^+ + v^-$ y $u^- + v^+$ para deducir la parte (a). La demostración de la parte (b) se deja al lector.

NOTA. Existe una extensión del teorema 10.18 para intervalos que se puedan expresar como unión de un número finito de subintervalos tales que dos a dos carezcan de puntos interiores comunes. El lector puede comprobar esto por sí mismo.

Terminemos esta sección con dos teoremas de aproximación que necesitaremos más adelante. El primero nos dice que cada función f integrable Lebesgue es igual a una función superior u menos una función superior no negativa v cuya integral es pequeña. El segundo nos dice que f es igual a una función escalonada s más una función integrable g cuya integral es pequeña. Con mayor precisión, tenemos:

Teorema 10.19. *Supongamos que $f \in L(I)$ y sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces:*

a) *Existen funciones u y v de $U(I)$ tales que $f = u - v$, en donde v es no negativa c.e.t. I e $\int_I v < \varepsilon$.*
b) *Existe una función escalonada s y una función g de $L(I)$ tal que $f = s + g$, donde $\int_I |g| < \varepsilon$.*

Demostración. Puesto que $f \in L(I)$, podemos escribir $f = u_1 - v_1$, en donde u_1 y v_1 son funciones de $U(I)$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión que genere v_1. Ya que $\int_I t_n \to \int_I v_1$, podemos elegir N tal que $0 \le \int_I (v_1 - t_N) < \varepsilon$. Sea ahora $v = v_1 - t_N$ y $u = u_1 - t_N$. Entonces, tanto u como v pertenecen a $U(I)$ y $u - v = u_1 - v_1 = f$. Además, v es no negativa *c.e.t.* I e $\int_I v < \varepsilon$. Esto prueba (a). Para probar (b) se utiliza (a) para elegir u y v de $U(I)$ tal que $v \geq 0$ *c.e.t.* I,

$$f = u - v \qquad \text{y} \qquad 0 \le \int_I v < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora elegimos una función escalonada s tal que $0 \le \int_I (u - s) < \varepsilon/2$. Entonces

$$f = u - v = s + (u - s) - v = s + g,$$

en donde $g = (u - s) - v$. Luego $g \in L(I)$ y

$$\int_I |g| \le \int_I |u - s| + \int_I |v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

10.8 INTEGRACIÓN DE LEBESGUE Y CONJUNTOS DE MEDIDA CERO

Los teoremas en esta sección dan a conocer que el comportamiento de una función integrable Lebesgue en un conjunto de medida cero no afecta su integral.

Teorema 10.20. *Sea f una función definida en I. Si $f = 0$ casi en todo I, entonces $f \in L(I)$ y $\int_I f = 0$.*

Demostración. Sea $s_n(x) = 0$ para todo x en I. Entonces $\{s_n\}$ es una sucesión creciente de funciones escalonadas convergentes a 0 en todo I. De aquí $\{s_n\}$ converge a f casi en todo I. Puesto que $\int_I s_n = 0$, la sucesión $\{\int_I s_n\}$ converge. Por tanto f es una función superior, así $f \in L(I)$ e $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n = 0$.

Teorema 10.21. *Supongamos f y g definidas en I. Si $f \in L(I)$ y si $f = g$ casi en todo I, entonces $g \in L(I)$ e $\int_I f = \int_I g$.*

Demostración. Aplicando el teorema 10.20 en $f - g$, entonces $f - g \in L(I)$ e $\int_I (f - g) = 0$. En consecuencia, $g = f - (f - g) \in L(I)$ y

$\int_I g = \int_I f - \int_I (f - g) = \int_I f.$

Ejemplo. Definir f en el intervalo $[0, 1]$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Entonces $f = 0$ casi por todo en $[0, 1]$, luego f es integrable de Lebesgue en $[0, 1]$ y su integral de Lebesgue es 0. Como hemos observado en el capítulo 7, esta función no es integrable de Riemann en $[0, 1]$.

NOTA. El teorema 10.21 sugiere una definición de la integral para funciones que están definidas casi por todo en I. Si g es una de esas funciones y si $g(x) = f(x)$ casi por todo en I, donde $f \in L(I)$, decimos que $g \in L(I)$ y que

$$\int_I g = \int_I f.$$

10.9 TEOREMAS DE CONVERGENCIA MONÓTONA DE LEVI

Volvemos ahora a los teoremas de convergencia concernientes a la integración término a término de sucesiones monótonas de funciones Empezamos con tres versiones de un teorema famoso de Beppo Levi. El primero concierne a sucesiones de funciones escalonadas, el segundo a sucesiones de funciones superiores, y el tercero a sucesiones de funciones integrables de Lebesgue. A pesar de que los teoremas los hemos establecido para sucesiones crecientes, existen resultados análogos para sucesiones decrecientes.

Teorema 10.22 (Teorema de Levi para funciones escalonadas). Sea $\{s_n\}$ *una sucesión de funciones escalonadas tal que*

a) $\{s_n\}$ *crece en un intervalo* I,
y
b) $\lim_{n\to\infty} \int_I s_n$ *existe.*

Entonces $\{s_n\}$ *converge casi en todo* I *hacia una función límite* f *perteneciente a* $U(I)$, *y*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n.$$

Demostración. Podemos suponer, sin perder generalidad, que las funciones escalonadas s_n son no negativas. (De no ser así, consideraríamos la sucesión $\{s_n - s_1\}$. Si el teorema es cierto para $\{s_n - s_1\}$, entonces también lo es para $\{s_n\}$.) Sea D el conjunto de los x de I para los que $\{s_n(x)\}$ diverge, y sea $\varepsilon > 0$ un número real dado de antemano. Probaremos que D tiene medida 0 mostrando que D se puede recubrir por medio de una colección numerable de intervalos, cuya suma de longitudes es $< \varepsilon$.

Puesto que la sucesión $\{\int_I s_n\}$ converge, está acotada por alguna constante positiva M. Sea

$$t_n(x) = \left[\frac{\varepsilon}{2M} s_n(x)\right] \quad \text{si } x \in I,$$

en donde $[y]$ designa la parte entera $\leq y$. Entonces $\{t_n\}$ es una sucesión creciente de funciones escalonadas tales que cada uno de los valores $t_n(x)$ es un entero no negativo.

Si $\{s_n(x)\}$ converge, entonces $\{s_n(x)\}$ está acotada, luego $\{t_n(x)\}$ está acotada y entonces $t_{n+1}(x) = t_n(x)$ para n suficientemente grande, puesto que cada $t_n(x)$ es un entero.

Si $\{s_n(x)\}$ diverge, entonces $\{t_n(x)\}$ también diverge y $t_{n+1}(x) - t_n(x) \geq 1$ para infinitos valores de n. Sea

$$D_n = \{x : x \in I \quad \text{y} \quad t_{n+1}(x) - t_n(x) \geq 1\}.$$

Entonces D_n es reunión de un número finito de intervalos, la suma de cuyas longitudes designaremos por $|D_n|$. Ahora

$$D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

y si vemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |D_n| < \varepsilon$, habremos demostrado que D tiene medida 0.

Para ello integramos la función escalonada no negativa $t_{n+1} - t_n$ sobre I y obtenemos las desigualdades

$$\int_I (t_{n+1} - t_n) \geq \int_{D_n} (t_{n+1} - t_n) \geq \int_{D_n} 1 = |D_n|.$$

Luego para cada $m \geq 1$ tenemos

$$\sum_{n=1}^{m} |D_n| \leq \sum_{n=1}^{m} \int_I (t_{n+1} - t_n) = \int_I t_{m+1} - \int_I t_1 \leq \int_I t_{m+1} \leq \frac{\varepsilon}{2M} \int_I s_{m+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por consiguiente $\sum_{n=1}^{\infty} |D_n| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, luego D tiene medida 0.

Esto prueba que $\{s_n\}$ converge casi en todo I. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} s_n(x) & \text{si } x \in I - D, \\ 0 & \text{si } x \in D. \end{cases}$$

Entonces f está definida casi en todo I y $s_n \to f$ casi en todo I. Por consiguiente, $f \in U(I)$ e $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n$.

Teorema 10.23 (Teorema de Levi para funciones superiores). *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones superiores tales que*

a) $\{f_n\}$ *crece casi en todo un cierto intervalo* I,
y
b) $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n$ *existe.*

Entonces $\{f_n\}$ *converge casi en todo* I *hacia una función límite* f *perteneciente a* $U(I)$, *y*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Demostración. Para cada k existe una sucesión creciente de funciones escalonadas $\{s_{n,k}\}$ que genera f_k. Definimos en I una nueva función escalonada t_n en I por medio de la ecuación

$$t_n(x) = \max\{s_{n,1}(x), s_{n,2}(x), \ldots, s_{n,n}(x)\}.$$

Entonces $\{t_n\}$ es creciente en I puesto que

$$\begin{aligned} t_{n+1}(x) &= \max\{s_{n+1,1}(x), \ldots, s_{n+1,n+1}(x)\} \geq \max\{s_{n,1}(x), \ldots, s_{n,n+1}(x)\} \\ &\geq \max\{s_{n,1}(x), \ldots, s_{n,n}(x)\} = t_n(x). \end{aligned}$$

Pero $s_{n,k}(x) \leq f_k(x)$ y $\{f_k\}$ crece casi en todo I, luego se verifica

$$t_n(x) \leq \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} = f_n(x) \tag{10}$$

casi en todo I. Por consiguiente, en virtud del teorema 10.6(c), se obtiene

$$\int_I t_n \leq \int_I f_n. \tag{11}$$

Pero, por (b), $\{\int_I f_n\}$ está acotada superiormente y entonces la sucesión creciente $\{\int_I t_n\}$ también está acotada superiormente y por lo tanto converge. Aplicando ahora el teorema de Levi para las funciones escalonadas, $\{t_n\}$ converge casi en todo I hacia una función límite f perteneciente a $U(I)$, e $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I t_n$. Ahora probaremos que $f_n \to f$ casi en todo I.

La definición de $t_n(x)$ implica $s_{n,k}(x) \leq t_n(x)$ para todo $k \leq n$ y todo x de I. Haciendo que $n \to \infty$ obtenemos

$$f_k(x) \leq f(x) \text{ casi en todo } I. \tag{12}$$

Por consiguiente la sucesión creciente $\{f_k(x)\}$ está acotada superiormente por $f(x)$ casi en todo I, luego converge casi en todo I hacia una función límite g que satisface $g(x) \leq f(x)$ casi en todo I. Pero (10) establece que $t_n(x) \leq f_n(x)$ casi en todo I luego, haciendo $n \to \infty$, obtenemos $f(x) \leq g(x)$ casi en todo I. En otras palabras, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{casi en todo } I.$$

Finalmente, vemos que $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$. Haciendo $n \to \infty$ en (11) obtenemos

$$\int_I f \leq \lim_{n\to\infty} \int_I f_n. \tag{13}$$

Ahora integrando (12) y utilizando de nuevo el teorema 10.6(c), obtenemos $\int_I f_k \leq \int_I f$. Si hacemos $k \to \infty$ obtenemos $\lim_{k\to\infty} \int_I f_k \leq \int_I f$ que, junto con (13), termina la demostración.

NOTA. La clase $U(I)$ de las funciones superiores se construyó a partir de la clase $S(I)$ de las funciones escalonadas por un proceso que podemos llamar P.

El teorema de Beppo Levi nos muestra que si aplicamos el proceso P a $U(I)$ obtenemos funciones de $U(I)$. El teorema que sigue prueba que, si aplicamos el proceso P a $L(I)$, obtenemos funciones de $L(I)$.

Teorema 10.24 (Teorema de Levi para sucesiones de funciones integrables de Lebesgue). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $L(I)$ tal que*

a) *$\{f_n\}$ crece casi en todo I,*
   y
b) *$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n$ existe.*

Entonces $\{f_n\}$ converge casi en todo I hacia una función límite f de $L(I)$ y

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Deduciremos este teorema de un resultado análogo válido para *series* de funciones.

Teorema 10.25 (Teorema de Levi para series de funciones integrables Lebesgue). *Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones de $L(I)$ tal que*

a) *cada g_n es no negativa casi en todo I,*
   y
b) *la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n$ converge.*

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge casi en todo I hacia una función suma g de $L(I)$, y tenemos

$$\int_I g = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n. \tag{14}$$

Demostración. Puesto que $g_n \in L(I)$, el teorema 10.19 nos dice que para cada $\varepsilon > 0$ podemos escribir

$$g_n = u_n - v_n,$$

en donde $u_n \in U(I), v_n \in U(I), v_n \geq 0$, *c.e.t.* I e $\int_I v_n < \varepsilon$. Elegimos u_n y v_n correspondientes a $\varepsilon = (\frac{1}{2})^n$. Entonces

$$u_n = g_n + v_n, \text{ en donde} \int_I v_n < (\tfrac{1}{2})^n.$$

La desigualdad que verifica $\int_I v_n$ nos asegura que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I v_n$ converge. Ahora bien $u_n \geq 0$ casi en todo I, luego las sumas parciales

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

forman una sucesión de funciones superiores $\{U_n\}$ que crece casi en todo I. Puesto que

$$\int_I U_n = \int_I \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \int_I u_k = \sum_{k=1}^{n} \int_I g_k + \sum_{k=1}^{n} \int_I v_k,$$

la sucesión de integrales $\{\int_I U_n\}$ converge, ya que tanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \int_I g_k$ como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \int_I v_k$ convergen. Por consiguiente, aplicando el teorema de Levi para funciones superiores, la sucesión $\{U_n\}$ converge casi en todo I hacia una función límite U de $U(I)$, e $\int_I U = \lim_{n\to\infty} \int_I U_n$. Pero

$$\int_I U_n = \sum_{k=1}^{n} \int_I u_k,$$

luego

$$\int_I U = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I u_k.$$

Análogamente, la sucesión de sumas parciales $\{V_n\}$ dadas por

$$V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)$$

converge casi en todo I hacia una función límite V de $U(I)$ e

$$\int_I V = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I v_k.$$

Por consiguiente $U - V \in L(I)$ y la sucesión $\{\sum_{k=1}^{n} g_k\} = \{U_n - V_n\}$ converge casi en todo I hacia $U - V$. Sea $g = U - V$. Entonces $g \in L(I)$ e

$$\int_I g = \int_I U - \int_I V = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I (u_k - v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I g_k.$$

Esto termina la demostración del teorema 10.25.

Demostración del teorema 10.24. Supongamos que $\{f_n\}$ satisface las hipótesis del teorema 10.24. Sea $g_1 = f_1$ y sea $g_n = f_n - f_{n-1}$ para $n \geq 2$, entonces

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k.$$

Aplicando el teorema 10.25 a $\{g_n\}$, obtenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge casi en todo I hacia una función suma g de $L(I)$, y se verifica la ecuación (14). Por consiguiente $f_n \to g$ casi en todo I e $\int_I g = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

En la siguiente versión del teorema de Levi para series, no es necesario suponer que los términos de la serie sean no negativos.

Teorema 10.26. *Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones de $L(I)$ tal que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_I |g_n|$$

es convergente. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge casi en todo I hacia una función g de $L(I)$ y se tiene

$$\int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n.$$

Demostración. Hagamos $g_n = g_n^+ - g_n^-$ y apliquemos el teorema 10.25 a las sucesiones $\{g_n^+\}$ y $\{g_n^-\}$ por separado.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso del teorema de Levi para sucesiones.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = x^s$ para $x > 0$, $f(0) = 0$. Probar que la integral de Lebesgue $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe y vale $1/(s+1)$ si $s > -1$.

Solución. Si $s \geq 0$, entonces f está acotada y es integrable de Riemann en $[0, 1]$ y su integral de Riemann es igual a $1/(s+1)$.

Si $s < 0$, entonces f no está acotada y por lo tanto no es integrable de Riemann en $[0, 1]$. Definimos una sucesión de funciones $\{f_n\}$ como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^s & \text{si } x \geq 1/n, \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1/n. \end{cases}$$

Entonces $\{f_n\}$ es creciente y $f_n \to f$ en todo $[0, 1]$. Cada f_n es integrable de Riemann y por lo tanto integrable Lebesgue en $[0, 1]$ y

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_{1/n}^1 x^s\,dx = \frac{1}{s+1}\left(1 - \frac{1}{n^{s+1}}\right).$$

Si $s + 1 > 0$, la sucesión $\{\int_0^1 f_n\}$ converge hacia $1/(s + 1)$. Por consiguiente, el teorema de Levi para sucesiones prueba que $\int_0^1 f$ existe y es igual a $1/(s + 1)$.

Ejemplo 2. El mismo tipo de argumento prueba que la integral de Lebesgue $\int_0^1 e^{-x}x^{y-1}\,dx$ existe para cada número real $y > 0$. Esta integral la utilizaremos más adelante para discutir la función Gamma.

10.10 TEOREMA DE CONVERGENCIA DOMINADA DE LEBESGUE

Los teoremas de Levi dan lugar a muchas consecuencias importantes. La primera consecuencia es el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, piedra angular de la teoría de la integración de Lebesgue.

Teorema 10.27 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables de Lebesgue en un intervalo I. Supongamos que*

a) *$\{f_n\}$ converge casi en todo I hacia una función límite f,*
y
b) *existe una función no negativa g de $L(I)$ tal que, para todo $n \geq 1$,*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{c.e.t. } I.$$

Entonces la función límite $f \in L(I)$, la sucesión $\{\int_I f_n\}$ converge e

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n. \tag{15}$$

NOTA. La propiedad (b) se enuncia diciendo que la sucesión $\{f_n\}$ está *dominada* por g casi en todo I.

Demostración. La idea de la demostración consiste en obtener cotas superiores e inferiores de la forma

$$g_n(x) \leq f_n(x) \leq G_n(x) \tag{16}$$

en donde $\{g_n\}$ crece y $\{G_n\}$ decrece casi en todo I hacia la función límite f. Utilizaremos el teorema de Levi para demostrar que $f \in L(I)$ y que $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n = \lim_{n\to\infty} \int_I G_n$, de lo que se deduce (15).

Para construir $\{g_n\}$ y $\{G_n\}$, hacemos uso repetido del teorema de Levi para sucesiones de $L(I)$. Ante todo definimos una sucesión $\{G_{n,1}\}$ como sigue:

$$G_{n,1}(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}.$$

Cada función $G_{n,1} \in L(I)$ en virtud del teorema 10.16, y la sucesión $\{G_{n,1}\}$ es creciente en I. Dado que $|G_{n,1}(x)| \leq g(x)$ casi en todo I, tenemos

$$\left|\int_I G_{n,1}\right| \leq \int_I |G_{n,1}| \leq \int_I g. \tag{17}$$

Por consiguiente la sucesión creciente de números $\{\int_I G_{n,1}\}$ está acotada superiormente por $\int_I g$, luego $\lim_{n\to\infty} \int_I G_{n,1}$ existe. Aplicando el teorema de Levi, la sucesión $\{G_{n,1}\}$ converge casi en todo I hacia una función G_1 de $L(I)$, e

$$\int_I G_1 = \lim_{n\to\infty} \int_I G_{n,1} \leq \int_I g.$$

En virtud de (17) tenemos también la desigualdad $-\int_I g \leq \int_I G_1$. Obsérvese que si x es un punto de I para el que $G_{n,1}(x) \to G_1(x)$, entonces tenemos también

$$G_1(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), \ldots\}.$$

Asimismo, para cada $r \geq 1$ consideramos

$$G_{n,r}(x) = \max\{f_r(x), f_{r+1}(x), \ldots, f_n(x)\}$$

para $n \geq r$. Entonces la sucesión $\{G_{n,r}\}$ crece y converge casi en todo I hacia una función límite G_r de $L(I)$ con

$$-\int_I g \leq \int_I G_r \leq \int_I g.$$

Además, en todos los puntos en los que $G_{n,r}(x) \to G_r(x)$, tenemos

$$G_r(x) = \sup\{f_r(x), f_{r+1}(x), \ldots\},$$

luego

$$f_r(x) \leq G_r(x) \quad \text{c.e.t. } I.$$

Examinemos ahora las propiedades de la sucesión $\{G_n(x)\}$. Ya que $A \subseteq B$ implica $\sup A \leq \sup B$, la sucesión $\{G_r(x)\}$ decrece casi en todo y por tanto converge casi en todo I. A continuación vemos que $G_n(x) \to f(x)$ siempre que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x). \tag{18}$$

Si se verifica (18), entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N$$

Luego, si $m \geq N$ tenemos

$$f(x) - \varepsilon \leq \sup \{f_m(x), f_{m+1}(x), \dots\} \leq f(x) + \varepsilon.$$

En otras palabras,

$$m \geq N \text{ implica} \qquad f(x) - \varepsilon \leq G_m(x) \leq f(x) + \varepsilon,$$

y esto implica que

$$\lim_{m\to\infty} G_m(x) = f(x), \quad \text{casi en todo } I. \tag{19}$$

Por otro lado, la sucesión numérica decreciente $\{\int_I G_n\}$ está acotada inferiormente por $-\int_I g$, luego converge. Por (19) y por el teorema de Levi, vemos que $f \in L(I)$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I G_n = \int_I f.$$

Si aplicamos el mismo tipo de argumentación a la sucesión

$$g_{n,r}(x) = \min \{f_r(x), f_{r+1}(x), \dots, f_n(x)\},$$

para $n \geq r$, obtenemos que $\{g_{n,r}\}$ decrece y converge casi en todo hacia una función límite g_r de $L(I)$, en donde

$$g_r(x) = \inf \{f_r(x), f_{r+1}(x), \dots\} \quad \textit{c.e.t. } I.$$

Además, casi en todo I tenemos $g_r(x) \leq f_r(x)$, $\{g_r\}$ crece, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$, y

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g_n = \int_I f.$$

Puesto que (16) se verifica casi en todo I, tenemos $\int_I g_n \leq \int_I f_n \leq \int_I G_n$. Si hacemos que $n \to \infty$ tendremos que $\{\int_I f_n\}$ converge y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

10.11 APLICACIONES DEL TEOREMA DE CONVERGENCIA DOMINADA DE LEBESGUE

La primera aplicación concierne a la integración término a término de series y es un resultado parecido al teorema de Levi para series.

Teorema 10.28. *Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones de $L(I)$ tal que:*
a) *cada g_n es no negativa casi en todo I,*
y
b) *la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge casi en todo I hacia una función g acotada superiormente por una función de $L(I)$.*

Entonces $g \in L(I)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n$ converge, y se tiene que

$$\int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n.$$

Demostración. Sea

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \qquad \text{si } x \in I.$$

Entonces $f_n \nearrow g$ casi en todo I, y $\{f_n\}$ está dominada casi en todo I por la función de $L(I)$ que acota superiormente a la función g. Por consiguiente, aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, $g \in L(I)$, la sucesión $\{\int_I f_n\}$ converge, e $\int_I g = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$. Esto prueba el teorema.

La siguiente aplicación, llamada a veces el *teorema de convergencia acotada de Lebesgue*, se refiere a un intervalo acotado.

Teorema 10.29. *Sea I un intervalo acotado. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones de $L(I)$ que es acotadamente convergente casi en todo I. Esto es, supongamos que admite una función límite f y una constante positiva M tales que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad y \qquad |f_n(x)| \leq M, \qquad \textit{casi en todo } I.$$

Entonces $f \in L(I)$ y $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Demostración. Aplíquese el teorema 10.27 con $g(x) = M$ para todo x de I. Entonces $g \in L(I)$, puesto que I es un intervalo acotado.

NOTA. Un caso particular del teorema 10.29 es el teorema de Arzelà establecido ya anteriormente (teorema 9.12). Si $\{f_n\}$ es una sucesión acotadamente convergente de funciones integrables de Riemann sobre un intervalo compacto $[a, b]$, entonces cada $f_n \in L([a, b])$, la función límite $f \in L([a, b])$, y se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Si la función límite f es integrable de Riemann (tal como se supone en el teorema de Arzelà), entonces la integral de Lebesgue $\int_a^b f$ coincide con la integral de Riemann $\int_a^b f(x)\, dx$.

El próximo teorema es útil, a veces, para comprobar qué funciones son integrables de Lebesgue

Teorema 10.30. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $L(I)$ que converge casi en todo I hacia una función límite f. Supongamos que existe una función no negativa g de $L(I)$ tal que*

$$|f(x)| \leq g(x) \qquad \text{c.e.t. } I.$$

Entonces $f \in L(I)$.

Demostración. Se define una nueva sucesión de funciones $\{g_n\}$ en I como sigue:

$$g_n = \max\{\min(f_n, g), -g\}.$$

Geométricamente la función g_n se obtiene a partir de la función f_n cortándole la parte de la gráfica que se halla por encima de g y la que se halla por debajo de $-g$, como muestra el ejemplo de la figura 10.2.

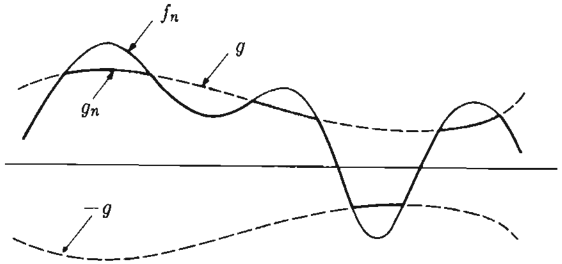


Figura 10.2

Entonces $|g_n(x)| \leq g(x)$ casi en todo I, y es fácil verificar que $g_n \to f$ casi en todo I. Por consiguiente, en virtud del teorema de convergencia dominada de Lebesgue, $f \in L(I)$.

10.12 INTEGRALES DE LEBESGUE SOBRE INTERVALOS NO ACOTADOS COMO LÍMITE DE INTEGRALES SOBRE INTERVALOS ACOTADOS

Teorema 10.31. *Sea f una función definida en el semiintervalo infinito $I = [a, +\infty)$. Supongamos que f es integrable de Lebesgue en el intervalo compacto $[a, b]$ para cada $b \geq a$, y que existe una constante positiva M tal que*

$$\int_a^b |f| \leq M \qquad \text{para todo } b \geq a. \tag{20}$$

Entonces $f \in L(I)$, el límite $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f$ existe, y

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f. \tag{21}$$

Demostración. Sea $\{b_n\}$ una sucesión creciente de números reales con $b_n \geq a$ tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Definimos una sucesión $\{f_n\}$ en I como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } a \leq x \leq b_n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cada $f_n \in L(I)$ (en virtud del teorema 10.18) y $f_n \to f$ en I. Luego $|f_n| \to |f|$ en I. Pero $|f_n|$ es creciente y, por (20), la sucesión $\{\int_I |f_n|\}$ está acotada superiormente por M. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \int_I |f_n|$ existe. Por el teorema de Levi, la función límite $|f| \in L(I)$. Ahora bien, cada $|f_n| \leq |f|$ y $f_n \to f$ en I, y entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, $f \in L(I)$ y $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f$. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f = \int_a^{+\infty} f$$

para todas las sucesiones $\{b_n\}$ que crecen hacia $+\infty$. Esto termina la demostración.

Existe, además, un teorema análogo para el intervalo $(-\infty, a]$ que afirma que

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f,$$

en el supuesto de que $\int_c^a |f| \le M$ para todo $c \le a$. Si $\int_c^b |f| \le M$ para todo par de números reales c y b con $c \le b$, los dos teoremas aplicados a la vez demuestran que $f \in L(\mathbf{R})$ y que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{c \to -\infty} \int_c^a f + \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f.$$

Ejemplo 1. Sea $f(x) = 1/(1 + x^2)$ para todo x de $\mathbf{R}$. Probaremos que $f \in L(\mathbf{R})$ y que $\int_{\mathbf{R}} f = \pi$. Ahora f es no negativa y si $c \le b$, tenemos

$$\int_c^b f = \int_c^b \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg } b - \text{arc tg } c \le \pi.$$

Por consiguiente, $f \in L(\mathbf{R})$ y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{c \to -\infty} \int_c^0 \frac{dx}{1 + x^2} + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ejemplo 2. En este ejemplo el límite por la derecha de (21) existe pero $f \notin L(I)$. Sea $I = [0, +\infty]$ y definimos f en I como sigue:

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{if } n - 1 \le x < n, \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

Si $b > 0$, sea $m = [b]$ el mayor entero $\le b$. Entonces

$$\int_0^b f = \int_0^m f + \int_m^b f = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(b - m)(-1)^{m+1}}{m + 1}.$$

Puesto que $b \to +\infty$ el último término tiende a 0, y obtenemos

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

Ahora suponemos que $f \in L(I)$ y obtenemos una contradicción. Sea f_n definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{para } 0 \le x \le n, \\ 0 & \text{para } x > n. \end{cases}$$

Entonces $\{f_n\}$ crece y $f_n(x) \to |f(x)|$ en I. Ya que $f \in L(I)$ tenemos también $|f| \in L(I)$. Pero $|f_n(x)| \le |f(x)|$ en I y, en virtud del teorema de convergencia dominada de Lebesgue, la sucesión $\{\int_I f_n\}$ converge. Pero esto es una contradicción, ya que

$$\int_I f_n = \int_0^n |f| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

10.13 INTEGRALES DE RIEMANN IMPROPIAS

Definición 10.32. *Si f es integrable de Riemann en $[a, b]$ para cada $b \ge a$, y si el límite*

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx \quad \textit{existe,}$$

entonces se dice que f es integrable de Riemann en sentido impropio en $[a, +\infty)$ y la integral impropia de Riemann de f, designada por $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ o $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$, se define por la ecuación

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx.$$

En el ejemplo 2 de la sección anterior, la integral impropia de Riemann $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ existe pero en cambio f no es integrable de Lebesgue en $[0, +\infty]$. Este ejemplo se puede contrastar con el siguiente teorema.

Teorema 10.33. *Supongamos que f es integrable de Riemann en $[a, b]$ para cada $b \ge a$, y supongamos que existe una constante positiva M tal que*

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \le M \qquad \textit{para cada } b \ge a. \tag{22}$$

Entonces tanto f como $|f|$ son funciones integrables de Riemann en $[a, +\infty)$ en sentido impropio. Además, f es integrable de Lebesgue en $[a, +\infty)$ y la integral de Lebesgue de f es igual a la integral impropia de Riemann de f.

Demostración. Sea $F(b) = \int_a^b |f(x)|\, dx$. Entonces F es una función creciente acotada superiormente por M, luego $\lim_{b \to +\infty} F(b)$ existe. Por consiguiente $|f|$ es integrable Riemann en sentido impropio en $[a, +\infty]$. Puesto que

$$0 \le |f(x)| - f(x) \le 2|f(x)|,$$

el límite

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b \{|f(x)| - f(x)\}\, dx$$

también existe; luego el límite $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ existe. Esto prueba que f es integrable Riemann en sentido impropio en $[a, +\infty]$. Ahora utilizamos la desigualdad (22), junto con el teorema 10.31, para deducir que f es integrable Lebesgue en $[a, +\infty]$ y que la integral de Lebesgue de f es igual a la integral de Riemann de f en sentido impropio.

NOTA. Existen resultados análogos para integrales de Riemann impropias de la forma

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b\to c-}\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{y} \quad \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{a\to c+}\int_a^b f(x)\,dx,$$

que el lector puede formular por sí mismo.

Si existen las integrales $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ y $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, diremos que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe, y su valor se define por la suma,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Si la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe, su valor es también igual al límite simétrico

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx.$$

Sin embargo, es importante observar que el límite simétrico puede existir incluso cuando $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ no existe (por ejemplo, hagamos $f(x) = x$ para todo x). En este caso el límite simétrico se llama el *valor principal de Cauchy* de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Luego $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ tiene valor principal de Cauchy 0, y en cambio la integral no existe.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = e^{-x}x^{y-1}$, en donde y es un número real fijo. Dado que $e^{-x/2}x^{y-1} \to 0$ cuando $x \to +\infty$, existe una constante M tal que $e^{-x/2}x^{y-1} \leq M$ para todo $x \geq 1$. Entonces $e^{-x}x^{y-1} \leq Me^{-x/2}$, luego

$$\int_1^b |f(x)|\,dx \leq M\int_0^b e^{-x/2}\,dx = 2M(1 - e^{-b/2}) < 2M.$$

En consecuencia la integral $\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}\,dx$ existe para cada número real y, como integral de Riemann impropia y como integral de Lebesgue.

Ejemplo 2. *La función integral Gamma.* Si a la integral del ejemplo 1 le añadimos la integral $\int_0^1 e^{-x}x^{y-1}\,dx$ del ejemplo 2 de la sección 10.9 encontramos que la integral de Lebesgue

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}\,dx$$

existe para cada número real $y > 0$. La función Γ definida de esta manera se llama la *función Gamma.* En el ejemplo 4 se da su relación con la función zeta de Riemann.

NOTA. Muchos de los teoremas del capítulo 7 correspondientes a las integrales de Riemann se pueden convertir en teoremas sobre integrales de Riemann impropias. A fin de ilustrar el método directo en que alguna de estas extensiones puede realizarse, consideremos la fórmula de integración por partes:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Puesto que b aparece en tres términos de esta ecuación, debemos considerar tres límites cuando $b \to +\infty$. Si dos de estos límites existen, el tercero también existe y se obtiene la fórmula

$$\int_a^\infty f(x)g'(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^\infty g(x)f'(x)\,dx.$$

Otros teoremas acerca de las integrales de Riemann pueden extenderse por el mismo procedimiento a teoremas acerca de integrales de Riemann impropias. Sin embargo, no es preciso dar un desarrollo más detallado de estas extensiones, puesto que en cada caso particular, basta aplicar el teorema requerido al intervalo compacto $[a, b]$ y hacer que $b \to +\infty$.

Ejemplo 3. *La ecuación funcional* $\Gamma(y + 1) = y\Gamma(y)$. Si $0 < a < b$, la integración por partes nos proporciona

$$\int_a^b e^{-x}x^y\,dx = a^y e^{-a} - b^y e^{-b} + y\int_a^b e^{-x}x^{y-1}\,dx.$$

Si hacemos que $a \to 0+$ y que $b \to +\infty$, obtenemos $\Gamma(y + 1) = y\Gamma(y)$.

Ejemplo 4. *Representación integral para la función zeta de Riemann.* La función zeta de Riemann ζ se define para $s > 1$ por medio de la ecuación

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Este ejemplo nos demuestra que el teorema de convergencia de Levi para series permite deducir una representación integral,

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx.$$

La integral existe como integral de Lebesgue.

En la integral que define $\Gamma(s)$ podemos efectuar el cambio de variable $t = nx$, $n > 0$, y obtenemos

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt = n^s \int_0^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}\,dx.$$

Luego, si $s > 0$, tenemos

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}\,dx.$$

Si $s > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ converge, por lo que se tiene

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}\,dx,$$

en donde la serie de la derecha es convergente. Dado que el integrando es no negativo, el teorema de convergencia de Levi (teorema 10.25) nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1}$ converge casi en todo hacia una función suma que es integrable Lebesgue en $[0, +\infty]$ y que

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}\,dx.$$

Ahora bien, si $x > 0$, tenemos que $0 < e^{-x} < 1$ y por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1},$$

puesto que la serie es una serie geométrica. Por consiguiente tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}x^{s-1} = \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$$

casi en todo $[0, +\infty)$, de hecho en todo el intervalo $[0, +\infty)$ excepto en el 0, luego

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx.$$

10.14 FUNCIONES MEDIBLES

Toda función f integrable de Lebesgue en un intervalo I es el límite, casi en todo I, de una cierta sucesión de funciones escalonadas. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, la función constante $f = 1$ es un límite de funciones escalonadas sobre la recta real $\mathbf{R}$, pero esta función no está en $L(\mathbf{R})$. Por consiguiente, la clase de funciones que son límites de funciones escalonadas es más amplia que la clase de funciones integrables de Lebesgue. Las funciones de esta clase más amplia se llaman *funciones medibles.*

Definición 10.34. *Una función f definida en I se llama medible en I, y se escribe $f \in M(I)$, si existe una sucesión de funciones escalonadas $\{s_n\}$ en I tal que*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \qquad \textit{casi en todo } I.$$

NOTA. Si f es medible en I entonces es medible en todo subintervalo de I.

Como ya hemos observado, toda función de $L(I)$ es medible en I, pero el recíproco es falso. El teorema que sigue proporciona un recíproco parcial.

Teorema 10.35. *Si $f \in M(I)$ y si $|f(x)| \le g(x)$ casi por todo en I para la función no negativa g de $L(I)$, entonces $f \in L(I)$.*

Demostración. Existe una sucesión de funciones escalonadas $\{s_n\}$ tal que $s_n(x) \to f(x)$ casi por todo en I. Ahora apliquemos el teorema 10.30 para deducir que $f \in L(I)$.

Corolario 1. *Si $f \in M(I)$ y $|f| \in L(I)$, entonces $f \in L(I)$.*

Corolario 2. *Si f es medible y acotada en un intervalo acotado I, entonces $f \in L(I)$.*

Otras propiedades de las funciones medibles las proporciona el siguiente teorema.

Teorema 10.36. *Sea φ una función real continua en $\mathbf{R}^2$. Si $f \in M(I)$ y $g \in M(I)$, definimos h en I por medio de la ecuación*

$$h(x) = \varphi[f(x), g(x)].$$

Entonces $h \in M(I)$. En particular, $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$, máx *(f, g) y* mín *(f, g) pertenecen a $M(I)$. Además, $1/f \in M(I)$ si $f(x) \neq 0$ casi en todo I.*

Demostración. Sean $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ dos sucesiones de funciones escalonadas tales que $s_n \to f$ y $t_n \to g$ casi en todo I. Entonces la función $u_n = \varphi(s_n, t_n)$ es una función escalonada tal que $u_n \to h$ casi en todo I. Luego $h \in M(I)$.

El teorema que sigue prueba que la clase $M(I)$ no crece si se toman límites de funciones de $M(I)$.

Teorema 10.37. *Sea f una función definida en I y supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles en I tal que $f_n(x) \to f(x)$ casi en todo I. Entonces f es medible en I.*

Demostración. Elegimos una función positiva g de $L(I)$, por ejemplo $g(x) = 1/(1 + x^2)$ para todo x de I. Sea

$$F_n(x) = g(x) \frac{f_n(x)}{1 + |f_n(x)|} \qquad \text{para } x \text{ de } I.$$

Entonces

$$F_n(x) \to \frac{g(x)f(x)}{1 + |f(x)|} \qquad \text{casi en todo } I.$$

Sea $F(x) = g(x)f(x)/\{1 + |f(x)|\}$. Dado que cada función F_n es medible en I y que $|F_n(x)| < g(x)$ para todo x, el teorema 10.35 prueba que cada $F_n \in L(I)$. Además, $|F(x)| < g(x)$ para todo x de I, luego, en virtud del teorema 10.30, $F \in L(I)$ y entonces $F \in M(I)$. Ahora tenemos

$$f(x)\{g(x) - |F(x)|\} = f(x)g(x)\left\{1 - \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|}\right\} = \frac{f(x)g(x)}{1 + |f(x)|} = F(x)$$

para todo x de I, luego

$$f(x) = \frac{F(x)}{g(x) - |F(x)|}.$$

Por consiguiente, $f \in M(I)$ ya que cada una de las funciones F, g y $|F|$ pertenecen a $M(I)$ y $g(x) - |F(x)| > 0$ para todo x de I.

NOTA. Existen funciones no medibles, pero el teorema anterior muestra que no es fácil construir un ejemplo. Las operaciones usuales del Análisis aplicadas a funciones medibles, producen funciones medibles. Por consiguiente, cada función que encontremos en la práctica es muy probable que sea medible. (Ver el ejercicio 10.37 para un ejemplo de una función no medible.)

10.15 CONTINUIDAD DE FUNCIONES DEFINIDAS POR MEDIO DE INTEGRALES DE LEBESGUE

Sea f una función real de dos variables definida en un cierto subconjunto de $\mathbf{R}^2$ de la forma $X \times Y$, en donde tanto X como Y son subintervalos arbitrarios de $\mathbf{R}$. Muchas funciones del Análisis son integrales de la forma

$$F(y) = \int_X f(x, y)\, dx.$$

Discutiremos tres teoremas en los que se transmite la continuidad, la diferenciabilidad y la integrabilidad de la función integrando f a la función F. El primer teorema concierne a la continuidad.

Teorema 10.38. *Sean X e Y dos subintervalos de $\mathbf{R}$, y sea f una función definida en $X \times Y$ que satisfaga las siguientes condiciones:*

a) *Para cada punto y de Y, la función f_y definida en X por medio de la ecuación*
$$f_y(x) = f(x, y)$$
es medible en X.

b) *Existe una función no negativa g de $L(X)$ tal que, para cada y de Y,*
$$|f(x, y)| \le g(x) \quad \textit{c.e.t. } X.$$

c) *Para casi todos los x de X, $f(x, y)$ es una función de y continua en Y. Esto es, para cada y de Y, fijo,*
$$\lim_{t \to y} f(x, t) = f(x, y) \quad \textit{casi en todo } X.$$

Entonces la integral de Lebesgue $\int_X f(x, y)\, dx$ existe para cada y de Y, y la función F definida por la ecuación

$$F(y) = \int_X f(x, y)\, dx$$

es continua en Y. Esto es, si $y \in Y$ tenemos

$$\lim_{t \to y} \int_X f(x, t)\, dx = \int_X \lim_{t \to y} f(x, t)\, dx.$$

Demostración. Dado que f_y es medible en X y dominada casi en todo X por una función no negativa g de $L(X)$, el teorema 10.35 prueba que $f_y \in L(X)$. En otras palabras, la integral de Lebesgue $\int_X f(x, y)\, dx$ existe para cada y de Y.

Ahora elegimos un punto fijo y de Y y sea $\{y_n\}$ una sucesión de puntos de Y tal que $\lim y_n = y$. Probaremos que $\lim F(y_n) = F(y)$. Sea $G_n(x) = f(x, y_n)$. Cada $G_n \in L(X)$ y (c) prueba que $G_n(x) \to f(x, y)$ casi en todo X. Obsérvese que $F(y_n) = \int_X G_n(x)\, dx$. Dado que (b) se verifica, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue prueba que la sucesión $\{F(y_n)\}$ converge y que

$$\lim_{n \to \infty} F(y_n) = \int_X f(x, y)\, dx = F(y).$$

Ejemplo 1. *Continuidad de la función Gamma* $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}\,dx$ *para* $y > 0$. Aplicamos el teorema 10.38 con $X = [0, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$. Para cada $y > 0$ el integrando, considerado como función de x, es continuo (por tanto medible) casi en todo X, luego (a) se verifica. Para cada x fijo > 0, el integrando, considerado como función de y, es continuo en Y, luego (c) se verifica. Finalmente, verificamos (b), no en Y sino en cada subintervalo compacto $[a, b]$, en donde $0 < a < b$. Para cada y de $[a, b]$ el integrando está dominado por la función

$$g(x) = \begin{cases} x^{a-1} & \text{si } 0 < x \le 1, \\ Me^{-x/2} & \text{si } x \ge 1, \end{cases}$$

en donde M es una cierta constante positiva. Esta función g es integrable Lebesgue en X, en virtud del teorema 10.18, luego por el teorema 10.38 sabemos que Γ es continua en $[a, b]$. Pero esto es cierto para todo subintervalo $[a, b]$, por lo tanto Γ es continua en $Y = (0, +\infty)$.

Ejemplo 2. *Continuidad de*

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

para $y > 0$. En este ejemplo se presupone que el cociente $(\operatorname{sen} x)/x$ ha de remplazarse por 1 cuando $x = 0$. Sea $X = [0, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$. Las condiciones (a) y (c) del teorema 10.38 se satisfacen. Como en el ejemplo 1, verificamos (b) en cada uno de los subintervalos $Y_a = [a, +\infty)$, $a > 0$. Dado que $|(\operatorname{sen} x)/x| \le 1$, el integrando está dominado en Y_a por la función

$$g(x) = e^{-ax} \qquad \text{para } x \ge 0.$$

Como g es integrable de Lebesgue en X, F es continua en Y_a para cada $a > 0$; luego F es continua en $Y = (0, +\infty)$.

A fin de ilustrar otro uso del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue probaremos que $F(y) \to 0$ cuando $y \to +\infty$.

Sea $\{y_n\}$ una sucesión creciente de números reales tales que $y_n \ge 1$ e $y_n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$. Probaremos que $F(y_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sea

$$f_n(x) = e^{-xy_n}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad \text{para } x \ge 0.$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ casi en todo $[0, +\infty]$; de hecho, para todo x salvo en 0. Ahora

$$y_n \ge 1 \quad \text{implica} \quad |f_n(x)| \le e^{-x} \qquad \text{para todo } x \ge 0.$$

Por consiguiente, cada f_n es integrable de Riemann en $[0, b]$ para cada $b > 0$ y

$$\int_0^b |f_n| \le \int_0^b e^{-x}\,dx < 1.$$

Luego, por el teorema 10.33, f_n es integrable de Lebesgue en $[0, +\infty]$. Puesto que la sucesión $\{f_n\}$ está dominada por la función $g(x) = e^{-x}$ que es integrable de Lebesgue en $[0, +\infty]$, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue nos dice que la sucesión $\{\int_0^{+\infty} f_n\}$ converge y que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty} f_n = 0.$$

Pero $\int_0^{+\infty} f_n = F(y_n)$, luego $F(y_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces, $F(y) \to 0$ cuando $y \to +\infty$.

NOTA. En gran parte de lo que sigue, tendremos ocasión de tratar con integrales que contengan el cociente $(\operatorname{sen} x)/x$. Tendremos siempre presente que este cociente debe reemplazarse por 1 cuando $x = 0$. Análogamente, un cociente de la forma $(\operatorname{sen} xy)/x$ se debe reemplazar por y, que es el valor de su límite cuando $x \to 0$. Generalizando, si tratamos con integrandos con discontinuidades evitables en ciertos puntos aislados del intervalo de integración, podremos «evitar» estas discontinuidades volviendo a definir convenientemente el integrando en estos puntos excepcionales. En los puntos en los que el integrando no está definido, asignamos al integrando el valor 0.

10.16 DIFERENCIACIÓN BAJO SIGNO DE INTEGRAL

Teorema 10.39. *Sean X e Y dos subintervalos de $\mathbf{R}$, y sea f una función definida en $X \times Y$ que satisfaga las siguientes condiciones:*

a) *Para cada y fijo de Y, la función f_y definida en X por medio de la ecuación $f_y(x) = f(x, y)$ es medible en X, y $f_a \in L(X)$ para un a de Y.*
b) *La derivada parcial $D_2 f(x, y)$ existe para cada punto (x, y) del interior de $X \times Y$.*
c) *Existe una función no negativa G de $L(X)$ tal que*

$$|D_2 f(x, y)| \le G(x) \quad \textit{para todos los puntos interiores de } X \times Y.$$

Entonces la integral de Lebesgue $\int_X f(x, y)\,dx$ existe para cada y de Y, y la función F definida por medio de

$$F(y) = \int_X f(x, y)\,dx$$

es diferenciable en cada punto interior de Y. Además, su derivada viene dada por la fórmula

$$F'(y) = \int_X D_2 f(x, y)\,dx.$$

NOTA. La derivada $F'(y)$ se ha obtenido por *diferenciación bajo el signo de integral.*

Demostración. Primeramente establecemos la desigualdad

$$|f_y(x)| \leq |f_a(x)| + |y - a|\, G(x), \tag{23}$$

para todo punto (x, y) del interior de $X \times Y$. El teorema del valor medio nos da

$$f(x, y) - f(x, a) = (y - a)\, D_2 f(x, c),$$

en donde c está entre a e y. Puesto que $|D_2 f(x, c)| \leq G(x)$, esto implica

$$|f(x, y)| \leq |f(x, a)| + |y - a|\, G(x),$$

que prueba (23). Al ser f_y medible en X y dominada casi en todo X por una función no negativa de $L(X)$, el teorema 10.35 prueba que $f_y \in L(X)$. En otras palabras, la integral $\int_X f(x, y)\, dx$ existe para cada y de Y.

Ahora elegimos una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de Y tal que cada $y_n \neq y$ pero $\lim y_n = y$. Definimos una sucesión de funciones $\{q_n\}$ en X por medio de la ecuación

$$q_n(x) = \frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}.$$

Entonces $q_n \in L(X)$ y $q_n(x) \to D_2 f(x, y)$ en cada punto interior de X. Por el teorema del valor medio tenemos $q_n(x) = D_2 f(x, c_n)$, en donde c_n está comprendido entre y_n e y. Luego, por (c), tenemos $|q_n(x)| \leq G(x)$ casi en todo X. El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue prueba que la sucesión $\{\int_X q_n\}$ converge, que la integral $\int_X D_2 f(x, y)\, dx$ existe, y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X q_n = \int_X \lim_{n\to\infty} q_n = \int_X D_2 f(x, y)\, dx.$$

Pero

$$\int_X q_n = \frac{1}{y_n - y} \int_X \{f(x, y_n) - f(x, y)\}\, dx = \frac{F(y_n) - F(y)}{y_n - y}.$$

Dado que este último cociente tiende hacia un límite para todas las sucesiones $\{y_n\}$, se sigue que $F'(y)$ existe y que

$$F'(y) = \lim_{n\to\infty} \int_X q_n = \int_X D_2 f(x, y)\, dx.$$

Ejemplo 1. *Derivada de la función Gamma.* La derivada $\Gamma'(y)$ existe para cada $y > 0$ y viene dada por la integral

$$\Gamma'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} \ln x\, dx,$$

obtenida diferenciando la integral $\Gamma(y)$ bajo el signo de integral. Es una consecuencia del teorema 10.39 porque para cada y de $[a, b]$, $0 < a < b$, la derivada parcial $D_2(e^{-x}x^{y-1})$ está dominada *c.e.t.* por una función g que es integrable en $[0, +\infty)$. De hecho,

$$D_2(e^{-x}x^{y-1}) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x}x^{y-1}) = e^{-x}x^{y-1}\log x \qquad \text{si } x > 0,$$

luego si $y \geq a$, la derivada parcial está dominada (excepto en el 0) por la función

$$g(x) = \begin{cases} x^{a-1}|\log x| & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ Me^{-x/2} & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

en donde M es una constante positiva. El lector puede verificar fácilmente que g es integrable de Lebesgue en $[0, +\infty)$.

Ejemplo 2. *Evaluación de la integral*

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$$

Aplicando el teorema 10.39, obtenemos

$$F'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} \operatorname{sen} x\, dx, \qquad \text{si } y > 0.$$

(Como en el ejemplo 1, probamos el resultado en cada intervalo $Y_a = [a, +\infty)$, $a > 0$.) En este ejemplo, la integral de Riemann $\int_0^b e^{-xy} \operatorname{sen} x\, dx$ se puede calcular utilizando métodos del Cálculo elemental (utilizando la integración por partes dos veces). Ello nos da

$$\int_0^b e^{-xy} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{e^{-by}(-y \operatorname{sen} b - \cos b)}{1 + y^2} + \frac{1}{1 + y^2} \tag{24}$$

para todo número real y. Hacemos $b \to +\infty$ y obtenemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{1 + y^2} \qquad \text{si } y > 0.$$

Por consiguiente $F'(y) = -1/(1 + y^2)$ si $y > 0$. Integrando esta ecuación obtenemos

$$F(y) - F(b) = -\int_b^y \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} y, \qquad \text{para } y > 0,\ b > 0.$$

Ahora sea $b \to +\infty$. Entonces arc tg $b \to \pi/2$ y $F(b) \to 0$ (ver ejemplo 2, sección 10.15), luego $F(y) = \pi/2 - \text{arc tg } y$. En otras palabras, tenemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } y \qquad \text{si } y > 0. \tag{25}$$

Esta ecuación es asimismo válida si $y = 0$. Esto es, tenemos la fórmula

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{26}$$

Sin embargo, no podemos deducir esto en el caso $y = 0$ en (25), puesto que no hemos demostrado que F sea continua en 0. De hecho, la integral de (26) existe como una integral de Riemann impropia. No existe como una integral de Lebesgue. (Ver ejercicio 10.9.)

Ejemplo 3. *Demostración de la fórmula*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Sea $\{g_n\}$ la sucesión de funciones definida para todo número real y por medio de la ecuación

$$g_n(y) = \int_0^n e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx. \tag{27}$$

Primeramente observemos que $g_n(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ ya que

$$|g_n(n)| \le \int_0^n e^{-xn}\, dx = \frac{1}{n}\int_0^{n^2} e^{-t}\, dt < \frac{1}{n}.$$

Ahora diferenciamos (27) y utilizamos (24) para obtener

$$g_n'(y) = -\int_0^n e^{-xy} \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{e^{-ny}(-y \operatorname{sen} n - \cos n) + 1}{1 + y^2},$$

que es una ecuación válida para todo número real y. Esto prueba que $g'_n(y) \to -1/(1 + y^2)$ para todo y y que

$$|g_n'(y)| \le \frac{e^{-y}(y + 1) + 1}{1 + y^2} \qquad \text{para todo } y \ge 0.$$

Por consiguiente, la función f_n definida por

$$f_n(y) = \begin{cases} g_n'(y) & \text{si } 0 \le y \le n, \\ 0 & \text{si } y > n. \end{cases}$$

es integrable de Lebesgue en $[0, +\infty)$ y está dominada por la función no negativa

$$g(y) = \frac{e^{-y}(y + 1) + 1}{1 + y^2}.$$

Además, g es integrable de Lebesgue en $[0, +\infty)$. Dado que $f_n(y) \to -1/(1 + y^2)$ en $[0, +\infty)$, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n = -\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Pero tenemos

$$\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^n g_n'(y)\, dy = g_n(n) - g_n(0).$$

Haciendo que $n \to \infty$, hallamos que $g_n(0) \to \pi/2$.

Ahora si $b > 0$ y si $n = [b]$, tenemos

$$\int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_0^n \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx + \int_n^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = g_n(0) + \int_n^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$$

Puesto que

$$0 \le \left|\int_n^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx\right| \le \int_n^b \frac{1}{n}\, dx = \frac{b - n}{n} \le \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{cuando } b \to +\infty,$$

tenemos

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} g_n(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Esta fórmula nos será de gran utilidad en el capítulo 11 al estudiar las series de Fourier.

10.17 INTERCAMBIO EN EL ORDEN DE INTEGRACIÓN

Teorema 10.40. *Sean X e Y dos subintervalos de* $\mathbf{R}$, *y sea k una función definida, continua y acotada en $X \times Y$, sea pues*

$$|k(x, y)| \le M \qquad \text{para todo } (x, y) \text{ de } X \times Y.$$

Supongamos que $f \in L(X)$ y $g \in L(Y)$. Entonces tenemos:

a) *Para cada y de Y, la integral de Lebesgue $\int_X f(x)k(x, y)\, dx$ existe, y la función F definida en Y, por medio de la ecuación*

$$F(y) = \int_X f(x)k(x, y)\, dx$$

es continua en Y.

b) *Para cada x de X, la integral de Lebesgue $\int_Y g(y)k(x, y)\,dy$ existe, y la función G definida en X por medio de la ecuación*

$$G(x) = \int_Y g(y)k(x, y)\,dy$$

es continua en X.

c) *Los dos integrales de Lebesgue $\int_Y g(y)F(y)\,dy$ y $\int_X f(x)G(x)\,dx$ existen y son iguales. Esto es*

$$\int_X f(x)\left[\int_Y g(y)k(x, y)\,dy\right] dx = \int_Y g(y)\left[\int_X f(x)k(x, y)\,dx\right] dy. \quad (28)$$

Demostración. Para cada y fijo de Y, sea $f_y(x) = f(x)k(x, y)$. Entonces f_y es medible en X y satisface la desigualdad

$$|f_y(x)| = |f(x)k(x, y)| \le M|f(x)| \quad \text{para todo } x \text{ de } X.$$

Además, dado que k es continua en $X \times Y$ tenemos

$$\lim_{t \to y} f(x)k(x, t) = f(x)k(x, y) \qquad \text{para todo } x \text{ de } X.$$

Por consiguiente, la parte (a) se sigue del teorema 10.38. Un razonamiento análogo prueba la parte (b).

Ahora el producto $f \cdot G$ es medible en X y satisface la desigualdad

$$|f(x)G(x)| \le |f(x)| \int_Y |g(y)|\,|k(x, y)|\,dy \le M'\,|f(x)|,$$

en donde $M' = M \int_Y |g(y)|\,dy$. Por el teorema 10.35 vemos que $f \cdot G \in L(X)$. Un argumento análogo prueba que $g \cdot F \in L(Y)$.

A continuación probamos (28). En primer lugar observamos que (28) es verdadera si f y g son ambas funciones escalonadas. En este caso, tanto f como g se anulan fuera de un intervalo compacto, luego cada una es integrable de Riemann en este intervalo y (28) es consecuencia inmediata del teorema 7.42.

Ahora utilizamos el teorema 10.19(b) para aproximar f y g por medio de funciones escalonadas. Dado $\varepsilon > 0$, existen funciones escalonadas s y t tales que

$$\int_X |f - s| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \int_Y |g - t| < \varepsilon.$$

Por consiguiente tenemos

$$\int_X f \cdot G = \int_X s \cdot G + A_1, \quad (29)$$

en donde

$$|A_1| = \left|\int_X (f - s) \cdot G\right| \le \int_X |f - s| \int_Y |g(y)|\,|k(x, y)|\,dy < \varepsilon M \int_Y |g|.$$

Luego, tenemos

$$G(x) = \int_Y g(y)k(x, y)\,dy = \int_Y t(y)k(x, y)\,dy + A_2,$$

en donde

$$|A_2| = \left|\int_Y (g - t)k(x, y)\,dy\right| \le M \int_Y |g - t| < \varepsilon M.$$

Por consiguiente

$$\int_X s \cdot G = \int_X s(x)\left[\int_Y t(y)k(x, y)\,dy\right] dx + A_3,$$

en donde

$$|A_3| = \left|A_2 \int_X s(x)\,dx\right| \le \varepsilon M \int_X |s|$$

$$\le \varepsilon M \int_X \{|s - f| + |f|\} < \varepsilon^2 M + \varepsilon M \int_X |f|,$$

luego (29) se convierte en

$$\int_X f \cdot G = \int_X s(x)\left[\int_Y t(y)k(x, y)\,dy\right] dx + A_1 + A_3. \quad (30)$$

Análogamente obtenemos

$$\int_Y g \cdot F = \int_Y t(y)\left[\int_X s(x)k(x, y)\,dx\right] dy + B_1 + B_3, \quad (31)$$

en donde

$$|B_1| < \varepsilon M \int_X |f| \qquad \text{y} \qquad |B_3| \le \varepsilon M \int_Y |t| < \varepsilon^2 M + \varepsilon M \int_Y |g|.$$

Pero las integrales reiteradas que aparecen a la derecha de (30) y (31) son iguales, por lo que resulta

$$\left| \int_X f \cdot G - \int_Y g \cdot F \right| \le |A_1| + |A_3| + |B_1| + |B_3|$$
$$< 2\varepsilon^2 M + 2\varepsilon M \left\{ \int_X |f| + \int_Y |g| \right\}.$$

Puesto que esto se verifica para cada $\varepsilon > 0$ tenemos $\int_X f \cdot G = \int_Y g \cdot F$, como pretendíamos.

NOTA. Una versión más general del teorema 10.40 será demostrada en el capítulo 15 utilizando integrales dobles. (Ver teorema 15.6.)

10.18 CONJUNTOS MEDIBLES DE LA RECTA REAL

Definición 10.41. *Dado un conjunto no vacío S de* **R**, *la función χ_S definida por medio de*

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{R} - S, \end{cases}$$

se llama función característica de S. Si S es vacío, definimos $\chi_S(x) = 0$ para todo x.

Teorema 10.42. *Sea* $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$. *Entonces tenemos:*

a) *Si S tiene medida* 0, *entonces $\chi_S \in L(\mathbf{R})$ y $\int_{\mathbf{R}} \chi_S = 0$.*
b) *Si $\chi_S \in L(\mathbf{R})$, y si $\int_{\mathbf{R}} \chi_S = 0$, entonces S tiene medida cero.*

Demostración. La parte (a) se sigue del teorema 10.20, haciendo $f = \chi_S$. Para demostrar (b), sea $f_n = \chi_S$ para todo n. Entonces $|f_n| = \chi_S$ luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} \chi_S = 0.$$

Por el teorema de Levi para sieres absolutamente convergentes, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge en todo **R** salvo en un conjunto T de medida 0. Si $x \in S$, la serie no converge ya que cada uno de sus términos vale 1. Si $x \notin S$, la serie converge puesto que cada término es 0. Luego $T = S$, por lo tanto S tiene medida 0.

Definición 10.43. *Un subconjunto S de* **R** *es medible si su función característica χ_S es medible. Si, además, χ_S es integrable de Lebesgue en* **R**, *entonces la medida $\mu(S)$ del conjunto S se define por la ecuación*

$$\mu(S) = \int_{\mathbf{R}} \chi_S.$$

Si χ_S es medible pero no es integrable de Lebesgue en **R**, *definimos $\mu(S) = +\infty$. La función μ así definida se llama medida de Lebesgue.*

Ejemplos

1. El teorema 10.42 nos muestra que un conjunto S de medida cero es medible y que $\mu(S) = 0$.
2. Todo intervalo I (acotado o sin acotar) es medible. Si I es un intervalo acotado con extremos $a \le b$, entonces $\mu(I) = b - a$. Si I es un intervalo no acotado, entonces $\mu(I) = +\infty$.
3. Si A y B son medibles y $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \le \mu(B)$.

Teorema 10.44. a) *Si S y T son medibles, también lo es $S - T$.*

b) *Si $S_1, S_2, \ldots,$ son medibles también lo son $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ e $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$.*

Demostración. Para probar (a) observemos que la función característica de $S - T$ es $\chi_S - \chi_S \chi_T$. Para probar (b), sea

$$U_n = \bigcup_{i=1}^{n} S_i, \qquad V_n = \bigcap_{i=1}^{n} S_i, \qquad U = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i, \qquad V = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i.$$

Entonces tenemos

$$\chi_{U_n} = \max(\chi_{S_1}, \ldots, \chi_{S_n}) \qquad \text{y} \qquad \chi_{V_n} = \min(\chi_{S_1}, \ldots, \chi_{S_n}),$$

luego cada U_n y V_n es medible. Por lo tanto, también son medibles

$$\chi_U = \lim_{n\to\infty} \chi_{U_n} \ \text{ y } \ \chi_V = \lim_{n\to\infty} \chi_{V_n},$$

y U y V son medibles.

Teorema 10.45. *Si A y B son conjuntos disjuntos medibles, entonces*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{32}$$

Demostración. Sea $S = A \cup B$. Dado que A y B son disjuntos tenemos

$$\chi_S = \chi_A + \chi_B.$$

Supongamos que χ_S es integrable. Puesto que tanto χ_A como χ_B son medibles y satisfacen

$$0 \le \chi_A(x) \le \chi_S(x), \qquad 0 \le \chi_B(x) \le \chi_S(x) \text{ para todo } x,$$

el teorema 10.35 demuestra que tanto χ_A como χ_B son integrables. Por consiguiente

$$\mu(S) = \int_{\mathbf{R}} \chi_S = \int_{\mathbf{R}} \chi_A + \int_{\mathbf{R}} \chi_B = \mu(A) + \mu(B).$$

En este caso, (32) se verifica y ambos miembros son finitos.

Si χ_S no es integrable, entonces una por lo menos de las funciones características χ_A, χ_B no es integrable, por lo que en este caso (32) se verifica siendo ambos miembros infinitos.

El teorema que sigue es una extensión del teorema 10.45 y se demuestra por inducción.

Teorema 10.46. *Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una colección finita de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

NOTA. Esta propiedad se enuncia diciendo que la medida de Lebesgue es *finitamente aditiva.* En el próximo teorema se demuestra que la medida de Lebesgue es *numerable aditiva* (o más corrientemente, *σ-aditiva.*)

Teorema 10.47. *Si $\{A_1, A_2, \ldots\}$ es una colección infinita numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{33}$$

Demostración. Sea $T_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\chi_n = \chi_{T_n}$, $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Puesto que μ es finitamente aditiva, tenemos

$$\mu(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \qquad \text{para cada } n.$$

Debemos probar que $\mu(T_n) \to \mu(T)$ cuando $n \to \infty$. Obsérvese que $\mu(T_n) \le \mu(T_{n+1})$, luego $\{\mu(T_n)\}$ es una sucesión creciente.

Consideremos dos casos. Si $\mu(T)$ es finito, entonces χ_T y cada una de las χ_n son integrables. Además, la sucesión $\{\mu(T_n)\}$ está acotada superiormente por $\mu(T)$, luego converge. Aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, $\mu(T_n) \to \mu(T)$.

Si $\mu(T) = +\infty$, entonces χ_T no es integrable. El teorema 10.24 implica que o bien alguna de las funciones características χ_n no es integrable o bien, si todas ellas lo son, que $\mu(T_n) \to +\infty$. En ambos casos, (33) se verifica con ambos miembros infinitos.

Para posteriores estudios acerca de la teoría de la medida y su relación con la integración, el lector puede consultar las referencias del final de este capítulo.

10.19 LA INTEGRAL DE LEBESGUE EN SUBCONJUNTOS ARBITRARIOS DE R

Definición 10.48. *Sea f una función definida en un subconjunto medible S de $\mathbf{R}$. Definimos una nueva función $\tilde{f}$ en $\mathbf{R}$ como sigue:*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in S, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{R} - S. \end{cases}$$

Si $\tilde{f}$ es integrable de Lebesgue en $\mathbf{R}$, diremos que f es integrable de Lebesgue en S y escribiremos $f \in L(S)$. La integral de f en S se define por medio de la ecuación

$$\int_S f = \int_{\mathbf{R}} \tilde{f}.$$

Esta definición nos da inmediatamente las siguientes propiedades:

Si $f \in L(S)$, entonces $f \in L(T)$ para cada subconjunto medible T de S.
Si S tiene medida finita, entonces $\mu(S) = \int_S 1$.

El teorema que sigue describe una propiedad de aditividad numerable (o σ-aditividad) de la integral de Lebesgue. Su demostración se deja de ejercicio para el lector.

Teorema 10.49. *Sea $\{A_1, A_2, \ldots\}$ una colección infinita numerable de conjuntos medibles de* $\mathbf{R}$, *disjuntos dos a dos, y sea $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Sea f una función definida en S.*

a) *Si $f \in L(S)$, entonces $f \in L(A_i)$ para cada i y*

$$\int_S f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f.$$

b) *Si $f \in L(A_i)$ para cada i y si la serie de* (a) *converge, entonces $f \in L(S)$ y la ecuación de* (a) *se verifica.*

10.20 INTEGRALES DE LEBESGUE DE FUNCIONES COMPLEJAS

Si f es una función compleja definida en un intervalo I, entonces $f = u + iv$, en donde u y v son reales. Se dice que f es integrable de Lebesgue en I si u y v son ambas integrables de Lebesgue en I, y se define

$$\int_I f = \int_I u + i \int_I v.$$

Análogamente, se dice que f es medible en I si u y v son ambas de $M(I)$.

Es fácil comprobar que las sumas y los productos de funciones complejas medibles son también medibles. Además, dado que

$$|f| = (u^2 + v^2)^{1/2},$$

el teorema 10.34 prueba que $|f|$ es medible si f lo es.

Muchos de los teoremas acerca de las integrales de Lebesgue de funciones reales se pueden extender a funciones complejas. Sin embargo, no discutiremos estas extensiones puesto que, en cada caso, suele ser suficinte escribir $f = u+iv$ y aplicar el teorema a u y a v. El único resultado que precisa una formulación explícita es el siguiente.

Teorema 10.50. *Si una función compleja f es integrable de Lebesgue en I, entonces $|f| \in L(I)$ y se tiene*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

Demostración. Escribimos $f = u + iv$. Dado que f es medible y $|f| \leq |u| + |v|$, el teorema 10.35 prueba que $|f| \in L(I)$.

Sea $a = \int_I f$. Entonces $a = re^{i\theta}$, en donde $r = |a|$. Deseamos probar que $r \leq \int_I |f|$. Sea

$$b = \begin{cases} e^{-i\theta} & \text{si } r > 0, \\ 1 & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

Entonces $|b| = 1$ y $r = ba = b \int_I f = \int_I bf$. Ahora escribimos $bf = U+iV$, en donde U y V son reales. Entonces $\int_I bf = \int_I U$, puesto que $\int_I bf$ es real. Entonces

$$r = \int_I bf = \int_I U \leq \int_I |U| \leq \int_I |bf| = \int_I |f|.$$

10.21 PRODUCTOS INTERIORES Y NORMAS

Este capítulo introduce los *productos interiores* y las *normas*, conceptos que juegan un papel importante en la teoría de las series de Fourier que será discutida en el capítulo 11.

Definición 10.51. *Sean f y g dos funciones reales de $L(I)$ cuyo producto $f \cdot g$ esté en $L(I)$. Entonces la integral*

$$\int_I f(x)g(x)\,dx \tag{34}$$

se llama producto interior de f y g, y se designa por medio de (f, g). Si $f^2 \in L(I)$, el número no negativo $(f, f)^{1/2}$, designado por medio de $\|f\|$, se llama L^2-norma de f.

NOTA. La integral de (34) se parece a la suma $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ que define el producto escalar de dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Los valores funcionales $f(x)$ y $g(x)$ que aparecen en (34) juegan el papel de las componentes x_k e y_k y la integración toma el lugar de la suma. La L^2-norma de f es análoga a la longitud de un vector.

El primer teorema da una condición suficiente para que una función de $L(I)$ tenga L^2-norma.

Teorema 10.52. *Si $f \in L(I)$ y si f está acotada casi en todo I, entonces $f^2 \in L(I)$.*

Demostración. Como $f \in L(I)$, f es medible y entonces f^2 es medible en I y satisface la desigualdad $|f(x)|^2 \leq M|f(x)|$ casi en todo I, en donde M es una cota superior de $|f|$. Por el teorema 10.35, $f^2 \in L(I)$.

10.22 EL CONJUNTO $L^2(I)$ DE LAS FUNCIONES DE CUADRADO INTEGRABLE

Definición 10.53. *Designamos por $L^2(I)$ el conjunto de todas las funciones reales f medibles en I tales que $f^2 \in L(I)$. Las funciones de $L^2(I)$ se llaman de cuadrado integrable.*

NOTA. El conjunto $L^2(I)$ no es ni más grande ni más pequeño que $L(I)$. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = x^{-1/2} \qquad \text{para } 0 < x \leq 1,\ f(0) = 0,$$

es una función de $L([0, 1])$ que no está en $L^2([0, 1])$. Análogamente, la función $g(x) = 1/x$ para $x \geq 1$ está en $L^2([1, +\infty))$ y sin embargo no está en $L([1, +\infty))$.

Teorema 10.54. *Si $f \in L^2(I)$ y $g \in L^2(I)$, entonces $f \cdot g \in L(I)$ y $(af+bg) \in L^2(I)$ para cada par de números reales a y b.*

Demostración. Tanto f como g son medibles, luego $f \cdot g \in M(I)$. Pero

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2},$$

luego el teorema 10.35 prueba que $f \cdot g \in L(I)$. Además, $(af + bg) \in M(I)$ y

$$(af + bg)^2 = a^2f^2 + 2abf \cdot g + b^2g^2,$$

y entonces $(af + bg) \in L^2(I)$.

En consecuencia, el producto interior (f, g) está definido para cada par de funciones f y g de $L^2(I)$. Las propiedades básicas de los productos interiores y de las normas se hallan enumeradas en el siguiente teorema.

Teorema 10.55. *Si f, g y h están en $L^2(I)$ y c es un número real, tenemos:*

a) $(f, g) = (g, f)$ *(conmutatividad).*

b) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ *(linealidad).*

c) $(cf, g) = c(f, g)$ *(asociatividad).*

d) $\|cf\| = |c|\ \|f\|$ *(homogeneidad).*

e) $|(f, g)| \leq \|f\|\ \|g\|$ *(desigualdad de Cauchy-Schwarz).*

f) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ *(desigualdad triangular).*

Demostración. Las partes (a) hasta la (d) son consecuencias inmediatas de la definición. Para probar (e), observemos ante todo que $\|f\| = 0$ implica $f = 0$ casi en todo I, en virtud del teorema 10.14(b), en cuyo caso (e) se verifica trivialmente. Supongamos, pues, que $\|f\| > 0$ y que $\|g\| > 0$, y sea $k = af + bg$, en donde a y b son números reales que especificaremos más adelante. Entonces Cuando $a = (g, g)$ y $b = -(f, g)$ la desigualdad nos da

$$\int_I \left[\int_I |f(x)g(y) - g(x)f(y)|^2\, dy\right] dx \geq 0.$$

que implica (e). Para probar (f) utilizamos (e) junto con la relación

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2(f, g).$$

NOTA. La noción de producto interior se puede extender a funciones complejas f tales que $|f| \in L^2(I)$. En este caso, (f, g) se define por medio de la ecuación

$$(f, g) = \int_I f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

en donde la barra designa el complejo conjugado. El conjugado se introduce para que el producto interior de f por sí mismo no sea nunca negativo, o sea que $(f, f) = \int_I |f|^2$. La L^2-norma de f es, como antes, $\|f\| = (f, f)^{1/2}$.

El teorema 10.55 es válido también para funciones complejas, excepto la parte (a), que debe ser modificada, poniendo

$$(f, g) = \overline{(g, f)}. \tag{35}$$

Esto implica el siguiente resultado paralelo al de la parte (b):

$$(f, g + h) = \overline{(g + h, f)} = \overline{(g, f)} + \overline{(h, f)} = (f, g) + (f, h).$$

En las partes (c) y (d) la constante c puede ser compleja. De (c) y de (35) obtenemos

$$(f, cg) = \bar{c}(f, g).$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz (e) y la triangular (f) son válidas también para números complejos.

10.23 EL CONJUNTO $L^2(I)$ COMO ESPACIO SEMIMÉTRICO

Recordemos (definición 3.32) que un espacio métrico es un conjunto T junto con una función no negativa d definida en $T \times T$ que satisface las siguientes propiedades para toda terna de puntos x, y, z de T:

1. $d(x, x) = 0$.
2. $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Intentaremos convertir $L^2(I)$ en un espacio métrico definiendo la distancia $d(f, g)$ entre dos funciones complejas de $L^2(I)$ por medio de la ecuación

$$d(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_I |f - g|^2\right)^{1/2}.$$

Esta función satisface las propiedades 1, 3 y 4, pero no la 2. Si f y g son funciones de $L^2(I)$ que difieren en un conjunto de medida cero, no vacío, entonces $f \neq g$ y en cambio $f - g = 0$ casi en todo I, luego $d(f, g) = 0$.

Una función d que satisface las propiedades 1, 3 y 4, pero no satisface la 2, se llama una *semimétrica*. El conjunto $L^2(I)$, junto con la semimétrica d, se llama un *espacio semimétrico*.

10.24 UN TEOREMA DE CONVERGENCIA PARA SERIES DE FUNCIONES DE $L^2(I)$

El siguiente teorema es análogo al teorema de Levi para series (teorema 10.26).

Teorema 10.56. *Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones de $L^2(I)$ tal que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|$$

sea convergente. Entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge casi en todo I hacia una función g de $L^2(I)$, y se tiene

$$\|g\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} g_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|. \tag{36}$$

Demostración. Sea $M = \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|$. La desigualdad triangular, extendida a sumas finitas, nos da

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} |g_k|\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|g_k\| \leq M.$$

Esto implica

$$\int_I \left(\sum_{k=1}^{n} |g_k(x)|\right)^2 dx = \left\|\sum_{k=1}^{n} |g_k|\right\|^2 \leq M^2. \tag{37}$$

Si $x \in I$, sea

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |g_k(x)|\right)^2.$$

La sucesión $\{f_n\}$ es creciente, cada $f_n \in L(I)$ (ya que $g_k \in L^2(I)$), y (37) prueba que $\int_I f_n \leq M^2$. Por consiguiente la sucesión $\{\int_I f_n\}$ converge. Por el teorema de Levi para sucesiones (teorema 10.24), existe una función f de $L(I)$ tal que $f_n \to f$ casi en todo I, y

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n \leq M^2.$$

Por lo tanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ converge absolutamente casi en todo I. Sea

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$$

en todos los puntos en los que el límite existe, y consideremos

$$G_n(x) = \left|\sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right|^2.$$

Entonces cada $G_n \in L(I)$ y $G_n(x) \to |g(x)|^2$ casi en todo I. Además,

$$G_n(x) \leq f_n(x) \leq f(x) \quad \text{c.e.t. } I.$$

Por consiguiente, en virtud del teorema de convergencia dominada de Lebesgue, $|g|^2 \in L(I)$ e

$$\int_I |g|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_I G_n. \tag{38}$$

Como g_n es medible, esto demuestra que $g \in L^2(I)$. También tenemos

$$\int_I G_n = \int_I \left|\sum_{k=1}^{n} g_k\right|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} g_k\right\|^2, \qquad \text{y} \qquad \int_I G_n \leq \int_I f_n \leq M^2,$$

y entonces (38) implica

$$\|g\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} g_k\right\|^2 \leq M^2,$$

y esto, a su vez, implica (36).

10.25 TEOREMA DE RIESZ-FISCHER

El teorema de convergencia que acabamos de demostrar permite probar que cada sucesión de Cauchy del espacio semimétrico $L^2(I)$ converge hacia una función de $L^2(I)$. En otras palabras, el espacio semimétrico $L^2(I)$ es completo. Este resultado, conocido como el *teorema de Riesz-Fischer*, juega un papel importante en la teoría de las series de Fourier.

Teorema 10.57. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy de funciones complejas de $L^2(I)$. Esto es, supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que*

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon \quad \textit{siempre que } m \geq n \geq N. \tag{39}$$

Entonces existe una función f de $L^2(I)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0. \tag{40}$$

Demostración. Aplicando repetidamente (39) obtenemos una sucesión creciente de enteros $n(1) < n(2) < \ldots$ tal que

$$\|f_m - f_{n(k)}\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{siempre que } m \geq n(k).$$

Sea $g_1 = f_{n(1)}$, y sea $g_k = f_{n(k)} - f_{n(k-1)}$ para $k \geq 2$. Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|$ converge, ya que está dominada por

$$\|f_{n(1)}\| + \sum_{k=2}^{\infty} \|f_{n(k)} - f_{n(k-1)}\| < \|f_{n(1)}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \|f_{n(1)}\| + 1.$$

Cada g_n pertenece a $L^2(I)$. Luego, por el teorema 10.56, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge casi en todo I hacia una función f de $L^2(I)$. Para terminar la demostración probaremos que $\|f_m - f\| \to 0$ cuando $m \to \infty$.

A este fin utilizamos la desigualdad triangular para escribir

$$\|f_m - f\| \leq \|f_m - f_{n(k)}\| + \|f_{n(k)} - f\|. \tag{41}$$

Si $m \geq n(k)$, el primer término de la derecha es $< 1/2^k$. Para acotar el segundo término de la derecha observemos que

$$f - f_{n(k)} = \sum_{r=k+1}^{\infty} \{f_{n(r)} - f_{n(r-1)}\},$$

y que la serie $\sum_{r=k+1}^{\infty} \|f_{n(r)} - f_{n(r-1)}\|$ converge. Entonces podemos utilizar la desigualdad (36) del teorema 10.56 para escribir

$$\|f - f_{n(k)}\| \leq \sum_{r=k+1}^{\infty} \|f_{n(r)} - f_{n(r-1)}\| < \sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Entonces (41) nos proporciona

$$\|f_m - f\| \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^k} \qquad \text{si } m \geq n(k).$$

Puesto que $n(k) \to \infty$ cuando $k \to \infty$, esto demuestra que $\|f_m - f\| \to 0$ cuando $m \to \infty$.

NOTA. En el curso de la demostración hemos probado que cada sucesión de Cauchy de funciones de $L^2(I)$ admite una subsucesión que converge puntualmente casi en todo I hacia una función límite f de $L^2(I)$. Sin embargo, no se sigue que la sucesión $\{f_n\}$ ella misma converja puntualmente casi en todo I hacia f. (En la sección 9.13 hemos visto un contraejemplo.) Aun cuando $\{f_n\}$ converge hacia f en el espacio semimétrico $L^2(I)$, esta convergencia no es la misma que la convergencia puntual.

EJERCICIOS

Funciones superiores

10.1 Probar que $\max(f, g) + \min(f, g) = f + g$, y que

$$\max(f + h, g + h) = \max(f, g) + h, \qquad \min(f + h, g + h) = \min(f, g) + h.$$

10.2 Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones crecientes de funciones definidas en un intervalo I. Sean $u_n = \max(f_n, g_n)$ y $v_n = \min(f_n, g_n)$.

a) Probar que $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son crecientes en I.

b) Si $f_n \nearrow$ *c.e.t.* I y $g_n \nearrow g$ *c.e.t.* I, probar que $u_n \nearrow \max(f, g)$ y $v_n \nearrow \min(f, g)$ *c.e.t. I.*

10.3 Sea $\{s_n\}$ una sucesión creciente de funciones escalonadas que converge puntualmente en un intervalo I hacia una función límite f. Si I no está acotado y si $f(x) \geq 1$ casi en todo I, probar que la sucesión $\{\int_I s_n\}$ diverge.

10.4 Este ejercicio da un ejemplo de una función superior f en el intervalo $I = [0, 1]$ tal que $-f \notin U(I)$. Sea $\{r_1, r_2, \ldots\}$ el conjunto de los números racionales de $[0, 1]$ y sea $I_n = [r_n - 4^{-n}, r_n + 4^{-n}] \cap I$. Hacemos $f(x) = 1$ si $x \in I_n$ para algún n, y $f(x) = 0$ en otro caso.

a) Hagamos $f_n(x) = 1$ si $x \in I_n$, $f_n(x) = 0$ si $x \notin I_n$, y sea $s_n = \max(f_1, \ldots, f_n)$. Probar que $\{s_n\}$ es una sucesión creciente de funciones escalonadas que genera f. Esto prueba que $f \in U(I)$.

b) Probar que $\int_I f \leq 2/3$.

c) Si una función escalonada s verifica $s(x) \leq -f(x)$ en I, probar que $s(x) \leq -1$ casi por todo en I y entonces $\int_I s \leq -1$.

d) Supongamos que $-f \in U(I)$ y usar (b) y (c) para obtener una contradicción.

NOTA. En los ejercicios que siguen, el integrando vale 0 en los puntos en los que no está definido.

Teoremas de convergencia

10.5 Si $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$, probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx.$$

10.6 Justificar las siguientes ecuaciones:

a) $$\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n dx = 1.$$

b) $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x} \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2} \quad (p > 0).$$

10.7 Probar el teorema de convergencia de Tannery para integrales de Riemann: *Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ y una sucesión creciente $\{p_n\}$ de números reales tal que $p_n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$, supongamos que*

a) *$f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$ para cada $b \geq a$.*

b) *f_n es integrable de Riemann en $[a, b]$ para cada $b \geq a$.*

c) *$|f_n(x)| \leq g(x)$ casi en todo $[a, +\infty)$, en donde g es una función no negativa e integrable de Riemann en sentido impropio en $[a, +\infty)$.*

Entonces tanto f como $|f|$ son funciones integrables de Riemann en sentido impropio en $[a, +\infty)$, la sucesión $\{\int_a^{p_n} f_n\}$ converge y

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{p_n} f_n(x)\,dx.$$

d) Utilizar el teorema de Tannery para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^p\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p\,dx, \qquad \text{si } p > -1.$$

10.8 Probar el lema de Fatou: *Dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciones no negativas de $L(I)$ tales que* (a) *$\{f_n\}$ converge casi en todo I hacia una función límite f, y* (b) *$\int_I f_n \leq A$ para un cierto $A > 0$ y todo $n \geq 1$, entonces la función límite $f \in L(I)$ e $\int_I f \leq A$.*

NOTA. Este lema no afirma que $\{\int_I f_n\}$ converja. (Compárese con el teorema 10.24.)

Indicación. Sea $g_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\}$. Entonces $g_n \nearrow f$ *c.e.t.* I e $\int_I g_n \leq \int_I f_n \leq A$, luego $\lim_{n\to\infty} \int_I g_n$ existe y es $\leq A$. Aplíquese ahora el teorema 10.24.

Integrales de Riemann impropias

10.9 a) Si $p > 1$, probar que la integral $\int_1^{+\infty} x^{-p} \operatorname{sen} x\,dx$ existe como integral impropia de Riemann y como integral de Lebesgue. *Indicación.* Integrar por partes.

b) Si $0 < p \leq 1$, probar que la integral de (a) existe como integral de Riemann impropia pero no como integral de Lebesgue. *Indicación.* Sea

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2x} & \text{si } n\pi + \dfrac{\pi}{4} \leq x \leq n\pi + \dfrac{3\pi}{4} \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

y probar que

$$\int_1^{n\pi} x^{-p} |\operatorname{sen} x|\,dx \geq \int_{\pi}^{n\pi} g(x)\,dx \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

10.10 a) Utilizar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, junto con la fórmula $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x/x\,dx = \pi/2$, para demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

b) Usar la integración por partes en (a) para deducir la fórmula

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

c) Usar la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, junto con (b), para obtener

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

d) Utilizar el resultado de (c) para obtener

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4}\, dx = \frac{\pi}{3}.$$

10.11 Si $a > 1$, probar que la integral $\int_a^{+\infty} x^p (\ln x)^q$ existe como integral de Riemann impropia y como integral de Lebesgue para todo q si $p < -1$, o para $q < -1$ si $p = -1$.

10.12 Probar que cada una de las siguientes integrales existe como integral de Riemann impropia y como integral de Lebesgue.

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}\, dx,$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q}\, dx \quad (p > 0,\ q > 0).$

10.13 Determinar cuándo las integrales siguientes existen, ya sea como integrales de Riemann impropias, ya sea como integrales de Lebesgue, y cuándo no.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(t^2+t-2)}\, dt,$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx,$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x(x^2-1)^{1/2}}\, dx,$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\, dx,$

e) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\, dx,$ f) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \ln (\cos^2 x)\, dx.$

10.14 Determinar para qué valores de p y q existen las siguientes integrales de Lebesgue:

a) $\displaystyle\int_0^{1} x^p(1-x^2)^q\, dx,$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^x e^{-x^p}\, dx,$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x}\, dx,$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x^p)}{x^q}\, dx,$

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx,$ f) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} (\ln x)^p \ (\operatorname{sen} x)^{-1/3}\, dx.$

10.15 Probar que las siguientes integrales de Riemann impropias tienen los valores indicados (m y n designan números enteros positivos).

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^{2n+1} x}{x}\, dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2},$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^{n+1}}\, dx = n^{-2},$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n(1+x)^{-n-m-1}\, dx = \frac{n!(m-1)!}{(m+n)!}.$

10.16 Si f integrable de Riemann en $[0, 1]$, es periódica con período 1, e $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$ probar que la integral de Riemann impropia $\int_1^{+\infty} x^{-s} f(x)\, dx$ existe si $s > 0$. *Indicación.* Sea $g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ y escribir $\int_1^b x^{-s} f(x)\, dx = \int_1^b x^{-s}\, dg(x)$.

10.17 Supongamos que $f \in R$ en $[a, b]$ para cada $b > a > 0$. Definamos g por medio de la ecuación $xg(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ si $x > 0$, supongamos que el límite $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ existe, y desginemos este límite por B. Si a y b son números positivos fijos, probar que

a) $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{x}\, dx = g(b) - g(a) + \int_a^b \frac{g(x)}{x}\, dx.$ b) $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x}\, dx = B \ln \frac{b}{a}.$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = B \ln \frac{a}{b} + \int_a^b \frac{f(t)}{t}\, dt.$

d) Suponemos que el límite $\lim_{x\to0+} x \int_x^1 f(t)t^{-2}\, dt$ existe, y designamos este límite por A. Probar que

$$\int_0^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = A \ln \frac{b}{a} - \int_a^b \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

e) Combinar (c) y (d) para deducir que

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = (B - A) \ln \frac{a}{b}$$

y utilizar este resultado para calcular el valor de las siguientes integrales:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx, \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx.$$

Integrales de Lebesgue

10.18 Probar que cada una de las siguientes integrales existe como integral de Lebesgue:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \log x}{(1+x)^2}\, dx,$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p - 1}{\log x}\, dx \quad (p > -1),$

c) $\displaystyle\int_0^1 \log x \log (1+x)\, dx,$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{(1-x)^{1/2}}\, dx.$

10.19 Supongamos que f es continua en $[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f'(0)$ existe. Probar que la integral de Lebesgue $\int_0^1 f(x)x^{-3/2}\, dx$ existe.

10.20 Probar que las integrales (a) y (c) existen como integrales de Lebesgue mientras que las integrales (b) y (d) no.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^4 \operatorname{sen}^2 x}\, dx,$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4 \operatorname{sen}^2 x}\, dx,$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \operatorname{sen}^2 x}$. d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2 \operatorname{sen}^2 y}$.

Indicación. Obtener cotas superiores e inferiores para las integrales sobre entornos convenientemente elegidos de los puntos $n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Funciones definidas por integrales

10.21 Determinar el conjunto S de los valores reales y para los que cada una de las siguientes integrales existe como integral de Lebesgue.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{1 + x^2}\, dx$, b) $\displaystyle\int_0^{\infty} (x^2 + y^2)^{-1}\, dx$,

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 xy}{x^2}\, dx$, d) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xy\, dx$.

10.22 Sea $F(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xy\, dx$ si $y \in \mathbf{R}$. Probar que F satisface la ecuación diferencial $F'(y) + 2yF(y) = 0$ y deducir que $F(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot e^{-y^2}$. (Utilizar el resultado $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, deducido en el ejercicio 7.19.)

10.23 Sea $F(y) = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} xy/x(x^2 + 1)\, dx$ si $y > 0$. Probar que F satisface la ecuación diferencial $F''(y) - F(y) + \pi/2 = 0$ y deducir que $F(y) = \frac{1}{2}\pi(1 - e^{-y})$. Utilizar este resultado para deducir las siguientes ecuaciones, válidas para $y > 0$ y $a > 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} xy}{x(x^2 + a^2)}\, dx = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-ay}), \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi e^{-ay}}{2a},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} xy}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-ay}, \text{ se puede usar } \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

10.24 Probar que

$$\int_1^{\infty} \left[\int_1^{\infty} f(x, y)\, dx\right] dy \neq \int_1^{\infty} \left[\int_1^{\infty} f(x, y)\, dy\right] dx \quad \text{si}$$

a) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{(x + y)^3}$. b) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

10.25 Probar que el orden de integración no puede intercambiarse en las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx\right] dy$, b) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_1^{\infty} (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\, dy\right] dx$.

10.26 Sea $f(x, y) = \int_0^{\infty} dt/[(1 + x^2t^2)(1 + y^2t^2)]$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Probar (por métodos del Cálculo elemental) que $f(x, y) = \frac{1}{2}\pi(x + y)^{-1}$. Hallar el valor de la integral reiterada $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)\, dx]\, dy$ para deducir la fórmula

$$\int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{x^2}\, dx = \pi \ln 2.$$

10.27 Sea $f(y) = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \cos xy/x\, dx$ si $y \geq 0$. Probar (con métodos del Cálculo elemental) que $f(y) = \pi/2$ si $0 \leq y < 1$ y que $f(y) = 0$ si $y > 1$. Hallar el valor de la integral $\int_0^a f(y)\, dy$ para obtener la fórmula

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} x}{x^2}\, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi a}{2} & \text{si } 0 \leq a \leq 1, \\[2mm] \dfrac{\pi}{2} & \text{si } a \geq 1. \end{cases}$$

10.28 a) Si $s > 0$ y $a > 0$, probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_a^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{x^s}\, dx$$

converge y probar que

$$\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_a^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{x^s}\, dx = 0.$$

b) Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(2n\pi x)/n$. Probar que

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^s}\, dx = (2\pi)^{s-1}\zeta(2 - s) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^s}\, dt, \qquad \text{si } 0 < s < 1,$$

en donde ζ designa la función zeta de Riemann.

10.29 a) Deducir la siguiente fórmula para la n-ésima derivada de la función Gamma:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^n\, dt \qquad (x > 0).$$

b) Cuando $x = 1$, probar que dicha fórmula se puede escribir como sigue:

$$\Gamma^{(n)}(1) = \int_0^1 (t^2 + (-1)^n e^{t - 1/t}) e^{-t} t^{-2} (\ln t)^n\, dt.$$

c) Utilizar (b) para demostrar que $\Gamma^{(n)}(1)$ tiene el mismo signo que $(-1)^n$.

En los ejercicios 10.30 y 10.31, Γ designa la función Gamma.

10.30 Utilizar el resultado $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ para probar que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Probar que $\Gamma(n + 1) = n!$ y que $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (2n)!\sqrt{\pi}/4^n n!$ si $n = 0, 1, 2, \ldots$

10.31 a) Probar que para $x > 0$ tenemos la representación en serie

$$\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n + x} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

en donde $c_n = (1/n!) \int_1^{\infty} t^{-1} e^{-t} (\ln t)^n\, dt$. *Indicación.* Escribir $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$ y utilizar un desarrollo en serie de potencias conveniente para cada integral.

b) Probar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge para cada complejo z y que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n/n!]/(n+z)$ converge para todo complejo $z \neq 0, -1, -2, \ldots$

10.32 Supongamos que f es de variación acotada en $[0, b]$ para cada $b > 0$, y que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe. Designar por medio de $f(\infty)$ este límite y probar que

$$\lim_{y\to 0+} y \int_0^\infty e^{-xy} f(x)\, dx = f(\infty).$$

Indicación. Utilizar la integración por partes.

10.33 Supongamos que f es de variación acotada en $[0, 1]$. Probar que

$$\lim_{y\to 0+} y \int_0^1 x^{y-1} f(x)\, dx = f(0+).$$

Funciones medibles

10.34 Si f es integrable de Lebesgue en un intervalo abierto I y si $f'(x)$ existe casi en todo I, probar que f' es medible en I.

10.35 a) Sea $\{s_n\}$ una sucesión de funciones escalonadas tal que $s_n \to f$ en todo $\mathbf{R}$. Probar que, para cada real a,

$$f^{-1}((a, +\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} s_k^{-1}\left(\left(a + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right).$$

b) Si f es medible en $\mathbf{R}$, probar que para cada subconjunto abierto A de $\mathbf{R}$ el conjunto $f^{-1}(A)$ es medible.

10.36 En este ejercicio se describe un ejemplo de un conjunto no medible de $\mathbf{R}$. Si x e y son números reales del intervalo $[0, 1]$, diremos que x e y son equivalentes, y escribiremos $x \backsim y$, si $x - y$ es racional. La relación $\backsim$ es una relación de equivalencia, y el intervalo $[0, 1]$ se puede escribir como reunión de subconjuntos disjuntos (llamados clases de equivalencia) en cada uno de los cuales no hay puntos equivalentes. Elegimos un punto de cada clase de equivalencia y sea E el conjunto de los puntos elegidos. Supongamos que E es medible y llegaremos a contradicción. Sea $A = \{r_1, r_2, \ldots\}$ el conjunto de los números racionales de $[-1, 1]$ y sea $E_n = \{r_n + x : x \in E\}$.

a) Probar que cada E_n es medible y que $\mu(E_n) = \mu(E)$.

b) Probar que $\{E_1, E_2, \ldots\}$ es una colección disjunta de conjuntos cuya reunión contiene a $[0, 1]$ y está contenida en $[-1, 2]$.

c) Utilizar (a) y (b) junto con la σ-aditividad de la medida de Lebesgue para obtener una contradicción.

10.37 Referirse al ejercicio 10.36 y probar que la función característica χ_E es no medible. Sea $f = \chi_E - \chi_{I-E}$, donde $I = [0, 1]$. Probar que $|f| \in L(I)$, pero que $f \notin M(I)$. (Comparar con el corolario 1 del teorema 10.35.)

Funciones de cuadrado integrable

En los ejercicios que van del 10.38 al 10.42, todas las funciones pertenecen al conjunto $L^2(I)$. La L^2-norma se define por la fórmula $\|f\| = (\int_I |f|^2)^{1/2}$.

10.38 Si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, probar que $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|$.

10.39 Si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ y si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ casi en todo I, probar que $f(x) = g(x)$ casi en todo I.

10.40 Si $f_n \to f$ uniformemente en un intervalo compacto I, y si cada f_n es continua en I, probar que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

10.41 Si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, probar que $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n \cdot g = \int_I f \cdot g$ para cada función g de $L^2(I)$.

10.42 Si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\| = 0$, probar que $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n \cdot g_n = \int_I f \cdot g$.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

10.1 Asplund, E., y Bungart, L., *A First Course in Integration.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.
10.2 Bartle, R., *The Elements of Integration.* Wiley, New York, 1966.
10.3 Burkill, J. C., *The Lebesgue Integral.* Cambridge University Press, 1951.
10.4 Halmos, P., *Measure Theory.* Van Nostrand, New York, 1950.
10.5 Hawkins, T., *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origin and Development.* University of Wisconsin Press, Madison, 1970.
10.6 Hildebrandt, T. H., *Introduction to the Theory of Integration.* Academic Press, New York, 1963.
10.7 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration.* Oxford University Press, 1937.
10.8 Korevaar, J., *Mathematical Methods,* Vol. 1. Academic Press, New York, 1968.
10.9 Munroe, M. E., *Measure and Integration,* 2.ª ed. Addison-Wesley, Reading, 1971.
10.10 Riesz, F., y Sz.-Nagy, B., *Functional Analysis.* Traductor, L. Boron. Ungar, New York, 1955.
10.11 Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis,* 2.ª ed. McGraw-Hill, New York, 1964.
10.12 Shilov, G. E., y Gurevich, B. L., *Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
10.13 Taylor, A. E., *General Theory of Functions and Integration.* Blaisdell, New York, 1965.
10.14 Zaanen, A. C., *Integration.* North-Holland, Amsterdam, 1967.

CAPÍTULO 11

Series de Fourier e integrales de Fourier

11.1 INTRODUCCIÓN

En 1807, Fourier sorprendió a algunos de sus contemporáneos al afirmar que una función «arbitraria» se podía expresar como combinación lineal de senos y cosenos. Estas combinaciones lineales, llamadas hoy día *series de Fourier*, se han convertido en un instrumento indispensable en el análisis de ciertos fenómenos periódicos (tales como vibraciones, movimientos ondulatorios y planetarios) que son estudiados en Física e Ingeniería. Muchos problemas importantes de naturaleza puramente matemática han surgido en relación con la teoría de las series de Fourier, y es un hecho histórico notable que gran parte del desarrollo del Análisis matemático moderno ha sido profundamente influenciado por la búsqueda de respuestas a tales problemas. En la referencia 11.1, el lector podrá encontrar una breve pero excelente exposición histórica acerca de esta materia y de su impacto en el desarrollo de las matemáticas.

11.2 SISTEMAS ORTOGONALES DE FUNCIONES

Para describir de forma más adecuada los problemas básicos de la teoría de las series de Fourier es preciso sumergirse en el ámbito de una teoría más general conocida con el nombre de teoría de las funciones ortogonales. Por consiguiente, empezamos introduciendo cierta terminología concerniente a las funciones ortogonales.

NOTA. Como en el capítulo anterior, consideraremos funciones definidas en un cierto subintervalo I de $\mathbf{R}$. El intervalo puede ser acotado, no acotado, abierto, cerrado o semiabierto. Designamos por $L^2(I)$ el conjunto de todas las funciones complejas f que son medibles en I y tales que $|f|^2 \in L(I)$. El producto interior (f, g) de dos de tales funciones, definido por medio de

$$(f, g) = \int_I f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

existe siempre. El número no negativo $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ es la L^2-norma de f.

Definición 11.1. *Sea $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ una colección de funciones de $L^2(I)$. Si*

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0 \qquad \text{siempre que } m \neq n,$$

la colección S se llama sistema ortogonal en I. Si, además, cada φ_n tiene norma 1, entonces S se llama ortonormal en I.

NOTA. Todo sistema ortogonal para el que cada $\|\varphi_n\| \neq 0$ se puede convertir en un sistema ortonormal dividiendo cada φ_n por su norma.

Nos interesará particularmente el sistema trigonométrico especial $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, en donde

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \qquad \varphi_{2n}(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \tag{1}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ Es fácil comprobar que S es ortonormal en todo intervalo de longitud 2π. (Ver ejercicio 11.1.) El sistema (1) está formado por funciones reales. Un sistema ortonormal de funciones complejas en todo intervalo de longitud 2π lo constituye

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\cos nx + i \operatorname{sen} nx}{\sqrt{2\pi}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

11.3 EL TEOREMA DE ÓPTIMA APROXIMACIÓN

Uno de los problemas básicos en la teoría de funciones ortogonales consiste en aproximar tanto como sea posible una función dada f de $L^2(I)$ por medio de una combinación lineal de elementos de un sistema ortonormal. Precisando, sea $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ un sistema ortonormal en I y sea

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k(x),$$

en donde $b_0, b_1, \ldots, b_n$ son números complejos arbitrarios. Usemos la norma $\|f - t_n\|$ para medir el error cometido al aproximar f por medio de t_n. La primera labor consiste en elegir las constantes $b_0, \ldots, b_n$ de tal forma que el error

sea lo menor posible. El próximo teorema prueba que existe una única elección posible de las constantes que minimice este error.

Para motivar los resultados del teorema consideremos el caso más favorable. Si f es realmente una combinación lineal de $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, esto es

$$f = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k,$$

entonces la elección $t_n = f$ proporciona $\|f - t_n\| = 0$. Podemos determinar las constantes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ como sigue. Formemos el producto interior (f, φ_m), en donde $0 \leq m \leq n$. Utilizando las propiedades del producto interior tenemos

$$(f, \varphi_m) = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k, \varphi_m\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi_k, \varphi_m) = c_m,$$

ya que $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$ si $k \neq m$ y $(\varphi_m, \varphi_m) = 1$. En otras palabras, en el más favorable de los casos tenemos $c_m = (f, \varphi_m)$ para $m = 0, 1, \ldots, n$. El próximo teorema prueba que esta elección de las constantes es óptima para todas las funciones de $L^2(I)$.

Teorema 11.2. *Sea $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ortonormal en I, y supongamos que $f \in L^2(I)$. Definimos dos sucesiones de funciones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ en I como sigue:*

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x), \qquad t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k(x),$$

en donde

$$c_k = (f, \varphi_k) \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

y $b_0, b_1, b_2, \ldots$, son números complejos arbitrarios. Entonces para cada n tenemos

$$\|f - s_n\| \leq \|f - t_n\|. \tag{3}$$

Además, en (3) se verifica la igualdad si, y sólo si, $b_k = c_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n$.

Demostración. Deduciremos (3) de la ecuación

$$\|f - t_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |b_k - c_k|^2. \tag{4}$$

Es claro que (4) implica (3) ya que el miembro de la derecha de (4) tiene su mínimo cuando $b_k = c_k$ para cada k. Para probar (4), escribimos

$$\|f - t_n\|^2 = (f - t_n, f - t_n) = (f, f) - (f, t_n) - (t_n, f) + (t_n, t_n).$$

Utilizando las propiedades de los productos interiores obtenemos

$$\begin{aligned}(t_n, t_n) &= \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k, \sum_{m=0}^{n} b_m\varphi_m\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} b_k\bar{b}_m(\varphi_k, \varphi_m) = \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2,\end{aligned}$$

y

$$(f, t_n) = \left(f, \sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k(f, \varphi_k) = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k c_k.$$

Además, $(t_n, f) = \overline{(f, t_n)} = \sum_{k=0}^{n} b_k\bar{c}_k$, y entonces

$$\begin{aligned}\|f - t_n\|^2 &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k c_k - \sum_{k=0}^{n} b_k\bar{c}_k + \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} (b_k - c_k)(\bar{b}_k - \bar{c}_k) \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |b_k - c_k|^2.\end{aligned}$$

11.4 SERIE DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN RELATIVA A UN SISTEMA ORTONORMAL

Definición 11.3. *Sea $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ortonormal en I y supongamos que $f \in L^2(I)$. La notación*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) \tag{5}$$

significa que los números $c_0, c_1, c_2, \ldots$ vienen dados por las fórmulas:

$$c_n = (f, \varphi_n) = \int_I f(x)\overline{\varphi_n(x)}\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

La serie (5) se llama serie de Fourier de f relativa a S, y los números c_0, c_1, c_2, ... se llaman coeficientes de Fourier de f relativos a S.

NOTA. Cuando $I = [0, 2\pi]$ y S es el sistema de funciones trigonométricas descrito en (1), la serie se llama simplemente *serie de Fourier generada por f*. Entonces (5) se escribe en la forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

en donde los coeficientes se han obtenido por medio de las fórmulas:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt. \tag{7}$$

En este caso las integrales que dan a_n y b_n existen si $f \in L([0, 2\pi])$.

11.5 PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

Teorema 11.4. *Sea $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ortonormal en I, supongamos que $f \in L^2(I)$, y que*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x).$$

Entonces

a) *La serie $\sum |c_n|^2$ converge y satisface la desigualdad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \le \|f\|^2 \qquad \textit{(desigualdad de Bessel).} \tag{8}$$

b) *La ecuación*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2 \qquad \textit{(fórmula de Parseval)}$$

se verifica si, y sólo si, se verifica también

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0,$$

en donde $\{s_n\}$ es la sucesión de las sumas parciales definidas por

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x).$$

Demostración. Hagamos $b_k = c_k$ en (4) y observemos que el primer miembro es no negativo. Por consiguiente

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

Esto establece (a). Para probar (b), hacemos de nuevo $b_k = c_k$ en (4) y tenemos

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2.$$

La parte (b) se sigue inmediatamente de esta ecuación.

Como consecuencia ulterior de la parte (a) del teorema 11.4 obsérvese que los coeficientes de Fourier c_n tienden hacia 0 cuando $n \to \infty$ (ya que $\sum |c_n|^2$ converge). En particular, cuando $\varphi_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}$ e $I = [0, 2\pi]$ se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = 0,$$

de donde se obtienen las importantes fórmulas

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \text{ sen } nx\, dx = 0. \tag{9}$$

Estas fórmulas son también casos especiales del lema de Riemann-Lebesgue (teorema 11.6).

NOTA. La fórmula de Parseval

$$\|f\|^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots$$

es análoga a la fórmula

$$\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

que da la longitud de un vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$. Cada una de ellas puede considerarse una generalización del teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos.

11.6 TEOREMA DE RIESZ-FISCHER

El recíproco de la parte (a) del teorema 11.4 se llama el teorema de Riesz-Fischer.

Teorema 11.5. *Supongamos que $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ es ortonormal en I. Sea $\{c_n\}$ una sucesión de números complejos tales que $\sum |c_n|^2$ converge. Entonces existe una función f de $L^2(I)$ tal que*

a) $(f, \varphi_k) = c_k$ *para cada* $k \geq 0$,
y

b) $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$.

Demostración. Sea $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$. Probaremos que existe una función f de $L^2(I)$ tal que $(f, \varphi_k) = c_k$ y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\| = 0.$$

Entonces la parte (b) del teorema 11.4 implicará la parte (b) del teorema 11.5.

En primer lugar observemos que la sucesión $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio semimétrico $L^2(I)$, ya que, si $m \geq n$, se tiene

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{r=n+1}^{m} c_k \bar{c}_r (\varphi_k, \varphi_r)$$
$$= \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2,$$

y la última suma llega a ser menor que ε siempre que m y n sean suficientemente grandes. Por el teorema 10.57 existe una función f de $L^2(I)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\| = 0.$$

Para probar que $(f, \varphi_k) = c_k$, obsérvese que $(s_n, \varphi_k) = c_k$ si $n \geq k$, y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$|c_k - (f, \varphi_k)| = |(s_n, \varphi_k) - (f, \varphi_k)| = |(s_n - f, \varphi_k)| \leq \|s_n - f\|.$$

Puesto que $\|s_n - f\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ hemos probado (a).

NOTA. La demostración de este teorema depende del hecho de que el espacio semimétrico $L^2(I)$ es completo. No existe un teorema análogo para funciones de cuadrado integrable de Riemann.

11.7 LOS PROBLEMAS DE CONVERGENCIA Y REPRESENTACIÓN PARA SERIES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos la serie trigonométrica de Fourier generada por una función f integrable de Lebesgue en $I = [0, 2\pi]$, por ejemplo

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Se plantean dos preguntas. ¿Converge la serie en algún punto x de I? Y si converge en x, ¿acaso su suma vale $f(x)$? La primera pregunta es el problema de convergencia; la segunda es el problema de representación. En general, la respuesta a ambas preguntas es «No». Realmente, existen funciones integrables de Lebesgue cuyas series de Fourier divergen en todo punto, y existen funciones continuas cuyas series de Fourier divergen en un conjunto no numerable.

Desde el tiempo de Fourier se ha publicado muchísima literatura acerca de estos problemas. El objetivo de muchos de los trabajos ha consistido en hallar condiciones que debe satisfacer f a fin de que la serie de Fourier pueda ser convergente, o en todo el intervalo o en puntos particulares. Más adelante demostraremos que la convergencia o divergencia de la serie en un punto particular depende únicamente del comportamiento de la función en entornos suficientemente pequeños del punto. (Ver teorema 11.11, teorema de localización de Riemann.)

Los esfuerzos de Fourier y Dirichlet a principios del siglo XIX, seguidos de las contribuciones de Riemann, Lipschitz, Heine, Cantor, Du Bois-Reymond, Dini, Jordan, y de la Vallée-Poussin de fines de siglo, han desembocado en el descubrimiento de condiciones suficientes de amplio alcance para establecer la convergencia de la serie, ya sea en puntos particulares, o en general, en todo el intervalo.

Después del descubrimiento de Lebesgue, en 1902, de su teoría general de la medida y la integración, el campo de investigación fue considerablemente ampliado y los principales nombres ligados, ya desde entonces, al tema son los de Fejér, Hobson, W. H. Young, Hardy y Littlewood. Fejér, en 1903, demostró que pueden utilizarse series divergentes de Fourier considerando, en vez de la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}$, la sucesión de las medias aritméticas $\{\sigma_n\}$, en donde

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n}.$$

Estableció el notable teorema de que la sucesión $\{\sigma_n(x)\}$ es convergente y su límite es $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ en cada punto de $[0, 2\pi]$ en donde $f(x+)$ y $f(x-)$ existen, con la única condición de que f sea integrable de Lebesgue en $[0, 2\pi]$ (teorema 11.15). Fejér probó también que cada serie de Fourier, tanto si es convergente como si no, puede integrarse término a término (teorema 11.16). El resultado más sorprendente acerca de las series de Fourier ha sido probado recientemente por Lennart Carleson, matemático sueco, que demuestra que la serie de Fourier de una función de $L^2(I)$ converge casi en todo I. (*Acta Mathematica*, **116** (1966), pp. 135-157.)

En este capítulo deduciremos algunas de las condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier en un punto particular. Entonces demostraremos los teoremas de Fejér. La discusión se basa en dos fórmulas fundamentales de límites que discutiremos en primer lugar. Estas fórmulas de límites, que se utilizan también en la teoría de las integrales de Fourier, se refieren a integrales que dependen de un parámetro real α, y nos interesará el comportamiento de estas integrales cuando $\alpha \to +\infty$. La primera de ellas es una generalización de (9) y se conoce con el nombre de lema de Reimann-Lebesgue.

11.8 LEMA DE RIEMANN-LEBESGUE

Teorema 11.6. *Supongamos que $f \in L(I)$. Entonces, para cada número real β, tenemos*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_I f(t) \operatorname{sen} (\alpha t + \beta)\, dt = 0. \tag{10}$$

Demostración. Si f es la función característica de un intervalo compacto $[a, b]$, el resultado es obvio ya que tenemos

$$\left| \int_a^b \operatorname{sen} (\alpha t + \beta)\, dt \right| = \left| \frac{\cos (a\alpha + \beta) - \cos (b\alpha + \beta)}{\alpha} \right| \leq \frac{2}{\alpha}, \qquad \text{si } \alpha > 0.$$

El resultado se verifica también si f es constante en el intervalo abierto (a, b) y cero fuera del intervalo $[a, b]$, independientemente de como se definan $f(a)$ y $f(b)$. Por lo tanto (10) es válida si f es una función escalonada. Pero entonces es fácil probar (10) para toda función f integrable de Lebesgue.

Dado $\varepsilon > 0$, existe una función escalonada s tal que $\int_I |f - s| < \varepsilon/2$ (en virtud del teorema 10.19(b)). Dado que (10) se verifica para funciones escalonadas, existe un número positivo M tal que

$$\left| \int_I s(t) \operatorname{sen} (\alpha t + \beta)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{si } \alpha \geq M.$$

Por lo tanto, si $\alpha \geq M$ tenemos

$$\left|\int_I f(t)\,\text{sen}\,(\alpha t + \beta)\,dt\right| \leq \left|\int_I (f(t) - s(t))\,\text{sen}\,(\alpha t + \beta)\,dt\right| + \left|\int_I s(t)\,\text{sen}\,(\alpha t + \beta)\,dt\right|$$
$$\leq \int_I |f(t) - s(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Con lo que la demostración del lema de Riemann-Lebesgue está terminada.

Ejemplo. Haciendo $\beta = 0$ y $\beta = \pi/2$, obtenemos, si $f \in L(I)$,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_I f(t)\,\text{sen}\,\alpha t\,dt = \lim_{\alpha\to+\infty} \int_I f(t)\cos\alpha t\,dt = 0.$$

El lema de Riemann-Lebesgue lo aplicaremos para obtener un resultado que necesitaremos en nuestra discusión de las integrales de Fourier.

Teorema 11.7. *Si $f \in L(-\infty, +\infty)$, tenemos*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1 - \cos\alpha t}{t}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t) - f(-t)}{t}\,dt, \tag{11}$$

siempre que la integral de Lebesgue de la derecha exista.

Demostración. Para cada α fijo, la integral del miembro de la izquierda en (11) existe como integral de Lebesgue ya que el cociente $(1 - \cos\alpha t)/t$ es continuo y acotado en $(-\infty, +\infty)$. (En $t = 0$ el cociente se reemplaza por 0, que es el valor de su límite cuando $t \to 0$.) Entonces podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1 - \cos\alpha t}{t}\,dt = \int_0^{\infty} f(t)\,\frac{1 - \cos\alpha t}{t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\frac{1 - \cos\alpha t}{t}\,dt$$
$$= \int_0^{\infty} [f(t) - f(-t)]\,\frac{1 - \cos\alpha t}{t}\,dt$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{f(t) - f(-t)}{t}\,dt - \int_0^{\infty} \frac{f(t) - f(-t)}{t}\cos\alpha t\,dt.$$

Cuando $\alpha \to +\infty$, la última integral tiende a 0, en virtud del lema de Riemann-Lebesgue.

11.9 INTEGRALES DE DIRICHLET

Las integrales de la forma $\int_0^\delta g(t)(\text{sen}\,\alpha t)/t\,dt$ (llamadas integrales de Dirichlet) juegan un papel importante en la teoría de las series de Fourier y también en la teoría de las integrales de Fourier. La función g que interviene en el integrando está sometida a la condición de poseer un límite lateral por la derecha finito $g(0+) = \lim_{t\to 0+} g(t)$ y estamos interesados en someter a g a posteriores condiciones a fin de garantizar la validez de la siguiente ecuación

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} g(t)\,\frac{\text{sen}\,\alpha t}{t}\,dt = g(0+). \tag{12}$$

A fin de formarse una idea de cómo es posible esperar que una expresión como la dada en (12) se verifique, consideremos ante todo el caso en que g es constante ($g(t) = g(0+)$, en $[0, \delta]$. Entonces (12) es una consecuencia inmediata de la ecuación $\int_0^\infty (\text{sen}\,t)/t\,dt = \pi/2$ (ver ejemplo 3, sección 10.15), ya que

$$\int_0^{\delta} \frac{\text{sen}\,\alpha t}{t}\,dt = \int_0^{\alpha\delta} \frac{\text{sen}\,t}{t}\,dt \to \frac{\pi}{2} \quad \text{cuando } \alpha \to +\infty.$$

En general, si $g \in L([0, \delta]$, y si $0 < \varepsilon < \delta$, tenemos

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\delta} g(t)\,\frac{\text{sen}\,\alpha t}{t}\,dt = 0,$$

en virtud del lema de Riemann-Lebesgue. Por lo tanto, la validez de (12) depende enteramente del *comportamiento local* de g en las proximidades de 0. Puesto que $g(t)$ es próximo a $g(0+)$ cuando t es próximo a 0, existe la esperanza de demostrar (12) sin necesidad de añadir muchas restricciones a g. Podría parecer que la continuidad de g en 0 debería bastar para asegurar la existencia del límite de (12). Dirichlet probó que la continuidad de g en $[0, \delta]$ es suficiente para probar (12) si, además, g sólo posee un número finito de máximos y mínimos en $[0, \delta]$. Posteriormente, Jordan demostró (12) bajo la condición menos restrictiva de que g sea de variación acotada en $[0, \delta]$. Sin embargo, todos los intentos de probar (2) con la sola hipótesis de la continuidad de g en $[0, \delta]$ habían resultado infructuosos. Efectivamente, du Bois-Reymond encontró un ejemplo de una función continua g para la que el límite de (12) no existe. Aquí se discute el resultado de Jordan y un teorema relacionado con él debido a Dini.

Teorema 11.8 (Jordan). *Si g es de variación acotada en* $[0, \delta]$, *entonces*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t) \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt = g(0+). \tag{13}$$

Demostración. Es suficiente considerar el caso en el que g es creciente en $[0, \delta]$. Si $\alpha > 0$ y si $0 < h < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\delta g(t) \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt &= \int_0^h [g(t) - g(0+)] \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt \\ &+ g(0+) \int_0^h \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt + \int_h^\delta g(t) \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt \\ &= I_1(\alpha, h) + I_2(\alpha, h) + I_3(\alpha, h), \end{aligned} \tag{14}$$

Aplicamos el lema de Riemann-Lebesgue a $I_3(\alpha, h)$ (ya que la integral $\int_h^\delta g(t)/t \, dt$ existe) y obtenemos que $I_3(\alpha, h) \to 0$ cuando $\alpha \to +\infty$. Además,

$$\begin{aligned} I_2(\alpha, h) &= g(0+) \int_0^h \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt \\ &= g(0+) \int_0^{h\alpha} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt \to \frac{\pi}{2} g(0+) \quad \text{cuando} \quad \alpha \to +\infty \end{aligned}$$

A continuación elegimos $M > 0$ tal que $|\int_a^b (\operatorname{sen} t)/t \, dt| < M$ para cada $b \geq a \geq 0$. Se obtiene que $|\int_a^b (\operatorname{sen} \alpha t)/t \, dt| < M$ para cada $b \geq a \geq 0$, si $\alpha > 0$. Ahora sea $\varepsilon > 0$ y elijamos h en $(0, \delta)$ de modo que $|g(h) - g(0+)| < \varepsilon/(3M)$. Puesto que

$$g(t) - g(0+) \geq 0 \qquad \text{si } 0 \leq t \leq h,$$

podemos aplicar el teorema de Bonnet (teorema 7.37) en $I_1(\alpha, h)$ para escribir

$$I_1(\alpha, h) = \int_0^h [g(t) - g(0+)] \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt = [g(h) - g(0+)] \int_c^h \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt,$$

en donde $c \in [0, h]$. La definición de h nos da

$$|I_1(\alpha, h)| = |g(h) - g(0+)| \left| \int_c^h \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3M} M = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15}$$

Para el mismo h podemos elegir A tal que $\alpha \geq A$ implique

$$|I_3(\alpha, h)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad \left| I_2(\alpha, h) - \frac{\pi}{2} g(0+) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Entonces, para $\alpha \geq A$, combinando (14), (15) y (16) obtenemos

$$\left| \int_0^\delta g(t) \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt - \frac{\pi}{2} g(0+) \right| < \varepsilon.$$

Esto prueba (13).

Dini encontró otro tipo distinto de condición para la validez de (13) y se puede enunciar como sigue:

Teorema 11.9 (Dini). *Supongamos que $g(0+)$ existe y supongamos que para un cierto $\delta > 0$ la integral de Lebesgue*

$$\int_0^\delta \frac{g(t) - g(0+)}{t} \, dt$$

existe. Entonces se tiene

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t) \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt = g(0+).$$

Demostración. Pongamos

$$\int_0^\delta g(t) \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{t} \, dt = \int_0^\delta \frac{g(t) - g(0+)}{t} \operatorname{sen} \alpha t \, dt + g(0+) \int_0^{\alpha\delta} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt.$$

Cuando $\alpha \to +\infty$, el primer término del segundo miembro tiende a 0 (en virtud del lema de Riemann-Lebesgue) y el segundo término tiende a $\frac{1}{2}\pi g(0+)$.

NOTA. Si $g \in L([a, \delta])$ para cada número positivo $a < \delta$, es fácil probar que la condición de Dini se verifica siempre que g satisface una condición de Lipschitz «por la derecha» en 0; esto es, siempre que existen dos constantes positivas M y p tales que

$$|g(t) - g(0+)| < Mt^p, \quad \text{para cada } t \text{ de } (0, \delta]$$

(Ver el ejercicio 11.21.) En particular, la condición de Lipschitz se verifica con $p = 1$ siempre que g tiene una derivada por la derecha en 0. Es interesante observar que existen funciones que satisfacen la condición de Dini y en cambio no satisfacen la condición de Jordan. Análogamente, hay funciones que satisfacen la condición de Jordan pero no satisfacen la condición de Dini. (Ver referencia 11.10.)

11.10 UNA REPRESENTACIÓN INTEGRAL PARA LAS SUMAS PARCIALES DE UNA SERIE DE FOURIER

Una función f se dice que es *periódica* con período $p \neq 0$ si f es definida en $\mathbf{R}$ y si $f(x + p) = f(x)$ para todo x.

El próximo teorema expresa las sumas parciales de una serie de Fourier en términos de la función

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\,(n + \frac{1}{2})t}{2\,\operatorname{sen}\,t/2} & \text{si } t \neq 2m\pi \ (m \text{ entero}), \\ n + \frac{1}{2} & \text{si } t = 2m\pi \ (m \text{ entero}). \end{cases} \tag{17}$$

Esta fórmula ya fue analizada en la sección 8.16 en relación con las sumas parciales de la serie geométrica. La función D_n se llama *núcleo de Dirichlet*.

Teorema 11.10. *Supongamos que $f \in L([0, 2\pi])$ y que f es periódica de período 2π. Sea $\{s_n\}$ la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier generada por f, a saber*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx), \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Entonces tenemos la representación integral

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x + t) + f(x - t)}{2} D_n(t)\, dt. \tag{19}$$

Demostración. Los coeficientes de Fourier de f vienen dados por las integrales de (7). Sustituyendo estas integrales en (18) se obtiene

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx)\right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t - x)\right\} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t - x)\, dt.$$

386 Series de Fourier e integrales de Fourier

servar que existen funciones que satisfacen la condición de Dini y en cambio no satisfacen la condición de Jordan. Análogamente, hay funciones que satisfacen la condición de Jordan pero no satisfacen la condición de Dini. (Ver referencia 11.10.)

11.10 UNA REPRESENTACIÓN INTEGRAL PARA LAS SUMAS PARCIALES DE UNA SERIE DE FOURIER

Una función f se dice que es *periódica* con período $p \neq 0$ si f es definida en $\mathbf{R}$ y si $f(x + p) = f(x)$ para todo x.

El próximo teorema expresa las sumas parciales de una serie de Fourier en términos de la función

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\,(n + \frac{1}{2})t}{2\,\operatorname{sen}\,t/2} & \text{si } t \neq 2m\pi \ (m \text{ entero}), \\ n + \frac{1}{2} & \text{si } t = 2m\pi \ (m \text{ entero}). \end{cases} \tag{17}$$

Esta fórmula ya fue analizada en la sección 8.16 en relación con las sumas parciales de la serie geométrica. La función D_n se llama *núcleo de Dirichlet*.

Teorema 11.10. *Supongamos que $f \in L([0, 2\pi])$ y que f es periódica de período 2π. Sea $\{s_n\}$ la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier generada por f, a saber*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx), \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Entonces tenemos la representación integral

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x + t) + f(x - t)}{2} D_n(t)\, dt. \tag{19}$$

Demostración. Los coeficientes de Fourier de f vienen dados por las integrales de (7). Sustituyendo estas integrales en (18) se obtiene

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx)\right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t - x)\right\} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t - x)\, dt.$$

Utilizando una vez más el lema de Riemann-Lebesgue, sólo es preciso considerar el límite de (21) cuando la integral $\int_0^\pi$ se sustituye por $\int_0^\delta$, en donde δ es un número positivo $< \pi$, puesto que la integral $\int_\delta^\pi$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, podemos resumir los resultados de la sección anterior en el siguiente teorema:

Teorema 11.11. *Supongamos que $f \in L([0, 2\pi])$ y que f es periódica de período 2π. Entonces la serie de Fourier generada por f será convergente para un valor dado de x si, y sólo si, para un cierto número positivo $\delta < \pi$, existe el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt, \tag{22}$$

en cuyo caso el valor de este límite es la suma de la serie de Fourier.

Este teorema se conoce como *teorema de localización de Riemann.* Nos dice que la convergencia o divergencia de una serie de Fourier en un punto particular depende exclusivamente del comportamiento de f en un entorno arbitrariamente pequeño del punto. Esto es bastante sorprendente por cuanto los coeficientes de las series de Fourier dependen de los valores que la función toma en todo el intervalo $[0, 2\pi]$.

11.12 CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE FOURIER EN UN PUNTO PARTICULAR

Supongamos que $f \in L([0, 2\pi])$ y que f tiene período 2π. Consideremos un x de $[0, 2\pi]$, fijo, y un número positivo $\delta < \pi$. Sea

$$g(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \qquad \text{si } t \in [0, \delta],$$

y sea

$$s(x) = g(0+) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$$

siempre que este límite exista. Obsérvese que $s(x) = f(x)$ si f es continua en x.

Combinando el teorema 11.11 con los teoremas 11.8 y 11.9, respectivamente, obtenemos las siguientes condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier.

Teorema 11.12 (criterio de Jordan). *Si f es de variación acotada en el intervalo compacto $[x-\delta, x+\delta]$ para un $\delta < \pi$, entonces el límite $s(x)$ existe y la serie de Fourier generada por f converge hacia $s(x)$.*

Teorema 11.13 (criterio de Dini). *Si el límite $s(x)$ existe y si existe la integral de Lebesgue*

$$\int_0^\delta \frac{g(t)-s(x)}{t}\,dt$$

para un cierto $\delta < \pi$, entonces la serie de Fourier generada por f converge hacia $s(x)$.

11.13 SUMABILIDAD DE CESÀRO PARA SERIES DE FOURIER

La continuidad de f no es una hipótesis demasiado fructífera cuando se trata de estudiar la convergencia de una serie de Fourier generada por f. En 1873, Du Bois-Reymond dio con un ejemplo de una función, continua en todo el intervalo $[0, 2\pi]$, cuya serie de Fourier no converge en un subconjunto no numerable de $[0, 2\pi]$. Sin embargo, la continuidad es suficiente para establecer la sumabilidad de Cesàro de la serie. Este resultado (debido a Fejér) y alguna de sus consecuencias se discutirán a continuación.

Nuestro primer empeño consiste en obtener una representación integral para la media aritmética de las sumas parciales de una serie de Fourier.

Teorema 11.14. *Supongamos que $f \in L([0, 2\pi])$ y que f es periódica de período 2π. Sea s_n la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier generada por f y sea*

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

Entonces tenemos la representación integral

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}nt}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t}\,dt. \tag{24}$$

Demostración. Usamos la representación integral de $s_n(x)$ dada en (19) y formamos la suma que define a $\sigma_n(x)$, e inmediatamente se obtiene el resultado requerido en virtud de la fórmula (16) de la sección 8.16.

NOTA. Si aplicamos el teorema 11.14 a la función constante igual a 1 en cada punto obtenemos $\sigma_n(x) = s_n(x) = 1$ para cada n y entonces (24) se reduce a

$$\frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}nt}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t}\,dt = 1. \tag{25}$$

Por consiguiente, dado un número s, podemos combinar (25) con (24) para escribir

$$\sigma_n(x) - s = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \left\{\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s\right\}\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}nt}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t}\,dt. \tag{26}$$

Si elegimos, de ser posible, un valor s tal que la integral de la derecha de (26) tienda a 0 cuando $n\to\infty$, obtendremos que $\sigma_n(x)\to s$ cuando $n\to\infty$. El próximo teorema prueba que basta hacer $s = [f(x+) + f(x-)]/2$.

Teorema 11.15 (Fejér). *Supongamos que $f \in L[(0, 2\pi)]$ y que f es periódica de período 2π. Definimos una función s por la siguiente ecuación:*

$$s(x) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}, \tag{27}$$

siempre que este límite exista. Entonces, para cada x para el que $s(x)$ está definido, la serie de Fourier generada por f es sumable de Cesàro y tiene suma (C, 1) $s(x)$. Esto es, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = s(x),$$

en donde $\{\sigma_n\}$ es la sucesión de las medias aritméticas definidas por medio de (23). Si además, f es continua en $[0, 2\pi]$, entonces la sucesión $\{\sigma_n\}$ converge uniformemente hacia f en $[0, 2\pi]$.

Demostración. Sea $g_x(t) = [f(x+t) + f(x-t)]/2 - s(x)$, siempre que $s(x)$ esté definida. Entonces $g_x(t)\to 0$ cuando $t\to 0+$. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$, existe un número positivo $\delta < \pi$ tal que $|g_x(t)| < \varepsilon/2$ si $0 < t < \delta$. Obsérvese que δ depende tanto de x como de ε. Sin embargo, si f es continua en $[0, 2\pi]$, entonces f es uniformemente continua en $[0, 2\pi]$, y existe un δ igualmente válido para cada x de $[0, 2\pi]$. Ahora utilizamos (26) y dividimos el intervalo de integración en dos subintervalos $[0, \delta]$ y $[\delta, \pi]$. En $[0, \delta]$ tenemos

$$\left|\frac{1}{n\pi}\int_0^\delta g_x(t)\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}nt}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t}\,dt\right| \le \frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}nt}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t}\,dt = \frac{\varepsilon}{2},$$

en virtud de (25). En $[\delta, \pi]$ tenemos

$$\left|\frac{1}{n\pi}\int_\delta^\pi g_x(t)\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}nt}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t}\,dt\right| \le \frac{1}{n\pi \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\delta}\int_\delta^\pi |g_x(t)|\,dt \le \frac{I(x)}{n\pi \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\delta},$$

donde $I(x) = \int_0^\pi |g_x(t)|\,dt$. Tomemos ahora N tal que $I(x)/(N\pi \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\delta) < \varepsilon/2$. Entonces $n > N$ implica

$$|\sigma_n(x) - s(x)| = \left|\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi g_x(t)\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}nt}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t}\,dt\right| < \varepsilon.$$

En otras palabras, $\sigma_n(x)\to s(x)$ cuando $n\to\infty$.

Si f es continua en $[0, 2\pi]$, entonces, por periodicidad, f está acotada en $\mathbf{R}$ y existe un M tal que $|g_x(t)| \le M$ para todo x y todo t, y podemos reemplazar $I(x)$ por $M\pi$ en el razonamiento anterior. Entonces el N resultante es independiente de x y por lo tanto $\sigma_n \to s = f$ uniformemente en $[0, 2\pi]$.

11.14 CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE FEJÉR

Teorema 11.16. *Sea f continua en $[0, 2\pi]$ y periódica con período 2π. Supongamos que $\{s_n\}$ designa la sucesión de las sumas parciales de la serie de Fourier generada por f, es decir*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{28}$$

Entonces tenemos:

a) $\text{l.e.m.}_{n\to\infty}\, s_n = f$ *en* $[0, 2\pi]$.

b) $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2)$ *(Fórmula de Parseval).*

c) *La serie de Fourier se puede integrar término a término. Esto es, para todo x se tiene*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^\infty \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)\,dt$$

y la serie integrada converge uniformemente en cada intervalo, incluso si la serie de Fourier dada en (28) diverge.

d) *Si la serie de Fourier dada en (28) converge para algún x, entonces converge hacia $f(x)$.*

Demostración. Si aplicamos la fórmula (3) del teorema 11.2 con

$$t_n(x) = \sigma_n(x) = (1/n)\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} s_k(x),$$

obtenemos la desigualdad

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(x)|^2\, dx \le \int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2\, dx. \tag{29}$$

Pero, puesto que $\sigma_n \to f$ uniformemente en $[0, 2\pi]$, se obtiene que $\text{l.e.m.}_{n\to\infty}\, \sigma_n = f$ en $[0, 2\pi]$, y (29) implica (a). La parte (b) se sigue de la parte (a) en virtud del teorema 11.4. La parte (c) se sigue asimismo de (a), en virtud del teorema 9.18. Finalmente, si $\{s_n(x)\}$ converge para un x, entonces $\{\sigma_n(x)\}$ debe converger hacia el mismo límite. Pero el hecho de que $\sigma_n(x) \to f(x)$ implica que $s_n(x) \to f(x)$, que prueba (d).

11.15. TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS

El teorema de Fejér puede utilizarse también para demostrar un famoso teorema debido a Weierstrass que establece que toda función continua en un intervalo compacto puede aproximarse uniformemente por medio de un polinomio. Con mayor precisión, tenemos:

Teorema 11.17. *Sea f una función real y continua definida en un intervalo compacto $[a, b]$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p (que depende de ε) tal que*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \textit{para cada } x \textit{ de } [a, b]. \tag{30}$$

Demostración. Si $t \in [0, \pi]$, sea $g(t) = f[a + t(b - a)/\pi]$; si $t \in [\pi, 2\pi]$, sea $g(t) = f[a + (2\pi - t)(b - a)/\pi]$ y definamos g fuera de $[0, 2\pi]$ de modo que g tenga período 2π. Para el ε dado en el teorema, podemos aplicar el teorema de Fejér y obtener una función σ definida por medio de una ecuación de la forma

$$\sigma(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} (A_k \cos kt + B_k \operatorname{sen} kt)$$

tal que $|g(t) - \sigma(t)| < \varepsilon/2$ para cada t de $[0, 2\pi]$. (Obsérvese que N, y por lo tanto σ, dependen de ε.) Puesto que σ es una suma finita de funciones trigonométricas, genera un desarrollo en serie de potencias en torno del origen que converge uniformemente en cada intervalo finito. Las sumas parciales de este desarrollo en serie de potencias constituye una sucesión de polinomios, $\{p_n\}$, tal que $p_n \to \sigma$ uniformemente en $[0, 2\pi]$. Por lo tanto, para el mismo ε, existe un m tal que

$$|p_m(t) - \sigma(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para cada } t \text{ de } [0, 2\pi].$$

Por consiguiente tenemos

$$|p_m(t) - g(t)| < \varepsilon, \quad \text{para cada } t \text{ de } [0, 2\pi]. \tag{31}$$

Ahora definimos el polinomio p por la fórmula $p(x) = p_m[\pi(x - a)/(b - a)]$. Entonces la desigualdad (31) se convierte en (30) si hacemos

$$t = \pi(x - a)/(b - a).$$

11.16 OTRAS FORMAS DE SERIES DE FOURIER

Utilizando las fórmulas

$$2\cos nx = e^{inx} + e^{-inx} \qquad \text{y} \qquad 2i \operatorname{sen} nx = e^{inx} - e^{-inx},$$

la serie de Fourier generada por f se puede expresar en términos de exponenciales complejas de la siguiente manera:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n e^{inx} + \beta_n e^{-inx}),$$

en donde $\alpha_n = (a_n - ib_n)/2$ y $\beta_n = (a_n + ib_n)/2$. Si hacemos $\alpha_0 = a_0/2$ y $\alpha_{-n} = \beta_n$, podemos escribir la forma exponencial más brevemente como sigue:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}.$$

Las fórmulas (7) para los coeficientes son ahora

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Si f tiene período 2π, el intervalo de integración se puede sustituir por cualquier otro intervalo de longitud 2π.

Generalizando, si $f \in L([0, p])$ y si f tiene período p, escribimos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{p} \right)$$

para indicar que los coeficientes vienen dados por las fórmulas

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{2\pi nt}{p}\, dt,$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{p}\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

En la forma exponencial podemos escribir

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi inx/p},$$

en donde

$$\alpha_n = \frac{1}{p}\int_0^p f(t)e^{-2\pi int/p}\,dt, \qquad \text{si } n = 0, +1, +2, \ldots$$

Todos los teoremas de convergencia para series de Fourier de período 2π se pueden aplicar asimismo al caso de período general p realizando el cambio de escala conveniente.

11.17 TEOREMA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

La hipótesis de la periodicidad, que aparece en todos los teoremas de convergencia relativos a las series de Fourier, no es tan fuerte como podría parecer a primera vista. Si una función inicialmente está definida en un intervalo finito $[a, b]$, siempre es posible extender la definición de f al exterior de $[a, b]$ imponiendo una cierta condición de periodicidad. Por ejemplo, si $f(a) = f(b)$, podemos definir f en todo el intervalo $(-\infty, +\infty)$, exigiendo que la ecuación $f(x + p) = f(x)$ se verifique para todo x, siendo $p = b - a$. (La condición $f(a) = f(b)$ siempre se puede considerar, puesto que siempre es posible cambiar el valor de f en uno de los extremos. Ello no afecta en absoluto ni a la existencia ni al valor de las integrales que se utilizan para calcular los coeficientes de Fourier de f.) Sin embargo, si dicha función está ya definida en todo el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y *no* es periódica, entonces no debemos esperar encontrar una serie de Fourier que represente a dicha función en $(-\infty, +\infty)$. No obstante, en tales casos la función puede ser representada a veces por medio de una *integral infinita* mejor que por una serie. Estas integrales, que en muchos aspectos son análogas a las series de Fourier, se llaman *integrales de Fourier*, y el teorema que da condiciones suficientes para que una función admita una representación por medio de una de estas integrales, se conoce con el nombre de *teorema de la integral de Fourier*. Los instrumentos báscos utilizados en esta teoría son, como en el caso de las series de Fourier, las integrales de Dirichlet y el lema de Riemann-Lebesgue.

Teorema 11.18 (Teorema de la integral de Fourier). *Supongamos que $f \in L(-\infty, +\infty)$. Supongamos que existe un punto x de* **R** *y un intervalo* $[x - \delta, x + \delta]$ alrededor de x tal que

a) *f es de variación acotada en $[x - \delta, x + \delta]$,*

o bien

b) *existen los dos límites $f(x+)$ y $f(x-)$ así como las dos integrales de Lebesgue*

$$\int_0^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}\,dt \qquad y \qquad \int_0^{\delta} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}\,dt$$

Entonces tenemos la fórmula

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos v(u - x)\,du\right]dv, \tag{32}$$

en donde la integral $\int_0^{\infty}$ designa una integral de Riemann impropia.

Demostración. La primera parte de la demostración se establece por medio de la fórmula:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\alpha t}{t}\,dt = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}. \tag{33}$$

A este fin escribimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\alpha t}{\pi t}\,dt = \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{0} + \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}.$$

Cuando $\alpha \to +\infty$, la primera y la cuarta de las integrales del segundo miembro tienden a 0, en virtud del lema de Riemann-Lebesgue. En la tercera integral, podemos aplicar o bien el teorema 11.8 o bien el teorema 11.9 (según se verifique (a) o (b)) a fin de obtener

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^{\delta} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\alpha t}{\pi t}\,dt = \frac{f(x+)}{2}.$$

Análogamente, tenemos

$$\int_{-\delta}^{0} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\alpha t}{\pi t}\,dt = \int_0^{\delta} f(x-t)\frac{\operatorname{sen}\alpha t}{\pi t}\,dt \to \frac{f(x-)}{2} \quad \text{cuando } \alpha \to +\infty.$$

Así obtenemos (33). Si hacemos una traslación, resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\alpha t}{t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{\operatorname{sen}\alpha(u - x)}{u - x}\,du,$$

y si utilizamos la fórmula elemental

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha(u-x)}{u-x}=\int_0^\alpha \cos v(u-x)\,dv,$$

el límite de la relación dada en (33) se convierte en

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\int_0^\alpha \cos v(u-x)\,dv\right]du=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}. \tag{34}$$

Pero la fórmula que deseamos demostrar es (34) con el orden de integración invertido. Por el teorema 10.40 tenemos

$$\int_0^\alpha\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos v(u-x)\,du\right]dv=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^\alpha f(u)\cos v(u-x)\,dv\right]du$$

para cada $\alpha>0$, puesto que el coseno de una función es acotado y continuo en todo $\mathbf{R}$. Ya que existe el límite de (34), esto prueba que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos v(u-x)\,du\right]dv=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

En virtud del teorema 10.40, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos v(u-x)\,du$ es una función continua de v en $[0,\alpha]$, luego la integral $\int_0^\infty$ de (32) existe como integral de Riemann impropia. No es necesaria la existencia como integral de Lebesgue.

11.18 FORMA EXPONENCIAL DEL TEOREMA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

Teorema 11.19. *Si f satisface las hipótesis del teorema de la integral de Fourier, entonces tenemos*

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iv(u-x)}\,du\right]dv. \tag{35}$$

Demostración. Sea $F(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos v(u-x)\,du$. Entonces F es continua en $(-\infty,+\infty)$, $F(v)=F(-v)$ luego $\int_{-\alpha}^{0} F(v)\,dv=\int_0^\alpha F(-v)\,dv=\int_0^\alpha F(v)\,dv$. Por consiguiente (32) nos proporciona

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha F(v)\,dv=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} F(v)\,dv. \tag{36}$$

Ahora definimos G en $(-\infty,+\infty)$ por medio de la ecuación

$$G(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\operatorname{sen} v(u-x)\,du.$$

Entonces G es continua en todo $\mathbf{R}$ y $G(v)=-G(-v)$. Luego $\int_{-\alpha}^{\alpha} G(v)\,dv=0$ para cada $\alpha>0$, y entonces $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} G(v)\,dv=0$. Combinando este resultado con (36) obtenemos

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\{F(v)+iG(v)\}\,dv.$$

Ésta es la fórmula (35).

11.19 TRANSFORMADAS INTEGRALES

Muchas de las funciones que aparecen en Análisis se pueden expresar por medio de integrales de Lebesgue o bien por medio de integrales de Riemann impropias de la forma

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)f(x)\,dx. \tag{37}$$

Una función g definida por medio de una ecuación de este tipo (en la que y puede ser real o compleja) se llama *transformada integral de f*. La función K que aparece en el integrando se denomina el *núcleo* de la transformada.

Las transformadas integrales se emplean muy extensamente tanto en Matemática pura como en Matemática aplicada. Son especialmente útiles para resolver ciertos problemas de contorno y ciertos tipos de ecuaciones integrales. Algunas de las transformadas más corrientemente utilizadas son las siguientes:

Transformada exponencial de Fourier: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}f(x)\,dx.$

Transformada coseno de Fourier: $\int_0^{\infty}\cos xy\,f(x)\,dx.$

Transformada seno de Fourier: $\int_0^{\infty}\operatorname{sen} xy f(x)\,dx$

Transformada de Laplace: $\int_0^{\infty} e^{-xy}f(x)\,dx.$

Transformada de Mellin: $\int_0^{\infty} x^{y-1}f(x)\,dx.$

Puesto que $e^{-ixy} = \cos xy - i \text{ sen } xy$, las transformadas seno y coseno son meros casos particulares de la transformada exponencial de Fourier en los que la función f se anula en el eje real negativo. La transformada de Laplace también está relacionada con la transformada exponencial de Fourier. Si consideramos un valor complejo de y, por ejemplo $y = u + iv$, en donde u y v son reales, podemos escribir

$$\int_0^{\infty} e^{-xy}f(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-ixv}e^{-xu}f(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-ixv}\phi_u(x)\,dx,$$

en donde $\phi_u(x) = e^{-xu}f(x)$. Por consiguiente, la transformada de Laplace puede considerarse también como un caso particular de la transformada exponencial de Fourier.

NOTA. Una ecuación como la dada en (37) se designa a menudo en la forma breve $g = \mathcal{K}(f)$ o $g = \mathcal{K}f$, en donde $\mathcal{K}$ designa el «operador» que convierte f en g. Dado que la integración se halla involucrada en dicha ecuación, el operador $\mathcal{K}$ se desgina con el nombre de *operador integral*. Es claro que $\mathcal{K}$ es también un operador lineal. Esto es,

$$\mathscr{K}(a_1f_1 + a_2f_2) = a_1\mathscr{K}f_1 + a_2\mathscr{K}f_2,$$

si a_1 y a_2 son constantes. El operador definido por la transformada de Fourier se designa, a veces, por medio de $\mathscr{F}$ y el que define la transformada de Laplace por $\mathscr{L}$.

La forma exponencial del teorema de la integral de Fourier puede enunciarse en términos de transformadas de Fourier como sigue. Sea g la transformada de Fourier de f, esto es,

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itu}\,dt. \tag{38}$$

Entonces, en los puntos de continuidad de f, la fórmula (35) se convierte en

$$f(x) = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(u)e^{ixu}\,du, \tag{39}$$

y esta última fórmula se llama *fórmula de inversión* para transformadas de Fourier. Nos dice que una función continua f que satisfaga las condiciones del teorema de la integral de Fourier está unívocamente determinada por su transformada de Fourier g.

NOTA. Si $\mathscr{F}$ designa el operador definido por (38), es costumbre designar por medio de $\mathscr{F}^{-1}$ el operador definido por (39). Las ecuaciones (38) y (39) pueden entonces expresarse simbólicamente escribiendo $g = \mathscr{F}f$ y $f = \mathscr{F}^{-1}g$. La fórmula de inversión indica cómo hallar f resolviendo la ecuación $g = \mathscr{F}f$ en términos de g.

Antes de proseguir el estudio de las transformadas de Fourier, introduciremos una nueva noción, la *convolución* de dos funciones. Este concepto puede interpretarse como un tipo especial de transformada integral cuyo núcleo $K(x, y)$ depende únicamente de la *diferencia* $x - y$.

11.20. CONVOLUCIONES

Definición 11.20. *Dadas dos funciones f y g, ambas integrables de Lebesgue en $(-\infty, +\infty)$, sea S el conjunto de los x para el cual existe la integral de Lebesgue*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)\,dt \tag{40}$$

Esta integral define una función h en S llamada convolución de f y g. Para designar esta función se suele escribir $h = f * g$.

NOTA. Es fácil ver (por traslación) que $f * g = g * f$ siempre que la integral exista.

Un caso importante aparece cuando tanto f como g se anulan en el eje real negativo. En este caso, $g(x - t) = 0$ si $t > x$, y (40) se convierte en

$$h(x) = \int_0^{x} f(t)g(x - t)\,dt. \tag{41}$$

Es claro que, en este caso, la convolución estará definida en cada punto del intervalo $[a, b]$ si tanto f como g son integrables de Riemann en $[a, b]$. Sin embargo, no es necesario que así ocurra si exigimos sólo que f y g sean integrables de Lebesgue en $[a, b]$. Por ejemplo, sea

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{y} \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}, \quad \text{si } 0 < t < 1,$$

y sea $f(t) = g(t) = 0$ si $t \leq 0$ o si $t \geq 1$. Entonces f posee una discontinuidad infinita en $t = 0$. A pesar de todo, existe la integral de Lebesgue $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_0^1 t^{-1/2}\,dt$. Aun cuando g tenga una discontinuidad infinita en $t = 1$, igualmente existe la integral de Lebesgue $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = \int_0^1 (1-t)^{-1/2}\, dt$. Sin embargo, cuando se forma la integral de convolución de (40) correspondiente a $x = 1$, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(1-t)\, dt = \int_0^1 t^{-1}\, dt.$$

Obsérvese que las dos discontinuidades de f y g se han «fundido» en *una* discontinuidad de tal naturaleza que no existe integral de convolución.

Este ejemplo prueba que pueden existir ciertos puntos del eje real en los que la integral de (40) no exista, aun cuando las funciones f y g sean ambas integrables de Lebesgue en $(-\infty, +\infty)$. Nos referiremos a tales puntos llamándolos «singularidades» de h. Es fácil comprobar que dichas singularidades no pueden presentarse a menos que *ambas* funciones f y g tengan discontinuidades infinitas. Precisando, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 11.21. *Sea* $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$. *Supongamos que* $f \in L(\mathbf{R})$, $g \in L(\mathbf{R})$, *y que o* f *o* g *está acotada en* $\mathbf{R}$. *Entonces la integral de convolución*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\, dt \tag{42}$$

existe para cada x *de* $\mathbf{R}$, *y la función* h *así definida está acotada en* $\mathbf{R}$. *Si, además, la función acotada, sea* f *o* g, *es continua en* $\mathbf{R}$, *entonces* h *también es continua en* $\mathbf{R}$ *y* $h \in L(\mathbf{R})$.

Demostración. Puesto que $f * g = g * f$, es suficiente considerar el caso en que g está acotada. Supongamos que $|g| \le M$. Entonces

$$|f(t)g(x-t)| \le M|f(t)|. \tag{43}$$

El lector puede verificar que, para cada x, el producto $f(t)g(x-t)$ es una función de t *medible en* $\mathbf{R}$, luego el teorema 10.35 prueba que existe la integral de $h(x)$. La desigualdad (43) prueba también que $|h(x)| \le M \int |f|$, luego h está acotada en $\mathbf{R}$.

Ahora bien, si g es además continua en $\mathbf{R}$, entonces el teorema 10.40 prueba que h es continua en $\mathbf{R}$ y que en cada intervalo compacto $[a, b]$ se tiene

$$\int_a^b |h(x)|\, dx \le \int_a^b \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, |g(x-t)|\, dt\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left[\int_a^b |g(x-t)|\, dx\right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left[\int_{a-t}^{b-t} |g(y)|\, dy\right] dt \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\, dy,$$

por lo que, en virtud del teorema 10.31, $h \in L(\mathbf{R})$.

Teorema 11.22. *Sea* $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$. *Supongamos que* $f \in L^2(\mathbf{R})$ *y* $g \in L^2(\mathbf{R})$. *Entonces la integral de convolución* (42) *existe para cada* x *de* $\mathbf{R}$ *y la función* h *está acotada en* $\mathbf{R}$.

Demostración. Para x fijo, sea $g_x(t) = g(x-t)$. Entonces g_x es medible en $\mathbf{R}$ y $g_x \in L^2(\mathbf{R})$, luego el teorema 10.54 implica que el producto $f \cdot g_x \in L(\mathbf{R})$. En otras palabras, la integral de convolución $h(x)$ existe. Pero $h(x)$ es un producto interior, $h(x) = (f, g_x)$, y entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz prueba que

$$|h(x)| \le \|f\|\, \|g_x\| = \|f\|\, \|g\|,$$

luego h está acotada en $\mathbf{R}$.

11.21 TEOREMA DE CONVOLUCIÓN PARA TRANSFORMADAS DE FOURIER

El próximo teorema demuestra que la transformada de Fourier de una convolución $f * g$ es igual al producto de las transformadas de Fourier de f y de g. Usando la notación del operador, tendremos

$$\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f) \cdot \mathscr{F}(g).$$

Teorema 11.23. *Sea* $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$. *Supongamos que* $f \in L(\mathbf{R})$, $g \in L(\mathbf{R})$, *y que una por lo menos de las funciones* f *o* g *es continua y acotada en* $\mathbf{R}$. *Designemos por medio de* h *la convolución* $h = f * g$. *Entonces, para cada número real* u, *tenemos*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ixu}\, dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itu}\, dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iyu}\, dy\right). \tag{44}$$

La integral del primer miembro existe como integral de Lebesgue y como integral de Riemann impropia.

Demostración. Supongamos que g es continua y acotada en $\mathbf{R}$. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones crecientes de números reales positivos tales que $a_n \to +\infty$ y $b_n \to +\infty$. Definimos una sucesión de funciones $\{f_n\}$ en $\mathbf{R}$ como sigue:

$$f_n(t) = \int_{-a_n}^{b_n} e^{-iux} g(x-t)\, dx.$$

Puesto que

$$\int_a^b |e^{-iux} g(x-t)|\, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g|$$

para todo intervalo compacto $[a, b]$, el teorema 10.31 prueba que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} g(x-t)\, dx \qquad \text{para cada } t \text{ real.} \tag{45}$$

La traslación $y = x - t$ nos proporciona

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} g(x-t)\, dx = e^{-iut} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y)\, dy,$$

y (45) prueba que

$$\lim_{n\to\infty} f(t) f_n(t) = f(t) e^{-iut} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y)\, dy \right)$$

para todo t. Ahora f_n es continua en $\mathbf{R}$ (teorema 10.38), luego el producto $f \cdot f_n$ es medible en $\mathbf{R}$. Puesto que

$$|f(t) f_n(t)| \leq |f(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |g|,$$

el producto $f \cdot f_n$ es integrable de Lebesgue en $\mathbf{R}$, y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f_n(t)\, dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut}\, dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y)\, dy \right). \tag{46}$$

Pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f_n(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-a_n}^{b_n} e^{-iux} g(x-t)\, dx \right] dt.$$

Como la función k definida por $k(x, t) = g(x - t)$ es continua y acotada en $\mathbf{R}^2$ y dado que la integral $\int_a^b e^{-iux}\, dx$ existe para cada intervalo compacto $[a, b]$, el teorema 10.40 nos permite invertir el orden de integración y obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f_n(t)\, dt = \int_{-a_n}^{b_n} e^{-iux} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t)\, dt \right] dx = \int_{-a_n}^{b_n} e^{-iux} h(x)\, dx.$$

Por consiguiente, (46) prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-a_n}^{b_n} h(x) e^{-iux}\, dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut}\, dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iuy}\, dy \right),$$

que demuestra (44). La integral de la izquierda existe también como integral de Riemann impropia puesto que el integrando es continuo y acotado en $\mathbf{R}$ e $\int_a^b |h(x) e^{-iux}|\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h|$ para cada intervalo compacto $[a, b]$.

Como aplicación del teorema de convolución obtendremos la siguiente propiedad de la función gamma.

Ejemplo. Si $p > 0$ y $q > 0$, tenemos la fórmula

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{47}$$

La integral del primer miembro se llama *función beta* y usualmente se designa por $B(p, q)$. Para probar (47) consideremos

$$f_p(t) = \begin{cases} t^{p-1} e^{-t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Entonces $f_p \in L(\mathbf{R})$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f_p(t)\, dt = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(p)$. Si h designa la convolución, $h = f_p * f_q$, haciendo $u = 0$ en la fórmula de convolución (44), y si $p > 1$ o $q > 1$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} f_q(y)\, dy = \Gamma(p)\Gamma(q). \tag{48}$$

Ahora calculemos la integral de la izquierda por otro camino. Dado que tanto f_p como f_q se anulan en el eje real negativo, tenemos

$$h(x) = \int_0^x f_p(t) f_q(x-t)\, dt = \begin{cases} e^{-x} \displaystyle\int_0^x t^{p-1} (x-t)^{q-1}\, dt & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

El cambio de varibale $t = ux$ nos da, para $x > 0$

$$h(x) = e^{-x} x^{p+q-1} \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1}\, du = e^{-x} x^{p+q-1} B(p, q).$$

Por consiguiente, $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dx = B(p, q) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p+q-1}\, dx = B(p, q)\Gamma(p + q)$ que, a la vista de (48), prueba (47) si $p > 1$ o $q > 1$. Para obtener el resultado siendo $p > 0$, o $q > 0$, usar la relación $pB(p, q) = (p + q)\, B(p + 1, q)$.

11.22 FÓRMULA DE SUMACIÓN DE POISSON

Terminamos este capítulo con una discusión de una fórmula importante, llamada la *fórmula de sumación de Poisson*, que tiene muchas aplicaciones. La fórmula puede expresarse de diversas maneras. Para las aplicaciones futuras, la más conveniente es la forma siguiente.

Teorema 11.24. *Sea f una función no negativa tal que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existe como integral de Riemann impropia. Supongamos además que f crece en $(-\infty, 0]$ y decrece en $[0, +\infty)$. Entonces tenemos*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{f(m+) + f(m-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi int}\,dt, \tag{49}$$

en donde cada una de las series es absolutamente convergente.

Demostración. La demostración hace uso del desarrollo en serie de Fourier de la función F definida por medio de la serie

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m+x). \tag{50}$$

Ante todo veremos que esta serie converge absolutamente para cada x y que la convergencia es uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

Dado que f decrece en $[0, +\infty]$ tenemos, para $x \geq 0$,

$$\sum_{m=0}^{N} f(m+x) \leq f(0) + \sum_{m=1}^{N} f(m) \leq f(0) + \int_0^{\infty} f(t)\,dt.$$

Por consiguiente, aplicando el criterio M de Weierstrass (teorema 9.6), la serie $\sum_{m=0}^{\infty} f(m+x)$ converge uniformemente en $[0, +\infty)$. Un argumento análogo prueba que la serie $\sum_{m=-\infty}^{-1} f(m+x)$ converge uniformemente en $(-\infty, 1]$. Por lo tanto la serie dada en (50) converge para todo x y la convergencia es uniforme en la intersección

$$(-\infty, 1] \cap [0, +\infty) = [0, 1].$$

La función suma F es periódica de período 1. Realmente tenemos $F(x+1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m+x+1)$, y esta serie es en realidad una reordenación de la serie dada en (50). Puesto que todos sus términos son no negativos, converge hacia la misma suma. Luego

$$F(x+1) = F(x).$$

Ahora vemos que F es de variación acotada en cada intervalo compacto. Si $0 < x \leq \frac{1}{2}$, entonces $f(m+x)$ es una función decreciente respecto de x si $m \geq 0$ y una función creciente respecto de x si $m < 0$. Por consiguiente tenemos

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m+x) - \sum_{m=-\infty}^{-1} \{-f(m+x)\},$$

luego F es la diferencia de dos funciones decrecientes. Por lo tanto F es de variación acotada en $[0, \frac{1}{2}]$. Un argumento análogo prueba que F es también de variación acotada en $[-\frac{1}{2}, 0]$. Por periodicidad, F es de variación acotada en cada intervalo compacto.

Consideremos ahora la serie de Fourier (en forma exponencial) generada por F, a saber

$$F(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{2\pi inx}.$$

Al ser F de variación acotada en $[0, 1]$ es integrable de Riemann en $[0, 1]$ y los coeficientes de Fourier vienen dados por la fórmula

$$\alpha_n = \int_0^1 F(x)e^{-2\pi inx}\,dx. \tag{51}$$

Además, al ser F de variación acotada en cada intervalo compacto, el criterio de Jordan prueba que la serie de Fourier converge para cada x y que

$$\frac{F(x+) + F(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi inx}. \tag{52}$$

Para obtener la fórmula de sumación de Poisson basta expresar los coeficientes α_n de otra forma. Utilicemos (50) y (51) e integremos término a término (lo cual está justificado por la convergencia uniforme) para obtener

$$\alpha_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(m+x)e^{-2\pi inx}\,dx.$$

El cambio de variables $t = m + x$ nos da

$$\alpha_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_m^{m+1} f(t)e^{-2\pi int}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi int}\,dt,$$

ya que $e^{2\pi imn} = 1$. Utilizando esto en (52) obtenemos

$$\frac{F(x+) + F(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi int}\,dt\right\} e^{2\pi inx}. \tag{53}$$

Cuando $x = 0$ esto se reduce a (49).

NOTA. En el teorema 11.24 no se impone la continuidad de f. Sin embargo, si f es continua en cada entero, entonces cada uno de los términos $f(m + x)$ de la serie (50) es continuo en $x = 0$ y entonces, en virtud de la convergencia uniforme, la función suma F es asimismo continua en 0. En este caso, (49) se convierte en

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi int}\,dt. \tag{54}$$

Es posible debilitar las exigencias de monotonía impuestas a f. Por ejemplo, dado que cada uno de los miembros de (49) depende linealmente de f, si el teorema es verdadero para f_1 y para f_2 entonces es verdadero para toda combinación lineal $a_1f_1 + a_2f_2$. En particular, la fórmula es válida para funciones complejas $f = u + iv$ si es válida para u y v separadamente.

Ejemplo 1. *Fórmula de transformación para la función theta.* La función θ se define para todo $x > 0$ por medio de la ecuación

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Utilizamos la fórmula de Poisson para deducir la ecuación de transformación

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{para } x > 0. \tag{55}$$

Para $\alpha > 0$ fijo, sea $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ para todo número real x. Esta función satisface todas las hipótesis del teorema 11.24 y es continua en todo $\mathbf{R}$. Por consiguiente, la fórmula de Poisson implica

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha m^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2}e^{2\pi int}\,dt. \tag{56}$$

El primer miembro es $\theta(\alpha/\pi)$. La integral del segundo es igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2}e^{2\pi int}\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-\alpha t^2}\cos 2\pi nt\,dt = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos\frac{2\pi nx}{\sqrt{\alpha}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\,F\left(\frac{\pi n}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

en donde

$$F(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2xy\,dx.$$

Pero $F(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-y^2}$ (ver ejercicio 10.22), luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2}e^{2\pi int}\,dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}.$$

Substituyendo este resultado en (56) y haciendo $\alpha = \pi x$ obtenemos (55).

Ejemplo 2. *Descomposición en fracciones parciales de coth x.* La cotangente hiperbólica, coth x, se define para $x \neq 0$ por medio de la ecuación

$$\coth x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Utilizaremos la fórmula de sumación de Poisson a fin de obtener la pseudodescomposición en fracciones parciales

$$\coth x = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \pi^2 n^2} \tag{57}$$

para $x > 0$. Para $\alpha > 0$ fijo, sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Entonces f satisface evidentemente las hipótesis del teorema 11.24. Además, f es continua en todo $\mathbf{R}$, excepto en 0, en donde $f(0+) = 1$ y $f(0-) = 0$. Por consiguiente, la fórmula de Poisson implica

$$\tfrac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t - 2\pi int}\,dt. \tag{58}$$

La suma del primer miembro es una serie geométrica cuya suma vale $1/(e^{\alpha} - 1)$, y la integral del segundo es igual a $1/(\alpha + 2\pi in)$. Por lo tanto (58) implica

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\alpha} - 1} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha + 2\pi in} + \frac{1}{\alpha - 2\pi in}\right),$$

y esto da (57) cuando se substituye α por x.

EJERCICIOS

Sistemas ortogonales

11.1 Verificar que el sistema trigonométrico dado en (1) es ortonormal en $[0, 2\pi]$.

11.2 Una colección finita de funciones $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ es *linealmente independiente* en $[a\ b]$ si la ecuación

$$\sum_{k=0}^{m} c_k\varphi_k(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \text{ de } [a, b]$$

implica $c_0 = c_1 = \ldots = c_m = 0$. Una colección infinita es linealmente independiente en $[a, b]$ si cada uno de sus subconjuntos finitos es linealmente independiente en $[a, b]$. Probar que cada sistema ortonormal en $[a, b]$ es linealmente independiente en $[a, b]$.

11.3 Este ejercicio describe el *procedimiento de Gram-Schmidt* que convierte un sistema linealmente independiente cualquiera en un sistema ortogonal. Sea $\{f_0, f_1, \ldots\}$

un sistema linealmente independiente en $[a, b]$ (tal como se definió en el ejercicio 11.2). Definimos un nuevo sistema $\{g_0, g_1, \ldots\}$ recurrentemente como sigue:

$$g_0 = f_0, \quad g_{r+1} = f_{r+1} - \sum_{k=1}^{r} a_k g_k,$$

en donde $a_k = (f_{r+1}, g_k)/(g_k, g_k)$ si $\|g_k\| \neq 0$, y $a_k = 0$ si $\|g_k\| = 0$. Probar que g_{n+1} es ortogonal a cada uno de los $g_0, g_1, \ldots, g_n$ para todo $n \geq 0$.

11.4 Con referencia al ejercicio 11.3, sea $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$. Aplicar el procedimiento de Gram-Schmidt al sistema de polinomios $\{1, t, t^2, \ldots\}$ en el intervalo $[-1, 1]$ y probar que

$$g_1(t) = t, \quad g_2(t) = t^2 - \tfrac{1}{3}, \quad g_3(t) = t^3 - \tfrac{3}{5}t, \quad g_4(t) = t^4 - \tfrac{6}{7}t^2 + \tfrac{3}{35}.$$

11.5 a) Supongamos $f \in \mathbf{R}$ en $[0, 2\pi]$, siendo f una función real que tiene período 2π. Probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua g de período 2π, de modo que $\|f - g\| < \varepsilon$. *Indicación*. Tomar una partición P_ε de $[0, 2\pi]$ para la cual f satisfaga la condición de Riemann $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$ y construir una función lineal a trozos g que concuerde con f en los puntos de P_ε.

b) Aplicar la parte (a) para ver que el teorema 11.16 (a), (b) y (c) se verifica si f es integrable de Riemann en $[0, 2\pi]$.

11.6 En este ejercicio suponemos que todas las funciones son continuas en un intervalo compacto $[a, b]$. Sea $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ un sistema ortonormal en $[a, b]$. a) Probar que las tres proposiciones siguientes son equivalentes.

1) $(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n)$ para todo n implica $f = g$. (Dos funciones distintas no pueden tener los mismos coeficientes de Fourier.)
2) $(f, \varphi_n) = 0$ para todo n implica $f = 0$. (La única función continua ortogonal a todas las φ_n es la función cero.)
3) Si T es un conjunto ortonormal en $[a, b]$ tal que $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\} \subseteq T$, entonces $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\} = T$. (No es posible ampliar el conjunto ortonormal.) Esta propiedad se designa diciendo que $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ es *maximal* o *total*.

b) Sea $\varphi_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, y verifíquese que el conjunto $\{e_n : n \in \mathbf{Z}\}$ es total en cada intervalo de longitud 2π.

11.7 Si $x \in \mathbf{R}$ y $n = 1, 2, \ldots$, sea $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$ y definamos

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_n(x) = \frac{1}{2^n n!} f_n^{(n)}(x).$$

Es claro que ϕ_n es un polinomio. Se llama *polinomio de Legendre* de orden n. Los cuatro primeros son

$$\phi_1(x) = x, \qquad \phi_2(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2},$$
$$\phi_3(x) = \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x, \qquad \phi_4(x) = \tfrac{35}{8}x^4 - \tfrac{15}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}.$$

Deducir las siguientes propiedades de los polinomios de Legendre:

a) $\phi_n'(x) = x\phi_{n-1}'(x) + n\phi_{n-1}(x)$.

b) $\phi_n(x) = x\phi_{n-1}(x) + \dfrac{x^2 - 1}{n}\phi_{n-1}'(x)$.

c) $(n + 1)\phi_{n+1}(x) = (2n + 1)x\phi_n(x) - n\phi_{n-1}(x)$.

d) ϕ_n satisface la ecuación diferencial $[(1 - x^2)y']' + n(n + 1)y = 0$.

e) $[(1 - x^2)\Delta(x)]' + [m(m + 1) - n(n + 1)]\phi_m(x)\phi_n(x) = 0$, en donde $\Delta = \phi_n\phi_m' - \phi_m\phi_n'$.

f) El conjunto $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ es ortogonal en $[-1, 1]$.

g) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \phi_n^2\,dx = \frac{2n - 1}{2n + 1}\int_{-1}^{1} \phi_{n-1}^2\,dx$.

h) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \phi_n^2\,dx = \frac{2}{2n + 1}$.

NOTA. Los polinomios

$$g_n(t) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\phi_n(t)$$

aparecen al aplicar el procedimiento de Gram-Schmidt al sistema $\{1, t, t^2, \ldots\}$ en el intervalo $[-1, 1]$ (ver ejercicio 11.4).

Series de Fourier trigonométricas

11.8 Supongamos que $f \in L([-\pi, \pi])$ y que f es periódica de período 2π. Probar que la serie de Fourier generada por f presenta las siguientes formas especiales si se verifican las condiciones enunciadas:

a) Si $f(-x) = f(x)$ cuando $0 < x < \pi$, entonces

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ en donde } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt.$$

b) Si $f(-x) = -f(x)$ cuando $0 < x < \pi$, entonces

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \text{ en donde } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt.$$

En los ejercicios que van del 11.9 al 11.15, probar que cada uno de los desarrollos es válido en el intervalo indicado. *Sugerencia*. Utilizar el ejercicio 11.8 y el teorema 11.16(c) cuando sea posible.

11.9 a) $x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$, si $0 < x < 2\pi$.

b) $\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, si $0 \le x \le 2\pi$.

NOTA. Cuando $x = 0$ esto da $\zeta(2) = \pi^2/6$.

11.10 a) $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}$, si $0 < x < \pi$.

b) $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, si $0 \le x \le \pi$.

11.11 a) $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\operatorname{sen} nx}{n}$, si $-\pi < x < \pi$.

b) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$, si $-\pi \le x \le \pi$.

11.12 $x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\operatorname{sen} nx}{n}\right)$, si $0 < x < 2\pi$.

11.13 a) $\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\operatorname{sen} 2nx}{4n^2-1}$, si $0 < x < \pi$.

b) $\operatorname{sen} x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$, si $0 < x < \pi$.

11.14 a) $x\cos x = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\operatorname{sen} nx}{n^2-1}$, si $-\pi < x < \pi$.

b) $x\operatorname{sen} x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}$, si $-\pi \le x \le \pi$.

11.15 a) $\log\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right| = -\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$, si $x \ne 2k\pi$

b) $\log\left|\cos\frac{x}{2}\right| = -\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n}$, si $x \ne (2k+1)\pi$.

c) $\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$, si $x \ne k\pi$.

11.16 a) Hallar una función continua en $[-\pi, \pi]$ que genere la serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-3}$ sen nx. Utilizar entonces la fórmula de Parseval para probar que $\zeta(6) = \pi^6/945$.

b) Utilizar una serie de Fourier apropiada juntamente con la fórmula de Parseval para probar que $\zeta(4) = \pi^4/90$.

11.17 Supongamos que f posee una derivada continua en $[0, 2\pi]$, que $f(0) = f(2\pi)$, y que $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Probar que $\|f'\| \ge \|f\|$, verificándose la igualdad si, y sólo si, $f(x) = a\cos x + b\operatorname{sen} x$. *Indicación.* Utilizar la fórmula de Parseval.

11.18 Una sucesión $\{\bar{B}_n\}$ de funciones periódicas (de período 1) está definida en $\mathbf{R}$ por medio de:

$$\bar{B}_{2n}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{k^{2n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\bar{B}_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 2\pi kx}{k^{2n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

($\bar{B}_n$ se llama *función de Bernoulli* de orden n.) Probar que:

a) $\bar{B}_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ si x no es entero. ($[x]$ es la parte entera $\le x$.)

b) $\int_0^1 \bar{B}_n(x)\,dx = 0$ si $n \ge 1$ y $\bar{B}'_n(x) = n\bar{B}_{n-1}(x)$ si $n \ge 2$.

c) $\bar{B}_n(x) = P_n(x)$ si $0 < x < 1$, en donde P_n es el n-ésimo polinomio de Bernoulli. (Ver ejercicio 9.38 para la definición de P_n.)

d) $\bar{B}_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ne 0}}^{\infty}\frac{e^{2\pi ikx}}{k^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$

11.19 Sea f una función de período 2π cuyos valores en $[-\pi, \pi]$ son

$f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$,
$f(x) = -1$ si $-\pi < x < 0$,
$f(x) = 0$ si $x = 0$ o $x = \pi$.

a) Probar que

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}, \qquad \text{para cada } x.$$

Éste es un ejemplo de una clase de series de Fourier que tiene una propiedad curiosa conocida como *fenómeno de Gibbs.* Este ejercicio está pensado para ilustrar este fenómeno. En lo que sigue, $s_n(x)$ designa la suma parcial n-ésima de la serie dada en la parte (a).

b) Probar que

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\operatorname{sen} 2nt}{\operatorname{sen} t}\,dt.$$

c) Probar que, en $(0, \pi)$, s_n tiene un máximo local en $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}$ y un mínimo local en $x_2, x_4, \ldots, x_{2n-2}$, en donde $x_m = \frac{1}{2}m\pi/n$ ($m = 1, 2, \ldots, 2n-1$).

d) Probar que $s_n(\frac{1}{2}\pi/n)$ es el mayor de los números

$$s_n(x_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

e) Interpretar $s_n(\frac{1}{2}\pi/n)$ como una suma de Riemann y demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$$

El valor del límite que interviene en (e) es, aproximadamente, 1,179. Entonces, a pesar de que f tenga un salto en el origen igual a 2, las gráficas de las curvas aproximaciones s_n tienden a aproximarse a un segmento vertical de longitud 2,358 en las proximidades del origen. Éste es el fenómeno de Gibbs.

11.20 Si $f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ y si f es de variación acotada en $[0, 2\pi]$, probar que $a_n = O(1/n)$ y $b_n = O(1/n)$. *Indicación*. Escribir $f = g - h$, en donde g y h son crecientes en $[0, 2\pi]$. Entonces

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\, d(\operatorname{sen} nx) - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\, d(\operatorname{sen} nx).$$

Ahora aplíquese el teorema 7.31.

11.21 Supongamos que $g \in L([a, \delta])$ para cada a de $(0, \delta)$ y supongamos que g satisface una condición de Lipschitz «por la derecha» en 0. (Ver la nota que sigue al teorema 11.9.) Probar que existe la integral de Lebesgue $\int_0^\delta |g(t) - g(0+)|/t\, dt$

11.22 Utilizar el ejercicio 11.21 para probar que la diferenciabilidad de f en un punto implica la convergencia de su serie de Fourier en dicho punto.

11.23 Sea g una función continua en $[0, 1]$ y supongamos que $\int_0^1 t^n g(t)\, dt = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Probar que:

a) $\int_0^1 g(t)^2\, dt = \int_0^1 g(t)(g(t) - P(t))\, dt$ para cada polinomio P.

b) $\int_0^1 g(t)^2\, dt = 0$. *Indicación*. Utilícese el teorema 11.17.

c) $g(t) = 0$ para cada t de $[0, 1]$.

11.24 Utilizar el teorema de aproximación de Weierstrass para demostrar cada una de las siguientes afirmaciones.

a) Si f es continua en $[1, +\infty]$ y si $f(x) \to a$ cuando $x \to +\infty$, entonces f se puede aproximar uniformemente en $[1, +\infty]$ por medio de una función g de la forma $g(x) = p(1/x)$, en donde p designa un polinomio.

b) Si f es continua en $[0, +\infty)$ y si $f(x) \to a$ cuando $x \to +\infty$, entonces f se puede aproximar uniformemente en $[0, +\infty]$ por medio de una función g de la forma $g(x) = p(e^{-x})$, en donde p es un polinomio.

11.25 Supongamos que $f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ y sea $\{\sigma_n\}$ la sucesión de medias aritméticas de las sumas parciales de dicha serie, tal como se hizo en (23). Probar que:

a) $$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

b) $$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2\, dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n-1} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2(a_k^2 + b_k^2).$$

c) Si f es continua en $[0, 2\pi]$ y tiene período 2π, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2(a_k^2 + b_k^2) = 0.$$

11.26 Consideremos la serie de Fourier (en forma exponencial) generada por una función f continua en $[0, 2\pi]$ y periódica de período 2π, esto es

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx}.$$

Supongamos además que la derivada $f' \in \mathbf{R}$ en $[0, 2\pi]$.

a) Probar que la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|\alpha_n|^2$ converge; utilizar entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz para deducir que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|$ converge.

b) Deducir de (a) que la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx}$ converge uniformemente hacia una función suma g continua en $[0, 2\pi]$. Probar entonces que $f = g$.

Integrales de Fourier

11.27 Si f satisface las hipótesis del teorema de la integral de Fourier, probar que

a) Si f es par, esto es, si $f(-t) = f(t)$ para cada t, entonces

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^\alpha \cos vx\left[\int_0^\infty f(u)\cos vu\, du\right] dv.$$

b) Si f es impar, esto es, si $f(-t) = -f(t)$ para cada t, entonces

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^\alpha \operatorname{sen} vx\left[\int_0^\infty f(u)\operatorname{sen} vu\, du\right] dv.$$

Utilizar el teorema de la integral de Fourier para calcular las integrales impropias del ejercicio 11.28 hasta el ejercicio 11.30. *Sugerencia*. Utilizar el ejercicio 11.27 cuando sea posible.

11.28 $$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} v \cos vx}{v}\, dv = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = 1. \end{cases}$$

11.29 $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2b} e^{-|a|b}, \qquad \text{si } b > 0.$$

Indicación. Aplicar el ejercicio 11.27 con $f(u) = e^{-b|u|}$.

11.30 $$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} ax}{1 + x^2}\, dx = \frac{a}{|a|}\frac{\pi}{2} e^{-|a|}, \qquad \text{si } a \neq 0.$$

11.31 a) Probar que

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = 2\int_0^{1/2} x^{p-1}(1 - x)^{p-1}\, dx.$$

b) Realizar un cambio conveniente de variables en (a) y deducir la fórmula de duplicación para la función Gamma:

$$\Gamma(2p)\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(p+\tfrac{1}{2}).$$

NOTA. En el ejercicio 10.30 hemos probado que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

11.32 Si $f(x) = e^{-x^2/2}$ y $g(x) = xf(x)$ para todo x, probar que

$$f(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos xy\,dx \qquad \text{y} \qquad g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g(x)\,\text{sen}\,xy\,dx.$$

11.33 Este ejercicio describe otra forma para la fórmula de sumación de Poisson. Supongamos que f es no negativa, decreciente, y continua en $[0, +\infty]$ y que $\int_0^\infty f(x)\,dx$ existe como integral de Riemann impropia. Sea

$$g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos xy\,dx.$$

Si α y β son números positivos tales que $\alpha\beta = 2\pi$, probar que

$$\sqrt{\alpha}\left\{\tfrac{1}{2}f(0) + \sum_{m=1}^{\infty} f(m\alpha)\right\} = \sqrt{\beta}\left\{\tfrac{1}{2}g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} g(n\beta)\right\}.$$

11.34 Probar que la fórmula de transformación (55) para $\theta(x)$ puede ponerse en la forma

$$\sqrt{\alpha}\left\{\tfrac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha^2 m^2/2}\right\} = \sqrt{\beta}\left\{\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta^2 n^2/2}\right\},$$

en donde $\alpha\beta = 2\pi$, $\alpha > 0$.

11.35 Si $s > 1$, probar que

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x}x^{s/2-1}\,dx$$

y deducir la fórmula

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \psi(x)x^{s/2-1}\,dx,$$

donde $2\psi(x) = \theta(x) - 1$. Usar esto y la fórmula de transformación para $\theta(x)$ para probar que

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} (x^{s/2-1} + x^{(1-s)/2-1})\psi(x)\,dx.$$

Transformadas de Laplace

Sea c un número positivo tal que la integral $\int_0^\infty e^{-ct}|f(t)|\,dt$ existe como integral de Riemann impropia. Sea $z = x + iy$, en donde $x > c$. Es fácil probar que la integral

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt}f(t)\,dt$$

existe como integral de Riemann impropia y también como integral de Lebesgue. La función F así definida se llama *transformada de Laplace* de f, designada por $\mathscr{L}(f)$. Los ejercicios siguientes describen algunas propiedades de las transformadas de Laplace

11.36 Verificar las entradas en la siguiente tabla de las transformadas de Laplace.

$f(t)$	$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt$	$z = x + iy$
$e^{\alpha t}$	$(z-\alpha)^{-1}$	$(x > \alpha)$
$\cos \alpha t$	$z/(z^2+\alpha^2)$	$(x > 0)$
$\text{sen}\,\alpha t$	$\alpha/(z^2+\alpha^2)$	$(x > 0)$
$t^p e^{\alpha t}$	$\Gamma(p+1)/(z-\alpha)^{p+1}$	$(x > \alpha, p > 0)$

11.37 Probar que la convolución $h = f * g$ toma la forma

$$h(t) = \int_0^{t} f(x)g(t-x)\,dx$$

cuando tanto f como g se anulan en el eje real negativo. Utilizar el teorema de convolución para transformadas de Fourier para demostrar que $\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f)\cdot\mathscr{L}(g)$.

11.38 Supongamos que f es continua en $(0, +\infty)$ y sea $F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt$ para $z = x + iy$, $x > c > 0$. Si $s > c$ y $a > 0$, probar que:

a) $F(s+a) = a\int_0^\infty g(t)e^{-at}\,dt$, en donde $g(x) = \int_0^x e^{-st}f(t)\,dt$.

b) Si $F(s+na) = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $f(t) = 0$ para $t > 0$. *Indicación.* Utilizar el ejercicio 11.23.

c) Si h es continua en $(0, +\infty)$ y si f y h tienen la misma transformada de Laplace, entonces $f(t) = h(t)$ para cada $t > 0$.

11.39 Sea $F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt$ para $z = x + iy$, $x > c > 0$. Sea t un punto en el que f satisface una de las condiciones «locales» (a) o (b) del teorema de la integral de Fourier (teorema 11.18). Probar que, para cada $a > c$, tenemos

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} e^{(a+iv)t}F(a+iv)\,dv.$$

Esta expresión se llama *fórmula de inversión para transformadas de Laplace*. El límite de la derecha se calcula usualmente con la ayuda del cálculo de residuos, tal como se describe en la sección 16.26. *Indicación.* Sea $g(t) = e^{-at}f(t)$ para $t \geq 0$, $g(t) = 0$ para $t < 0$, y aplíquese a g el teorema 11.9.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

11.1 Carslaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals,* 3.ª ed. Macmillan, London, 1930.
11.2 Edwards, R. E., *Fourier Series, A Modern Introduction,* Vol. 1. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967.
11.3 Hardy, G. H., y Rogosinski, W. W., *Fourier Series.* Cambridge University Press, 1950.
11.4 Hobson, E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series,* Vol. 1, 3.ª ed. Cambridge University Press, 1927.
11.5 Indritz, J., *Methods in Analysis.* Macmillan, New York, 1963.
11.6 Jackson, D., *Fourier Series and Orthogonal Polynomials.* Carus Monograph No. 6. Open Court, New York, 1941.
11.7 Rogosinski, W. E., *Fourier Series.* Traductores, H. Cohn y F. Steinhardt. Chelsea, New York, 1950.
11.8 Titchmarsh, E. C., *Theory of Fourier Integrals.* Oxford University Press, 1937.
11.9 Wiener, N., *The Fourier Integral.* Cambridge University Press, 1933.
11.10 Zygmund, A., *Trigonometrical Series,* 2.ª ed. Cambridge University Press, 1968.

CAPÍTULO 12

Cálculo diferencial de varias variables

12.1 INTRODUCCIÓN

Las derivadas parciales de funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^1$ fue discutido brevemente en el capítulo 5. También se introdujo el concepto de derivada de una función de $\mathbf{R}^1$ en $\mathbf{R}^n$. Este capítulo extiende la teoría de la derivación a las funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$.

Como ya se indicó en la sección 5.14, la derivada parcial es una generalización en cierto modo insatisfactoria de la derivada usual por cuanto la existencia de todas las derivadas parciales $D_1f, \ldots, D_nf$ en un punto particular no implica necesariamente la continuidad de f en dicho punto. El inconveniente de las derivadas parciales consiste en el hecho de que una función de varias variables es tratada en cada caso como una función de una sola variable. La derivada parcial describe la variación de una función en la dirección de cada uno de los ejes coordenados. Existe una ligera generalización, llamada la *derivada direccional,* que estudia la variación de una función en una dirección arbitraria. Se aplica tanto a funciones vectoriales reales como complejas.

12.2 LA DERIVADA DIRECCIONAL

Sea S un subconjunto de $\mathbf{R}^n$, y sea $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^m$ una función definida en S con valores en $\mathbf{R}^m$. Deseamos estudiar cómo varía $\mathbf{f}$ cuando pasamos, a lo largo de un segmento rectilíneo, de un punto $\mathbf{c}$ de S a un punto próximo $\mathbf{c}+\mathbf{u}$, en donde $\mathbf{u} \neq 0$. Cada uno de los puntos del segmento se puede expresar por medio de $\mathbf{c} + h\mathbf{u}$, en donde h es real. El vector $\mathbf{u}$ define la dirección del segmento rectilíneo. Suponemos que $\mathbf{c}$ es un *punto interior* de S. Entonces existe una bola n-dimensional $B(\mathbf{c}; r)$ contenida en S, y, si h es suficientemente pequeño, el segmento rectilíneo que une $\mathbf{c}$ con $\mathbf{c} + h\mathbf{u}$ está contenido en $B(\mathbf{c}; r)$ y por lo tanto en S.

Definición 12.1. *La derivada direccional de* $\mathbf{f}$ *en el punto* $\mathbf{c}$ *y en la dirección* $\mathbf{u}$, *designada por medio del símbolo* $\mathbf{f}'(\mathbf{c};\, \mathbf{u})$, *se define por la ecuación ecuación*

$$\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{c} + h\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{c})}{h}, \tag{1}$$

siempre que el límite de la derecha exista.

NOTA. Algunos autores imponen que $\|\mathbf{u}\| = 1$, pero aquí no lo hemos supuesto.

Ejemplos

1. La definición (1) es completamente significativa si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. En este caso $\mathbf{f}'(\mathbf{c};\, \mathbf{0})$ existe e igual a cero para todo $\mathbf{c}$ en S.
2. Si $\mathbf{u} = \mathbf{u}_k$ es el k-ésimo vector unitario coordenado, entonces $\mathbf{f}' = (\mathbf{c};\, \mathbf{u}_k)$ se denomina *derivada parcial* y se indica por $D_k\mathbf{f}(\mathbf{c})$. Cuando f- es un valor real, está conforme con la definición dada en el capítulo 5.
3. Si $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, entonces $\mathbf{f}'(\mathbf{c};\, \mathbf{u})$ existe si y sólo si $f'_k(\mathbf{c};\, \mathbf{u})$ existe para todo $k = 1, 2, \ldots, m$; en tal caso

$$\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = (f_1'(\mathbf{c}; \mathbf{u}), \ldots, f_m'(\mathbf{c}; \mathbf{u})).$$

   En particular, cuando $\mathbf{u} = \mathbf{u}_k$ encontramos

$$D_k\mathbf{f}(\mathbf{c}) = (D_kf_1(\mathbf{c}), \ldots, D_kf_m(\mathbf{c})). \tag{2}$$

4. Si $\mathbf{F}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{c} + t\mathbf{u})$, entonces $\mathbf{F}'(0) = \mathbf{f}'(\mathbf{c};\, \mathbf{u})$. Generalizando, $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{f}'(\mathbf{c} + t\mathbf{u};\, \mathbf{u})$ si ambas derivadas existen.
5. Si $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$, entonces

$$F(t) = f(\mathbf{c} + t\mathbf{u}) = (\mathbf{c} + t\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{c} + t\mathbf{u})$$
$$= \|\mathbf{c}\|^2 + 2t\mathbf{c} \cdot \mathbf{u} + t^2\|\mathbf{u}\|^2,$$

   así $F'(t) = 2\mathbf{c}\cdot\mathbf{u} + 2t\,\|\mathbf{u}\|^2$; de aquí $F'(0) = f'(\mathbf{c};\, \mathbf{u}) = 2\mathbf{c}\cdot\mathbf{u}$.
6. *Funciones lineales.* Una función $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ se llama *lineal* si $\mathbf{f}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mathbf{f}(\mathbf{x}) + b\mathbf{f}(\mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en $\mathbf{R}^n$ y todo par de escalares a y b. Si $\mathbf{f}$ es lineal, el cociente de la derecha de (1) se simplifica para $\mathbf{f}(\mathbf{u})$, así $\mathbf{f}'(\mathbf{c};\, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ para todo $\mathbf{c}$ y todo $\mathbf{u}$.

12.3 DERIVADAS DIRECCIONALES Y CONTINUIDAD

Si $\mathbf{f}'(\mathbf{c};\, \mathbf{u})$ existe en cada dirección $\mathbf{u}$, entonces en particular, todas las derivadas parciales $D_1f(\mathbf{c}), \ldots, D_nf(\mathbf{c})$ existen. Sin embargo, el recíproco es falso. Consideremos por ejemplo la función real $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0, \\ 1 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $D_1f(0, 0) = D_2f(0, 0) = 1$. A pesar de ello, si consideramos alguna otra dirección $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$, en donde $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$, entonces

$$\frac{f(\mathbf{0} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{h} = \frac{f(h\mathbf{u})}{h} = \frac{1}{h},$$

que carece de límite cuando $h \to 0$.

Un hecho realmente sorprendente es que una función puede tener derivada direccional finita $\mathbf{f}'(\mathbf{c};\, \mathbf{u})$ para *cada* $\mathbf{u}$ y en cambio no ser continua en $\mathbf{c}$. Por ejemplo, sea

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2/(x^2 + y^4) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Sea $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$ un vector cualquiera de $\mathbf{R}^2$. Tenemos entonces

$$\frac{f(\mathbf{0} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{h} = \frac{f(ha_1, ha_2)}{h} = \frac{a_1a_2^2}{a_1^2 + h^2a_2^4},$$

y de aquí, que

$$f'(\mathbf{0}; \mathbf{u}) = \begin{cases} a_2^2/a_1 & \text{si } a_1 \neq 0, \\ 0 & \text{si } a_1 = 0. \end{cases}$$

Luego, $f'(\mathbf{0};\, \mathbf{u})$ existe para todo $\mathbf{u}$. Por otro lado, la función f toma valor $\frac{1}{2}$ en cada punto de la parábola $x = y^2$ (excepto en el origen), luego f no es continua en (0, 0), ya que $f(0, 0) = 0$.

Vemos por lo tanto que la existencia de todas las derivadas direccionales en un punto no implica necesariamente la continuidad en dicho punto. Por esta razón, las derivadas direccionales, como ocurría con las derivadas parciales, constituyen una extensión en cierto modo poco satisfactoria del concepto de derivada unidimensional. Ello nos lleva a una generalización más conveniente que implica la continuidad y, al mismo tiempo, extiende los principales teoremas de la teoría de la derivada unidimensional al caso de las funciones de varias variables. Este concepto se llama la *derivada total.*

12.4 LA DERIVADA TOTAL

En el caso unidimensional, una función f con derivada en c se puede aproximar por medio de un polinomio lineal en las proximidades de c. De hecho, si $f'(c)$ existe, designamos por $E_c(h)$ la diferencia

$$E_c(h) = \frac{f(c + h) - f(c)}{h} - f'(c) \qquad \text{si } h \neq 0, \tag{3}$$

y sea $E_c(0) = 0$. Entonces tenemos

$$f(c + h) = f(c) + f'(c)h + hE_c(h), \tag{4}$$

ecuación que se verifica también si $h = 0$. Esta expresión se llama *fórmula de Taylor de primer orden* para aproximar a $f(c + h) - f(c)$ por medio de $f'(c)h$. El error cometido es $hE_c(h)$. De (3) vemos que $E_c(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. Se dice que el error $hE_c(h)$ tiene orden inferior a h cuando $h \to 0$.

Enfoquemos nuestra atención a dos propiedades de la fórmula (4). La primera nos indica que la cantidad $f'(c)h$ es una función *lineal* de h. Esto es, si escribimos $T_c(h) = f'(c)h$, entonces

$$T_c(ah_1 + bh_2) = aT_c(h_1) + bT_c(h_2).$$

La segunda nos dice que el error $hE_c(h)$ es de orden inferior a h cuando $h \to 0$. La derivada total de una función $\mathbf{f}$ de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$ se definirá a la vista de lo anterior de tal forma que se conserven estas dos propiedades.

Sea $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^m$ una función definida en un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ con valores en $\mathbf{R}^m$. Sea $\mathbf{c}$ un punto interior de S, y sea $B(\mathbf{c}; r)$ una n-bola contenida en S. Sea $\mathbf{v}$ un punto de $\mathbf{R}^n$ con $\|\mathbf{v}\| < r$, entonces $\mathbf{c} + \mathbf{v} \in B(\mathbf{c}; r)$.

Definición 12.2. *La función* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{c}$ *si existe una función lineal* $\mathbf{T}_c: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *tal que*

$$\mathbf{f}(\mathbf{c} + \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) + \mathbf{T}_c(\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|\, \mathbf{E}_c(\mathbf{v}), \tag{5}$$

en donde $\mathbf{E}_c(\mathbf{v}) \to \mathbf{0}$ *cuando* $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$.

NOTA. La ecuación (5) se llama una *fórmula de Taylor de primer orden*. Se verifica para todo $\mathbf{v}$ de $\mathbf{R}^n$ con $\|\mathbf{v}\| < r$. La función lineal $\mathbf{T}_c$ se llama la *derivada total* de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{c}$. La expresión (5) se escribe también en la forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{c} + \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) + \mathbf{T}_c(\mathbf{v}) + o(\|\mathbf{v}\|) \quad \text{cuando } \mathbf{v} \to \mathbf{0}.$$

El próximo teorema demuestra que, si la derivada total existe, es única. Relaciona también la derivada total con las derivadas direccionales.

Teorema 12.3. *Supongamos que* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{c}$ *con derivada total* $\mathbf{T}_c$. *Entonces, la derivada direccional* $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ *existe para cada* $\mathbf{u}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *y tenemos*

$$\mathbf{T}_c(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}). \tag{6}$$

Demostración. Si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{T}_c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Por consiguiente podemos suponer que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Hagamos $\mathbf{v} = h\mathbf{u}$ en la fórmula de Taylor (5), con $h \neq 0$, y obtendremos

$$\mathbf{f}(\mathbf{c} + h\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{T}_c(h\mathbf{u}) + \|h\mathbf{u}\|\, \mathbf{E}_c(\mathbf{v}) = h\mathbf{T}_c(\mathbf{u}) + |h|\, \|\mathbf{u}\|\, \mathbf{E}_c(\mathbf{v}).$$

Dividimos ahora por h y hacemos que $h \to 0$ y obtenemos (6).

Teorema 12.4. *Si* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{c}$, *entonces* $\mathbf{f}$ *es continua en* $\mathbf{c}$.

Demostración. Sea $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$ en la fórmula de Taylor (5). El término que da el error verifica $\|\mathbf{v}\|\, \mathbf{E}_c(\mathbf{v}) \to \mathbf{0}$; el término lineal $\mathbf{T}_a(\mathbf{v})$ tiende también a $\mathbf{0}$ puesto que si $\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + \ldots + v_n\mathbf{u}_n$, en donde $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ son los vectores coordenados unitarios, entonces por linealidad tenemos

$$\mathbf{T}_c(\mathbf{u}) = v_1\mathbf{T}_c(\mathbf{u}_1) + \cdots + v_n\mathbf{T}_c(\mathbf{u}_n),$$

y cada término de la derecha tiende a $\mathbf{0}$ cuando $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$.

NOTA. La derivada total $\mathbf{T}_c$ se escribe también $\mathbf{f}'(\mathbf{c})$ por analogía con la notación utilizada en la teoría unidimensional. Con esta notación, la fórmula de Taylor (5) toma la forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{c} + \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) + \mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|\, \mathbf{E}_c(\mathbf{v}), \tag{7}$$

en donde $\mathbf{E}_c(\mathbf{v}) \to \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$. Sin embargo, deberá tenerse en cuenta que $\mathbf{f}'(\mathbf{c})$ es una *aplicación lineal* y no un número. Está definida en todo $\mathbf{R}^n$; el vector $\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})$ es el valor de $\mathbf{f}'(\mathbf{c})$ en $\mathbf{v}$.

Ejemplo. Si $\mathbf{f}$ es una función lineal propia, entonces $\mathbf{f}(\mathbf{c} + \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) + \mathbf{f}(\mathbf{v})$; así la derivada $\mathbf{f}'(c)$ existe para todo $\mathbf{c}$ y es igual a $\mathbf{f}$. En otras palabras, la derivada total de una función lineal es la misma función.

12.5 LA DERIVADA TOTAL EXPRESADA POR MEDIO DE LAS DERIVADAS PARCIALES

El siguiente teorema demuestra que el vector $\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})$ es una combinación lineal de las derivadas parciales de $\mathbf{f}$.

Teorema 12.5. *Sea* $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^m$ *diferenciable en un punto interior* $\mathbf{c}$ *de* S, *con* $S \subseteq \mathbf{R}^n$. *Si* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + \ldots + v_n\mathbf{u}_n$, *en donde* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *son los vectores coordenados unitarios de* $\mathbf{R}^n$, *entonces*

$$\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n} v_k D_k \mathbf{f}(\mathbf{c}).$$

En particular, si f *es una función real* ($m = 1$) *tenemos*

$$f'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}, \tag{8}$$

producto escalar de $\mathbf{v}$ *con el vector*

$$\nabla f(\mathbf{c}) = (D_1 f(\mathbf{c}), \ldots, D_n f(\mathbf{c})).$$

Demostración. Si utilizamos la linealidad de $\mathbf{f}'(\mathbf{c})$ tenemos

$$\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}'(\mathbf{c})(v_k\mathbf{u}_k) = \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{u}_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}_k) = \sum_{k=1}^{n} v_k D_k \mathbf{f}(\mathbf{c}).$$

NOTA. El vector $\nabla f(\mathbf{c})$ que aparece en (8) se llama *vector gradiente* de f en $\mathbf{c}$. Está definido en cada punto en el que existen las derivadas parciales $D_1f, \ldots, D_nf$. La fórmula de Taylor de una función real f toma la forma

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{c}) + \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|) \quad \text{cuando } \mathbf{v} \to \mathbf{0}.$$

12.6 APLICACIÓN A LAS FUNCIONES COMPLEJAS

Sea $f = u + iv$ una función compleja de una variable compleja. El teorema 5.22 probaba que una condición necesaria para que f tenga derivada en el punto c es que existan las cuatro derivadas parciales D_1u, D_2u, D_1v, D_2v en c y se verifiquen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$D_1u(c) = D_2v(c), \qquad D_1v(c) = -D_2u(c).$$

Un ejemplo nos demostraba también que estas ecuaciones por ellas mismas no eran suficientes para la existencia de $f'(c)$. El próximo teorema demuestra que las ecuaciones de Cauchy-Riemann, junto con la diferenciabilidad de u y v, implican la existencia de $f'(c)$.

Teorema 12.6. *Sean u y v dos funciones reales definidas en un subconjunto S del plano complejo. Supongamos además que u y v son diferenciables en un punto interior c de S y que las derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en c. Entonces la función $f = u + iv$ tiene derivada en c. Además,*

$$f'(c) = D_1u(c) + iD_1v(c).$$

Demostración. Tenemos $f(z) - f(c) = u(z) - u(c) + i\{v(z) - v(c)\}$ para cada z de S. Puesto que tanto u como v son diferenciables en c, para z suficientemente próximo a c tenemos

$$u(z) - u(c) = \nabla u(c) \cdot (z - c) + o(\|z - c\|)$$

y

$$v(z) - v(c) = \nabla v(c) \cdot (z - c) + o(\|z - c\|).$$

Utilizamos aquí la notación vectorial y consideramos los números complejos como vectores de $\mathbf{R}^2$. Tenemos entonces

$$f(z) - f(c) = \{\nabla u(c) + i\,\nabla v(c)\} \cdot (z - c) + o(\|z - c\|).$$

Haciendo $z = x + iy$ y $c = a + ib$, obtenemos

$$\{\nabla u(c) + i\,\nabla v(c)\} \cdot (z - c)$$
$$= D_1u(c)(x - a) + D_2u(c)(y - b) + i\{D_1v(c)(x - a) + D_2v(c)(y - b)\}$$
$$= D_1u(c)\{(x - a) + i(y - b)\} + iD_1v(c)\{(x - a) + i(y - b)\},$$

en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Luego

$$f(z) - f(c) = \{D_1u(c) + iD_1v(c)\}\,(z - c) + o(\|z - c\|).$$

Dividiendo por $z - c$ y haciendo que $z \to c$ vemos que existe $f'(c)$ y que es igual a

$$D_1u(c) + iD_1v(c).$$

12.7 LA MATRIZ DE UNA FUNCIÓN LINEAL

En esta sección nos apartamos brevemente del tema para recordar algunos de los resultados elementales del Álgebra lineal que son útiles en ciertos cálculos en los que intervienen derivadas.

Sea $\mathbf{T}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una función lineal. (En nuestras aplicaciones, $\mathbf{T}$ será la derivada total de una función $\mathbf{f}$.) Probaremos que $\mathbf{T}$ determina una matriz $m \times n$, cuyos términos son escalares (ver la expresión (9) que se da a continuación), que se determina como sigue:

Sean $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ los vectores coordenados unitarios de $\mathbf{R}^n$. Si $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ tenemos $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n$ y, en virtud de la linealidad,

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{T}(\mathbf{u}_k).$$

Por consiguiente $\mathbf{T}$ está totalmente determinada por su acción sobre los vectores coordenados $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Supongamos ahora que $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ designan los vectores unitarios de $\mathbf{R}^m$. Puesto que $\mathbf{T}(\mathbf{u}_k) \in \mathbf{R}^m$, podemos escribir $\mathbf{T}(\mathbf{u}_k)$ como combinación lineal de $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$, siendo

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik}\mathbf{e}_i.$$

Los escalares $t_{1k}, \ldots, t_{mk}$ son las coordenadas de $\mathbf{T}(\mathbf{u}_k)$. Estos escalares se disponen en columna como sigue:

$$\begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \vdots \\ t_{mk} \end{bmatrix}.$$

Esta disposición se llama *vector columna*. Formamos el vector columna para cada uno de los vectores $\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_n)$ y se colocan uno al lado del otro para obtener la siguiente disposición

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Esta disposición se llama *matriz* de* $\mathbf{T}$ y se designa por medio de $m(\mathbf{T})$. Consta de m filas y n columnas. Los números de la k-ésima columna son las componentes de $\mathbf{T}(\mathbf{u}_k)$. Se utiliza también la notación

$$m(\mathbf{T}) = [t_{ik}]_{i,k=1}^{m,n} \qquad \text{o} \qquad m(\mathbf{T}) = (t_{ik})$$

para designar la matriz de (9).

Sean ahora $\mathbf{T}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $\mathbf{S}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ dos funciones lineales, tales que el dominio de $\mathbf{S}$ sea igual al recorrido de $\mathbf{T}$. Podemos formar entonces la función compuesta $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ definida por

$$(\mathbf{S} \circ \mathbf{T})(\mathbf{x}) = \mathbf{S}[\mathbf{T}(\mathbf{x})] \quad \text{para todo } \mathbf{x} \text{ de } \mathbf{R}^n.$$

La composición $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ también es lineal y aplica $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^p$.

Calculemos la matriz $m(\mathbf{S} \circ \mathbf{T})$. Designemos los vectores coordenados unitarios de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ y $\mathbf{R}^p$, respectivamente, por medio de

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \qquad \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p.$$

Supongamos que $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ tienen matrices (s_{ij}) y (t_{ij}), respectivamente. Esto significa que

$$\mathbf{S}(\mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^{p} s_{ik}\mathbf{w}_i \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, m$$

* Con mayor precisión, la matriz de T relativa a las bases dadas $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ de $\mathbf{R}^m$.

y

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_j) = \sum_{k=1}^{m} t_{kj}\mathbf{e}_k \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Entonces

$$(\mathbf{S} \circ \mathbf{T})(\mathbf{u}_j) = \mathbf{S}[\mathbf{T}(\mathbf{u}_j)] = \sum_{k=1}^{m} t_{kj}\mathbf{S}(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{m} t_{kj} \sum_{i=1}^{p} s_{ik}\mathbf{w}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} s_{ik}t_{kj} \right) \mathbf{w}_i$$

luego

$$m(\mathbf{S} \circ \mathbf{T}) = \left[\sum_{k=1}^{m} s_{ik}t_{kj} \right]_{i,j=1}^{p,n}.$$

En otras palabras, $m(\mathbf{S} \circ \mathbf{T})$ es una matriz $p \times n$ cuyo elemento perteneciente a la i-ésima fila y j-ésima columna es

$$\sum_{k=1}^{m} s_{ik}t_{kj},$$

que coincide con el producto escalar de la i-ésima fila de $m(\mathbf{S})$ con la j-ésima columna de $m(\mathbf{T})$. Esta matriz se llama también *producto* $m(\mathbf{S})m(\mathbf{T})$. Por lo tanto, $m(\mathbf{S} \circ \mathbf{T}) = m(\mathbf{S})m(\mathbf{T})$.

12.8 LA MATRIZ JACOBIANA

Ahora mostraremos cómo se presenta una conexión entre matrices y derivadas totales.

Sea $\mathbf{f}$ una función con valores en $\mathbf{R}^m$ diferenciable en un punto $\mathbf{c}$ de $\mathbf{R}^n$, y sea $\mathbf{T} = \mathbf{f}'(\mathbf{c})$ la derivada total de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{c}$. Para hallar la matriz de $\mathbf{T}$ consideremos su acción sobre los vectores coordenados unitarios $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. En virtud del teorema 12.3 tenemos

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}_k) = D_k\mathbf{f}(\mathbf{c}).$$

Para expresar esto como combinación lineal de los vectores coordenados unitarios $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ de $\mathbf{R}^m$ escribimos $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, luego $D_k\mathbf{f} = (D_kf_1, \ldots, D_kf_m)$, y entonces

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_k) = D_k\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{m} D_kf_i(\mathbf{c})\mathbf{e}_i.$$

Por consiguiente la matriz de $\mathbf{T}$ es $m(\mathbf{T}) = (D_k f_i(\mathbf{c}))$. Esta matriz se llama la *matriz jacobiana* de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{c}$ y se designa por $\mathbf{Df(c)}$. Esto es,

$$\mathbf{Df}(\mathbf{c}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{c}) & D_2 f_1(\mathbf{c}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{c}) \\ D_1 f_2(\mathbf{c}) & D_2 f_2(\mathbf{c}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{c}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{c}) & D_2 f_m(\mathbf{c}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{c}) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

El elemento de la i-ésima fila y k-ésima columna es $D_k f_i(\mathbf{c})$. Así pues, obtenemos la k-ésima columna diferenciando las componentes de $\mathbf{f}$ respecto del k-ésimo vector coordenado. La matriz jacobiana $\mathbf{Df(c)}$ está definida en todos los puntos $\mathbf{c}$ de $\mathbf{R}^n$ en los que existen todas las derivadas parciales $D_k f_i(\mathbf{c})$.

La k-ésima fila de la matriz jacobiana (10) es un vector de $\mathbf{R}^n$ llamado *vector gradiente* de f_k y designado por medio de $\nabla f_k(\mathbf{c})$. Esto es,

$$\nabla f_k(\mathbf{c}) = (D_1 f_k(\mathbf{c}), \ldots, D_n f_k(\mathbf{c})).$$

En el caso especial en que f es una función real ($m = 1$), la matriz jacobiana consta de una sola fila. En este caso $\mathbf{D}f(\mathbf{c}) = \nabla f(\mathbf{c})$, y la ecuación (8) del teorema 12.5 prueba que la derivada direccional $f'(\mathbf{c}; \mathbf{v})$ es el producto escalar del vector gradiente $\nabla f(\mathbf{c})$ por el vector dirección $\mathbf{v}$.

En el caso de una función vectorial $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ tenemos

$$\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) = \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{m} f_k'(\mathbf{c}; \mathbf{v})\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{m} \{\nabla f_k(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}\}\mathbf{e}_k, \tag{11}$$

por lo que el vector $\mathbf{f'(c)v}$ tiene componentes

$$(\nabla f_1(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}, \ldots, \nabla f_m(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}).$$

Así pues, las componentes de $\mathbf{f'(c)v}$ se obtienen efectuando el producto escalar de las sucesivas filas de la matriz jacobiana por el vector $\mathbf{v}$. Si consideramos $\mathbf{f'(c)v}$ como una matriz $1 \times m$, o vector fila, entonces $\mathbf{f'(c)v}$ es igual a la matriz producto $\mathbf{Df(c)v}$, en donde $\mathbf{Df(c)}$ es la matriz jacobiana $m \times n$ y $\mathbf{v}$ está considerado como una matriz $n \times 1$, o vector columna.

NOTA. La ecuación (11), usada junto con la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, nos da

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})\| = \left\|\sum_{k=1}^{m} \{\nabla f_k(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}\}\mathbf{e}_k\right\| \le \sum_{k=1}^{m} |\nabla f_k(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}| \le \|\mathbf{v}\| \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(\mathbf{c})\|.$$

Por consiguiente tenemos

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{v})\| \le M\|\mathbf{v}\|, \tag{12}$$

en donde $M = \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(\mathbf{c})\|$. Esta desigualdad será utilizada para demostrar la regla de la cadena. Demuestra también que $\mathbf{f'(c)(v)} \to \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$.

12.9 REGLA DE LA CADENA

Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ funciones tales que la compuesta $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ está definida en un entorno de un punto $\mathbf{a}$. La regla de la cadena nos dice cómo calcular la derivada total de $\mathbf{h}$ en función de las derivadas totales de $\mathbf{f}$ y de $\mathbf{g}$.

Teorema 12.7. *Supongamos que* $\mathbf{g}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$, *con derivada* $\mathbf{g}'(\mathbf{a})$. *Sea* $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ *y supongamos que* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{b}$, *con derivada total* $\mathbf{f}'(\mathbf{b})$. *Entonces la función compuesta* $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$, *y la derivada total* $\mathbf{h}'(\mathbf{a})$ *se obtiene por medio de*

$$\mathbf{h}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b}) \circ \mathbf{g}'(\mathbf{a}),$$

que es la composición de las funciones lineales $\mathbf{f}'(\mathbf{b})$ *y* $\mathbf{g}'(\mathbf{a})$.

Demostración. Consideramos la diferencia $\mathbf{h}(\mathbf{a} + \mathbf{y}) - \mathbf{h}(\mathbf{a})$ para $\|\mathbf{y}\|$ pequeño, y demostramos que tenemos una fórmula de Taylor de primer orden. Tenemos

$$\mathbf{h}(\mathbf{a} + \mathbf{y}) - \mathbf{h}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{a} + \mathbf{y})] - \mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{a})] = \mathbf{f}(\mathbf{b} + \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{b}), \tag{13}$$

en donde $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ y $\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{y}) - \mathbf{b}$. La fórmula de Taylor para $\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{y})$ implica

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|\, \mathbf{E_a}(\mathbf{y}), \quad \text{en donde } \mathbf{E_a}(\mathbf{y}) \to \mathbf{0} \text{ cuando } \mathbf{y} \to \mathbf{0}. \tag{14}$$

La fórmula de Taylor para $\mathbf{f}(\mathbf{b} + \mathbf{v})$ implica

$$\mathbf{f}(\mathbf{b} + \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})(\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|\, \mathbf{E_b}(\mathbf{v}), \text{en donde } \mathbf{E_b}(\mathbf{v}) \to \mathbf{0} \text{ cuando } \mathbf{v} \to \mathbf{0} \tag{15}$$

Utilizando (14) y (15) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{b} + \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{b}) &= \mathbf{f}'(\mathbf{b})[\mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{y})] + \mathbf{f}'(\mathbf{b})[\|\mathbf{y}\|\, \mathbf{E_a}(\mathbf{y})] + \|\mathbf{v}\|\, \mathbf{E_b}(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{f}'(\mathbf{b})[\mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{y})] + \|\mathbf{y}\|\, \mathbf{E}(\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{16}$$

en donde $\mathbf{E}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})[\mathbf{E_a}(\mathbf{y})] + \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{y}\|}\, \mathbf{E_b}(\mathbf{v}) \qquad \text{si } \mathbf{y} \ne \mathbf{0}. \tag{17}$$

Para terminar la demostración basta probar que $\mathbf{E}(\mathbf{y}) \to \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{y} \to \mathbf{0}$.

El primer término del segundo miembro de la igualdad (17) tiende a $\mathbf{0}$ cuando $\mathbf{y} \to \mathbf{0}$ puesto que $\mathbf{E}_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}) \to \mathbf{0}$. En el segundo término, el factor $\mathbf{E}_{\mathbf{b}}(\mathbf{v}) \to \mathbf{0}$ puesto que $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{y} \to \mathbf{0}$. Ahora vemos que el cociente $\|\mathbf{v}\|/\|\mathbf{y}\|$ permanece acotado cuando $\mathbf{y} \to \mathbf{0}$. Utilizando (14) y (12) para acotar el numerador obtenemos

$$\|\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{y})\| + \|\mathbf{y}\|\,\|\mathbf{E}_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})\| \le \|\mathbf{y}\|\{M + \|\mathbf{E}_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})\|\},$$

en donde $M = \sum_{k=1}^{m} \|\nabla g_k(\mathbf{a})\|$. Por lo tanto

$$\frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{y}\|} \le M + \|\mathbf{E}_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})\|,$$

luego $\|\mathbf{v}\|/\|\mathbf{y}\|$ permanece acotado cuando $\mathbf{y} \to \mathbf{0}$. Utilizando (13) y (16) obtenemos la fórmula de Taylor

$$\mathbf{h}(\mathbf{a} + \mathbf{y}) - \mathbf{h}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b})[\mathbf{g}'(\mathbf{a})(\mathbf{y})] + \|\mathbf{y}\|\,\mathbf{E}(\mathbf{y}),$$

en donde $\mathbf{E}(\mathbf{y}) \to \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{y} \to \mathbf{0}$. Esto prueba que $\mathbf{h}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ y que su derivada total en $\mathbf{a}$ es la función compuesta $\mathbf{f}'(\mathbf{b}) \circ \mathbf{g}'(\mathbf{a})$.

12.10 FORMA MATRICIAL DE LA REGLA DE LA CADENA

La regla de la cadena establece que

$$\mathbf{h}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{b}) \circ \mathbf{g}'(\mathbf{a}), \tag{18}$$

en donde $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$. Como la matriz de una composición es el producto de las matrices correspondientes, (18) implica la siguiente relación para matrices jacobianas:

$$\mathbf{Dh}(\mathbf{a}) = \mathbf{Df}(\mathbf{b})\mathbf{Dg}(\mathbf{a}). \tag{19}$$

Lo que se llama *forma matricial de la regla de la cadena.* Puede escribirse también por medio de un conjunto de ecuaciones escalares a fin de expresar cada matriz por medio de sus elementos.

Especificando, si $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^p$, $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a}) \in \mathbf{R}^n$ y $\mathbf{f}(\mathbf{b}) \in \mathbf{R}^m$, entonces $\mathbf{h}(\mathbf{a}) \in \mathbf{R}^m$ y podemos escribir

$$\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n), \qquad \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m), \qquad \mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_m).$$

Entonces $\mathbf{Dh}(\mathbf{a})$ es una matriz $m \times p$, $\mathbf{Df}(\mathbf{b})$ es una matriz $m \times n$, y $\mathbf{Dg}(\mathbf{a})$ es una matriz $n \times p$, dadas por

$$\mathbf{Dh}(\mathbf{a}) = [D_j h_i(\mathbf{a})]_{i,j=1}^{m,p}, \qquad \mathbf{Df}(\mathbf{b}) = [D_k f_i(\mathbf{b})]_{i,k=1}^{m,n}, \qquad \mathbf{Dg}(\mathbf{a}) = [D_j g_k(\mathbf{a})]_{k,j=1}^{n,p}.$$

La ecuación matricial (19) es equivalente a las mp ecuaciones escalares

$$D_j h_i(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f_i(\mathbf{b}) D_j g_k(\mathbf{a}), \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{y} \quad j = 1, 2, \ldots, p. \tag{20}$$

Estas ecuaciones expresan las derivadas parciales de las componentes de $\mathbf{h}$ en función de las derivadas parciales de las componentes de $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$.

La ecuación dada en (20) puede ponerse de forma que sea fácil de recordar. Escribimos $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{t})$. Entonces $\mathbf{y} = \mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{t})] = \mathbf{h}(\mathbf{t})$, y (20) se expresa

$$\frac{\partial y_i}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \tag{21}$$

en donde

$$\frac{\partial y_i}{\partial t_j} = D_j h_i, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = D_k f_i, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial x_k}{\partial t_j} = D_j g_k.$$

Ejemplo. Supongamos $m = 1$. Entonces ambas f y $h = f \circ \mathbf{g}$ son a valores reales y hay p ecuaciones en (20), una por cada derivada parcial de h:

$$D_j h(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{b}) D_j g_k(\mathbf{a}), \qquad j = 1, 2, \ldots, p.$$

El segundo miembro es el producto escalar de los dos vectores $\nabla f(\mathbf{b})$ y $D_j\mathbf{g}(\mathbf{a})$. En este caso la ecuación (21) toma la forma

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, p.$$

En particular, si $p = 1$, obtenemos solamente una ecuación,

$$h'(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{b}) g_k'(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{Dg}(\mathbf{a}),$$

donde la matriz jacobiana $\mathbf{Dg}(\mathbf{a})$ es un vector columna.

La regla de la cadena puede ser usada para dar una demostración sencilla del siguiente teorema, diferenciando una integral con respecto a un parámetro que aparece en el integrando y en los límites de integración.

Teorema 12.8. Sean f y D_2f continuas en un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$. Sean p y q diferenciables en $[c, d]$, donde $p(y) \in [a, b]$ y $q(y) \in [a, b]$ para cada y de $[c, d]$. Definida F por la ecuación

$$F(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y)\, dx, \qquad si\ y \in [c, d].$$

Existe entonces $F'(y)$ para cada y de (c, d) y está dada por

$$F'(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} D_2 f(x, y)\, dx + f(q(y), y)q'(y) - f(p(y), y)p'(y).$$

Demostración. Sea $G(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1}^{x_2} f(t, x_3)\, dt$ para todo x_1 y x_2 de $[a, b]$ y $x_3 \in [c, d]$. Entonces F es la función compuesta dada por $F(y) = G(p(y), q(y), y)$. La regla de la cadena implica

$$F'(y) = D_1G(p(y), q(y), y)p'(y) + D_2G(p(y), q(y), y)q'(y) + D_3G(p(y), q(y), y).$$

Por el teorema 7.32 tenemos $D_1G(x_1, x_2, x_3) = -f(x_1, x_3)$ y $D_2G(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3)$. Por el teorema 7.40 también tenemos

$$D_3G(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1}^{x_2} D_2 f(t, x_3)\, dt.$$

Utilizando estos resultados en la fórmula para $F'(y)$ obtenemos el teorema.

12.11 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA FUNCIONES DIFERENCIABLES

El teorema del valor medio para funciones de $\mathbf{R}^1$ en $\mathbf{R}^1$ establece que

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x), \tag{22}$$

en donde z está comprendida entre x e y. Esta ecuación es falsa, en general, para funciones vectoriales de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$, cuando $m > 1$. (Ver ejercicio 12.19.) Sin embargo, probaremos que se obtiene una ecuación correcta si se toma el producto escalar en cada uno de los miembros de (22) para un cierto vector de $\mathbf{R}^m$, ya que z se elige convenientemente. Esto proporciona una generalización verdaderamente útil del teorema del valor medio para funciones vectoriales.

En el enunciado del teorema se utiliza la notación $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para designar el segmento rectilíneo que une los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbf{R}^n$. Esto es

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y} : 0 \le t \le 1\}.$$

Teorema 12.9. (Teorema del valor medio). Sea S un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ y supongamos que $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^m$ es diferenciable en cada punto de S. Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos puntos de S tales que $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subseteq S$. Entonces para cada vector $\mathbf{a}$ de $\mathbf{R}^m$ existe un punto $\mathbf{z}$ de $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tal que

$$\mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\} = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}'(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\}. \tag{23}$$

Demostración. Sea $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$. Dado que S es abierto y que $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subseteq S$, existe un $\delta > 0$ tal que $\mathbf{x} + t\mathbf{u} \in S$ para todo t real del intervalo $(-\delta, 1+\delta)$. Sea $\mathbf{a}$ un vector fijo de $\mathbf{R}^m$ y sea F la función real definida en $(-\delta, 1+\delta)$ por medio de la ecuación

$$F(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{u}).$$

Entonces F es diferenciable en $(-\delta, 1+\delta)$ y su derivada viene dada por

$$F'(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x} + t\mathbf{u}; \mathbf{u}) = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}'(\mathbf{x} + t\mathbf{u})(\mathbf{u})\}.$$

Por el teorema usual del valor medio tenemos

$$F(1) - F(0) = F'(\theta), \quad \text{en donde } 0 < \theta < 1.$$

Ahora bien

$$F'(\theta) = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}'(\mathbf{x} + \theta\mathbf{u})(\mathbf{u})\} = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}'(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\},$$

en donde $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \theta\mathbf{u} \in L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Pero $F(1) - F(0) = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$, y esto nos proporciona (23). Además, el punto $\mathbf{z}$ depende de F, y por lo tanto de $\mathbf{a}$.

NOTA. Si S es convexo, entonces $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subseteq S$ para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ de S, por lo cual (23) se verifica para todos los $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de S.

Ejemplos

1. Si f es una función real ($m = 1$) podemos tomar $a = 1$ en (23), obteniendo

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}). \tag{24}$$

2. Si $\mathbf{f}$ es una función vectorial y si $\mathbf{a}$ es un vector unitario en $\mathbf{R}^m$, $\|\mathbf{a}\| = 1$, la ecuación (23) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dan

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \le \|\mathbf{f}'(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\|.$$

Empleando (12) obtenemos la desigualdad

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \le M\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|,$$

donde $M = \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(\mathbf{z})\|$. Obsérvese que M depende de $\mathbf{z}$ y por consiguiente de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

3. Si S es convexo y si todas las derivadas parciales $D_j f_k$ son acotadas en S, entonces existe una constante $A > 0$ tal que

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq A\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

En otras palabras, $\mathbf{f}$ satisface una condición de Lipschitz en S.

El teorema del valor medio permite dar una demostración simple del siguiente resultado concerniente a funciones con derivada total cero.

Teorema 12.10. *Sea S un subconjunto conexo y abierto de $\mathbf{R}^n$ y sea $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^m$ diferenciable en cada uno de los puntos de S. Si $\mathbf{f}'(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ para cada $\mathbf{c}$ de S, entonces $\mathbf{f}$ es constante en S.*

Demostración. Como sea que S es abierto y conexo, resulta que es poligonalmente conexo. (Ver sección 4.18.) Por consiguiente, cada par de puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de S se pueden unir por medio de un arco poligonal contenido en S. Designemos los vértices de este arco por medio de $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_r$, en donde $\mathbf{p}_1 = \mathbf{x}$ y $\mathbf{p}_r = \mathbf{y}$. Ya que cada segmento $L(\mathbf{p}_{i+1}, \mathbf{p}_i) \subseteq S$, el teorema del valor medio prueba que

$$\mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}(\mathbf{p}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{p}_i)\} = 0,$$

para cada vector $\mathbf{a}$. Sumando estas ecuaciones para $i = 1, 2, \ldots, r - 1$, obtenemos

$$\mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\} = 0,$$

para cada $\mathbf{a}$. Haciendo $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ obtenemos $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, luego $\mathbf{f}$ es constante en S.

12.12 UNA CONDICIÓN SUFICIENTE DE DIFERENCIABILIDAD

Hasta ahora hemos ido deduciendo consecuencias de la hipótesis de que una función sea diferenciable. Hemos visto también que ni la existencia de todas las derivadas parciales ni la existencia de todas las derivadas direccionales es suficiente para establecer la diferenciabilidad (puesto que no implican continuidad). El teorema que sigue prueba que la continuidad de todas menos una de las derivadas parciales implica la diferenciabilidad.

Teorema 12.11. *Supongamos que una de las derivadas parciales $D_1\mathbf{f}, \ldots, D_n\mathbf{f}$ existe en $\mathbf{c}$ y que las restantes $n - 1$ derivadas parciales existen en una cierta n-bola $B(\mathbf{c})$ y son continuas en $\mathbf{c}$. Entonces $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{c}$.*

Demostración. Ante todo conviene observar que una función vectorial $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ es diferenciable en $\mathbf{c}$ si, y sólo si, cada f_i, $i = 1, \ldots, m$, es diferenciable en $\mathbf{c}$. (La demostración de esta afirmación es un ejercicio fácil.) Por consiguiente, basta demostrar el teorema cuando $\mathbf{f}$ es real.

Para la demostración suponemos que $D_1 f(\mathbf{c})$ existe y que las derivadas parciales continuas son $D_2 f, \ldots, D_n f$.

El único candidato para $f'(\mathbf{c})$ es el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{c})$. Probaremos que

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{c}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|) \text{ cuando } \mathbf{v} \to \mathbf{0},$$

y esto probará el teorema. La idea consiste en expresar la diferencia $f(\mathbf{c}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{c})$ como una suma de n términos, en donde el k-ésimo término es una aproximación de $D_k f(\mathbf{c}) v_k$.

A este fin hacemos $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{y}$, en donde $\|\mathbf{y}\| = 1$ y $\lambda = \|\mathbf{v}\|$. Mantenemos λ suficientemente pequeño para que $\mathbf{c} + \mathbf{v}$ pertenezca a la bola $B(\mathbf{c})$ en la que las derivadas parciales $D_2 f, \ldots, D_n f$ existen. Expresando $\mathbf{y}$ en términos de sus componentes tenemos

$$\mathbf{y} = y_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + y_n \mathbf{u}_n,$$

en donde $\mathbf{u}_k$ es el k-ésimo vector coordenado unitario. Ahora escribimos la diferencia $f(\mathbf{c}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{c})$ como suma telescópica,

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{c}) = f(\mathbf{c} + \lambda \mathbf{y}) - f(\mathbf{c}) = \sum_{k=1}^{n} \{f(\mathbf{c} + \lambda \mathbf{v}_k) - f(\mathbf{c} + \lambda \mathbf{v}_{k-1})\}, \quad (25)$$

en donde

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_1 = y_1 \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_2 = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{v}_n = y_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + y_n \mathbf{u}_n.$$

El primer término de la suma es $f(\mathbf{c} + \lambda y_1 \mathbf{u}_1) - f(\mathbf{c})$. Dado que los dos puntos $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c} + \lambda y_1 \mathbf{u}_1$ difieren sólo en su primera componente, y dado que $D_1 f(\mathbf{c})$ existe, podemos escribir

$$f(\mathbf{c} + \lambda y_1 \mathbf{u}_1) - f(\mathbf{c}) = \lambda y_1 D_1 f(\mathbf{c}) + \lambda y_1 E_1(\lambda),$$

en donde $E_1(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to 0$.

Para $k \geq 2$, el k-ésimo término de la suma es

$$f(\mathbf{c} + \lambda \mathbf{v}_{k-1} + \lambda y_k \mathbf{u}_k) - f(\mathbf{c} + \lambda \mathbf{v}_{k-1}) = f(\mathbf{b}_k + \lambda y_k \mathbf{u}_k) - f(\mathbf{b}_k),$$

en donde $\mathbf{b}_k = \mathbf{c} + \lambda \mathbf{v}_{k-1}$. Los dos puntos $\mathbf{b}_k$ y $\mathbf{b}_k + \lambda y_k \mathbf{u}_k$ difieren sólo en su k-ésima componente, y podemos aplicar el teorema del valor medio unidimensional para derivadas a fin de obtener

$$f(\mathbf{b}_k + \lambda y_k \mathbf{u}_k) - f(\mathbf{b}_k) = \lambda y_k D_k f(\mathbf{a}_k), \quad (26)$$

en donde $\mathbf{a}_k$ pertenece al segmento rectilíneo que une $\mathbf{b}_k$ con $\mathbf{b}_k + \lambda y_k \mathbf{u}_k$. Obsérvese que $\mathbf{b}_k \to \mathbf{c}$ y por lo tanto $\mathbf{a}_k \to \mathbf{c}$ cuando $\lambda \to 0$. Puesto que cada $D_k f$ es continua en $\mathbf{c}$ para $k \geq 2$ podemos escribir

$$D_k f(\mathbf{a}_k) = D_k f(\mathbf{c}) + E_k(\lambda), \quad \text{en donde } E_k(\lambda) \to 0 \text{ cuando } \lambda \to 0.$$

Utilizando este resultado en (26) obtenemos que (25) se convierte en

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{c}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{c}) y_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k E_k(\lambda)$$
$$= \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\| E(\lambda),$$

en donde

$$E(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} y_k E_k(\lambda) \to 0 \text{ cuando } \|\mathbf{v}\| \to 0.$$

Esto termina la demostración.

NOTA. La continuidad de $n - 1$, por lo menos, de las derivadas parciales $D_1\mathbf{f}, \ldots, D_n\mathbf{f}$ en $\mathbf{c}$, si bien es suficiente, no es necesaria para la diferenciabilidad de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{c}$. (Ver ejercicios 12.5 y 12.6.)

12.13 UNA CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA IGUALDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES CRUZADAS

Las derivadas parciales $D_1\mathbf{f}, \ldots, D_n\mathbf{f}$ de una función de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$ son, a su vez, funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$ y pueden poseer derivadas parciales. Éstas se llaman derivadas parciales de *segundo orden.* Utilizaremos la notación introducida en el capítulo 5 para funciones reales:

$$D_{r,k}\mathbf{f} = D_r(D_k\mathbf{f}) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_r \partial x_k}.$$

Las derivadas parciales de orden superior se definen análogamente.

El ejemplo

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0,) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

prueba que $D_{1,2}f(x, y)$ no es necesariamente igual que $D_{2,1}f(x, y)$. Realmente en este ejemplo tenemos

$$D_1 f(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

y $D_1 f(0, 0) = 0$. Por lo tanto, $D_1 f(0, y) = -y$ para todo y y entonces

$$D_{2,1}f(0, y) = -1, \qquad D_{2,1}f(0, 0) = -1.$$

Por otro lado, tenemos

$$D_2 f(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

y $D_2 f(0, 0) = 0$, luego $D_2 f(x, 0) = x$ para todo x. Por consiguiente, $D_{1,2}f(x, 0) = 1$, $D_{1,2}f(0, 0) = 1$, y vemos que $D_{2,1}f(0, 0) \neq D_{1,2}f(0, 0)$.

El teorema que sigue nos da un criterio para determinar cuando las dos derivadas parciales cruzadas $D_{1,2}\mathbf{f}$ y $D_{2,1}\mathbf{f}$ son iguales.

Teorema 12.12. *Si las dos derivadas parciales $D_r\mathbf{f}$ y $D_k\mathbf{f}$ existen en una n-bola $B(\mathbf{c}, \delta)$ y ambas son diferenciables en $\mathbf{c}$, entonces*

$$D_{r,k}\mathbf{f}(\mathbf{c}) = D_{k,r}\mathbf{f}(\mathbf{c}). \tag{27}$$

Demostración. Si $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, entonces $D_k\mathbf{f} = (D_k f_1, \ldots, D_k f_m)$. Por lo tanto, es suficiente probar el teorema para funciones reales f. Además, dado que en (27) sólo se involucran dos componentes, basta considerar el caso $n = 2$. Para simplificar, suponemos que $\mathbf{c} = (0, 0)$. Probaremos que

$$D_{1,2}f(0, 0) = D_{2,1}f(0, 0).$$

Elijamos $h \neq 0$ tal que el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(h, 0)$, (h, h) y $(0, h)$ esté contenido en la 2-bola $B(\mathbf{0}; \delta)$. Consideremos la cantidad

$$\Delta(h) = f(h, h) - f(h, 0) - f(0, h) + f(0, 0).$$

Probaremos que $\Delta(h)/h^2$ tienden tanto hacia $D_{2,1}f(0, 0)$ como hacia $D_{1,2}f(0, 0)$ cuando $h \to 0$.

Sea $G(x) = f(x, h) - f(x, 0)$ y obsérvese que

$$\Delta(h) = G(h) - G(0). \tag{28}$$

En virtud del teorema del valor medio unidimensional tenemos

$$G(h) - G(0) = hG'(x_1) = h\{D_1 f(x_1, h) - D_1 f(x_1, 0)\}, \tag{29}$$

en donde x_1 ~~está comprendido~~ entre 0 y h. Como $D_1 f$ es diferenciable en $(0, 0)$, tenemos las fórmulas de Taylor de primer orden

$$D_1 f(x_1, h) = D_1 f(0, 0) + D_{1,1}f(0, 0)x_1 + D_{2,1}f(0, 0)h + (x_1^2 + h^2)^{1/2} E_1(h),$$

y
$$D_1f(x_1, 0) = D_1f(0, 0) + D_{1,1}f(0, 0)x_1 + |x_1|\, E_2(h),$$
en donde $E_1(h)$ y $E_2(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. Utilizando estos resultados en (28) y (29) obtenemos
$$\Delta(h) = D_{2,1}f(0, 0)h^2 + E(h),$$
en donde $E(h) = h(x_1^2 + h^2)^{1/2}E_1(h) + h|x_1|\, E_2(h)$. Puesto que $|x_1| \le |h|$, tenemos
$$0 \le |E(h)| \le \sqrt{2}\, h^2\, |E_1(h)| + h^2\, |E_2(h)|,$$
por lo tanto
$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = D_{2,1}f(0, 0).$$

Aplicando el mismo procedimiento a la función $H(y) = f(h, y) - f(0, y)$ en vez de a la función $G(x)$, obtenemos
$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = D_{1,2}f(0, 0),$$
que termina la demostración.

Como consecuencia de los teoremas 12.11 y 12.12 tenemos:

Teorema 12.13. *Si las dos derivadas parciales $D_r\mathbf{f}$ y $D_k\mathbf{f}$ existen en una n-bola $B(\mathbf{c})$, e igualmente existen las derivadas $D_{r,r}\mathbf{f}$, $D_{k,k}\mathbf{f}$ en $\mathbf{c}$, y las $D_{r,k}\mathbf{f}$ y $D_{k,r}\mathbf{f}$ que son continuas en $\mathbf{c}$, entonces*
$$D_{r,k}\mathbf{f}(\mathbf{c}) = D_{k,r}\mathbf{f}(\mathbf{c}).$$

NOTA. Mencionamos (sin demostración) otro resultado que establece que si $D_r\mathbf{f}$, $D_k\mathbf{f}$ y $D_{k,r}\mathbf{f}$ son continuas en una n-bola $B(\mathbf{c})$, entonces $D_{r,k}\mathbf{f}(\mathbf{c})$ existe y es igual a $D_{k,r}\mathbf{f}(\mathbf{c})$.

Si f es una función real de dos variables, hay que considerar cuatro derivadas parciales de segundo orden: a saber $D_{1,1}f$, $D_{1,2}f$, $D_{2,1}f$, y $D_{2,2}f$. Hemos demostrado que, si f se toma convenientemente restringida, sólo tres de ellas son distintas.

El número de derivadas parciales de orden k que es posible formar es 2^k. Si todas ellas son continuas en un cierto entorno del punto (x, y), entonces ciertas derivadas cruzadas serán iguales. Cada derivada parcial cruzada es de la forma $D_{r_1, \ldots, r_k}f$, en donde cada r_j vale 1 o 2. Si tenemos dos de tales derivadas parciales cruzadas, $D_{r_1, \ldots, r_k}f$ y $D_{p_1, \ldots, p_k}f$, en donde la k-pla $(r_1, \ldots, r_k)$ es una permutación de la k-pla $(p_1, \ldots, p_k)$, entonces las dos derivadas parciales serán iguales en (x, y) si las 2^k derivadas parciales son continuas en un entorno de (x, y). Esta afirmación es fácilmente demostrable por medio de la inducción matemática, utilizando el teorema 12.13 (que es el caso $k = 2$). Omitimos la demostración para k genérico. De todo esto se sigue que, en general, de entre las 2^k derivadas parciales cruzadas de orden k, sólo hay $k + 1$ *distintas*, a saber, las de la forma $D_{r_1, \ldots, r_k}f$, en donde la k-pla $(r_1, \ldots, r_k)$ toma una de las $k + 1$ formas siguientes:

$$(2, 2, \ldots, 2), \quad (1, 2, 2, \ldots, 2), \quad (1, 1, 2, \ldots, 2), \ldots, \quad (1, 1, \ldots, 1, 2), \quad (1, \ldots, 1).$$

Afirmaciones análogas se verifican, también, para funciones de n variables. En este caso, existen n^k derivadas parciales de orden k. La continuidad de todas estas derivadas parciales en un punto $\mathbf{x}$ implica que $D_{r_1, \ldots, r_k}f(\mathbf{x})$ no cambie cuando se permutan los índices $r_1, \ldots, r_k$. Cada r_i es ahora un número entero $\le n$.

12.14 FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE $\mathbf{R}^n$ EN $\mathbf{R}^1$

La fórmula de Taylor (teorema 5.19) se puede extender a funciones reales f definidas en subconjuntos de $\mathbf{R}^n$. En orden a establecer el teorema general en forma parecida al caso unidimensional, introducimos símbolos especiales
$$f''(\mathbf{x}; \mathbf{t}), \quad f'''(\mathbf{x}; \mathbf{t}), \ldots, f^{(m)}(\mathbf{x}; \mathbf{t}),$$
para ciertas sumas que aparecen en la fórmula de Taylor. Juegan el papel de las derivadas direccionales de orden superior, y se definen como sigue:

Si $\mathbf{x}$ es un punto de $\mathbf{R}^n$ en el que existen las derivadas parciales de segundo orden de f, y si $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ es un punto arbitrario de $\mathbf{R}^n$, se escribe
$$f''(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{i,j}f(\mathbf{x})t_j t_i.$$
Se define también
$$f'''(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{i,j,k}f(\mathbf{x})t_k t_j t_i$$
cuando existen todas las derivadas parciales de tercer orden en $\mathbf{x}$. El símbolo $f^{(m)}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ se define análogamente cuando existen todas las derivadas parciales de orden m.

Estas sumas son análogas a la fórmula
$$f'(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} D_if(\mathbf{x})t_i$$

para la derivada direccional de una función diferenciable en $\mathbf{x}$.

Teorema 12.14 (fórmula de Taylor). *Supongamos que f y todas sus derivadas parciales de orden $< m$ son diferenciables en cada punto de un subconjunto abierto S de $\mathbf{R}^n$. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son dos puntos de S tales que $L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq S$, entonces existe un punto $\mathbf{z}$ del segmento rectilíneo $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tal que*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\mathbf{a}; \mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{1}{m!} f^{(m)}(\mathbf{z}; \mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Demostración. Puesto que S es abierto, existe un $\delta > 0$ tal que $\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \in S$ para todo t real del intervalo $-\delta < t < 1 + \delta$. Se define g en $(-\delta, 1+\delta)$ por medio de la ecuación

$$g(t) = f[\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})].$$

Entonces $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = g(1) - g(0)$. Probaremos el teorema aplicando la fórmula de Taylor unidimensional a g, que nos permite escribir

$$g(1) - g(0) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{m!} g^{(m)}(\theta), \quad \text{en donde } 0 < \theta < 1. \quad (30)$$

Pero g es una función compuesta dada por $g(t) = f[\mathbf{p}(t)]$, en donde $\mathbf{p}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. La k-ésima componente de $\mathbf{p}$ tiene derivada $p_k'(t) = b_k - a_k$. Aplicando la regla de la cadena, vemos que $g'(t)$ existe en el intervalo $(-\delta, 1 + \delta)$ y viene dada por la fórmula

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{n} D_j f[\mathbf{p}(t)](b_j - a_j) = f'(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Aplicando de nuevo la regla de la cadena, tenemos

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{i,j} f[\mathbf{p}(t)](b_j - a_j)(b_i - a_i) = f''(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Análogamente, hallamos que $g^{(m)}(t) = f^{(m)}(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a})$. Utilizando estos resultados en (30) se obtiene el teorema, ya que el punto $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \in L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

EJERCICIOS

Funciones diferenciables

12.1 Sea S un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, y sea $f: S \to \mathbf{R}^n$ una función real con derivadas parciales $D_1 f, \ldots, D_n f$, finitas en S. Si f posee un máximo o un mínimo local en un punto $\mathbf{c}$ de S, probar que $D_k f(\mathbf{c}) = 0$ para cada k.

12.2 Calcular todas las derivadas parciales de primer orden y la derivada direccional $f'(\mathbf{x}; \mathbf{u})$ para cada una de las funciones reales definidas en $\mathbf{R}^n$ como sigue:

a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$, en donde $\mathbf{a}$ es un vector fijo de $\mathbf{R}^n$.

b) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^4$.

c) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{x})$, en donde $\mathbf{L}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es una función lineal.

d) $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, en donde $a_{ij} = a_{ji}$.

12.3 Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ funciones con valores en $\mathbf{R}^m$ tales que existen sus derivadas direccionales $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ y $\mathbf{g}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$. Probar que la suma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ y el producto escalar $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ tienen derivadas direccionales dadas por

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) + \mathbf{g}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$$

y

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}).$$

12.4 Si $S \subseteq \mathbf{R}^n$, sea $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^m$ una función con valores en $\mathbf{R}^m$, y pongamos $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$. Probar que $\mathbf{f}$ es diferenciable en un punto interior $\mathbf{c}$ de S si, y sólo si, cada f_i es diferenciable en $\mathbf{c}$.

12.5 Consideremos n funciones reales $f_1, \ldots, f_n$, cada una de ellas diferenciable en un intervalo abierto (a, b) de $\mathbf{R}$. Para cada punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ del intervalo abierto n-dimensional.

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) : a < x_k < b, \quad k = 1, 2, \ldots, n\},$$

definimos $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$. Probar que f es diferenciable en cada punto de S y que

$$f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_i) u_i, \quad \text{en donde } \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n).$$

12.6 Dadas n funciones reales $f_1, \ldots, f_n$ definidas en un conjunto abierto S de $\mathbf{R}^n$, para cada $\mathbf{x}$ de S, definimos $f(\mathbf{x}) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$ y suponemos que, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, existe el siguiente límite

$$\lim_{\substack{\mathbf{y} \to \mathbf{x} \\ y_k \neq x_k}} \frac{f_k(\mathbf{y}) - f_k(\mathbf{x})}{y_k - x_k}.$$

Llamemos a este límite $a_k(\mathbf{x})$. Probar que f es diferenciable en $\mathbf{x}$ y que

$$f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\mathbf{x})u_k \quad \text{si } \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n).$$

12.7 Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$. Supongamos que $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{c}$, que $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$, y que $\mathbf{g}$ es continua en $\mathbf{c}$. Sea $h(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Probar que h es diferenciable en $\mathbf{c}$ y que

$$h'(\mathbf{c})(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \cdot \{\mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{u})\} \quad \text{si } \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n.$$

12.8 Sea $\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definida por medio de la ecuación

$$\mathbf{f}(x, y) = (\text{sen}\, x \cos y, \quad \text{sen}\, x \,\text{sen}\, y, \quad \cos x \cos y).$$

Determinar la matriz jacobiana $\mathbf{Df}(x, y)$.

12.9 Probar que no existe ninguna función real f tal que $f'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) > 0$ para un punto fijo $\mathbf{c}$ de $\mathbf{R}^n$ y cada vector no nulo $\mathbf{u}$ de $\mathbf{R}^n$. Dar un ejemplo tal que $f'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) > 0$ para una dirección fija $\mathbf{u}$ y cada punto $\mathbf{c}$ de $\mathbf{R}^n$.

12.10 Sea $f = u + iv$ una función compleja tal que, para algún complejo c, exista la derivada $f'(c)$. Escribimos $z = c + re^{i\alpha}$ (en donde α es real y fijo) y hacemos que $r \to 0$ en el cociente incremental $[f(z) - f(c)]/(z - c)$ a fin de obtener

$$f'(c) = e^{-i\alpha}[u'(c; \mathbf{a}) + iv'(c; \mathbf{a})],$$

en donde $\mathbf{a} = (\cos \alpha, \text{ sen } \alpha)$, y $u'(c; \mathbf{a})$ y $v'(c; \mathbf{a})$ son derivadas direccionales. Sea $\mathbf{b} = (\cos \beta, \text{ sen } \beta)$, en donde $\beta = \alpha + \frac{1}{2}\pi$, y demostrar por medio de un razonamiento análogo que

$$f'(c) = e^{-i\alpha}[v'(c; \mathbf{b}) - iu'(c; \mathbf{b})].$$

Deducir que $u'(c; \mathbf{a}) = v'(c; \mathbf{b})$ y $v'(c; \mathbf{a}) = -u'(c; \mathbf{b})$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann (teorema 5.22) son un caso particular.

Gradientes y regla de la cadena

12.11 Sea f una función real y diferenciable en un punto $\mathbf{c}$ de $\mathbf{R}^n$, y supongamos que $\|\nabla f(\mathbf{c})\| \neq 0$. Probar que existe un vector unitario $\mathbf{u}$ de $\mathbf{R}^n$ y uno sólo tal que $|f'(\mathbf{c}; \mathbf{u})| = \|\nabla f(\mathbf{c})\|$, y que éste es el vector unitario para el cual $|f'(\mathbf{c}; \mathbf{u})|$ alcanza su máximo.

12.12 Calcular el vector gradiente $\nabla f(x, y)$ en los puntos (x, y) de $\mathbf{R}^2$ en los que exista:

a) $f(x, y) = x^2y^2 \ln (x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

b) $f(x, y) = xy \text{ sen } \dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

12.13 Sean f y g funciones reales definidas en $\mathbf{R}^1$ con derivadas segundas f'' y g'' continuas. Definimos

$$F(x, y) = f[x + g(y)] \text{ para cada } (x, y) \text{ de } \mathbf{R}^2.$$

Encontrar fórmulas para todas las derivadas parciales primeras y segundas de F en función de las derivadas de f y g. Verificar la relación

$$(D_1F)(D_{1,2}F) = (D_2F)(D_{1,1}F).$$

12.14 Dada una función f definida en $\mathbf{R}^2$, sea

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \text{ sen } \theta).$$

a) Suponer las propiedades adecuadas de diferenciabilidad de f y probar que

$$D_1F(r, \theta) = \cos \theta \, D_1f(x, y) + \text{sen}\, \theta \, D_2f(x, y),$$

$$D_{1,1}F(r, \theta) = \cos^2 \theta D_{1,1}f(x, y) + 2 \,\text{sen}\theta \cos \theta \, D_{1,2}f(x, y) + \text{sen}^2 \theta D_{2,2}f(x, y),$$

en donde $x = r \cos \theta$, $y = r \text{ sen } \theta$.

b) Encontrar fórmulas análogas para D_2F, $D_{1,2}F$, y $D_{2,2}F$.

c) Verificar la fórmula

$$\|\nabla f(r \cos \theta, r \,\text{sen}\, \theta)\|^2 = [D_1F(r, \theta)]^2 + \frac{1}{r^2}[D_2F(r, \theta)]^2.$$

12.15 Si f y g tienen vectores gradientes $\nabla f(\mathbf{x})$ y $\nabla g(\mathbf{x})$ en un punto $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$, probar que la función producto h definida por $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ posee también vector gradiente en $\mathbf{x}$ y que

$$\nabla h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}).$$

Establecer y demostrar un resultado análogo para el cociente f/g.

12.16 Sea f una función que posea derivada f' en cada punto de $\mathbf{R}^1$ y sea g una función definida en $\mathbf{R}^3$ por medio de la ecuación

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Si h designa la función compuesta $h = f \circ g$, probar que

$$\|\nabla h(x, y, z)\|^2 = 4g(x, y, z)\{f'[g(x, y, z)]\}^2.$$

12.17 Supongamos que f es diferenciable en cada punto (x, y) de $\mathbf{R}^2$. Sean g_1 y g_2 funciones definidas en $\mathbf{R}^3$ por medio de las ecuaciones

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad g_2(x, y, z) = x + y + z,$$

y sea $\mathbf{g}$ la función vectorial cuyos valores (en $\mathbf{R}^2$) vienen dados por

$$\mathbf{g}(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)).$$

Sea h la función compuesta $h = f \circ \mathbf{g}$ y probar que

$$\|\nabla h\|^2 = 4(D_1f)^2g_1 + 4(D_1f)(D_2f)g_2 + 3(D_2f)^2.$$

12.18 Sea f una función definida en un conjunto abierto S de $\mathbf{R}^n$. Se dice que f es homogénea de grado p sobre S si $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$ para cada λ real y para cada $\mathbf{x}$ de S para el que $\lambda\mathbf{x} \in S$. Si una función de este tipo es diferenciable en $\mathbf{x}$, probar que

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}).$$

NOTA. Este resultado se conoce con el nombre de *teorema de Euler* para funciones homogéneas. *Indicación*. Para $\mathbf{x}$ fijo, se define $g(\lambda) = f(\lambda\mathbf{x})$ y se calcula $g'(1)$.

También es posible demostrar el recíproco. Esto es, probar que si $\mathbf{x}\cdot\nabla f(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ de un conjunto abierto S, entonces f debe ser homogénea de grado p en S.

Teoremas del valor medio

12.19 Sea $\mathbf{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ definida por medio de la ecuación $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Entonces $\mathbf{f}'(t)(u) = u(-\operatorname{sen} t, \cos t)$ para cada u real. La fórmula del valor medio

$$\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}'(z)(y - x)$$

no se verifica para $x = 0$, $y = 2\pi$, ya que el primer miembro es cero y el miembro de la derecha es un vector de longitud 2π. No obstante, el teorema 12.9 establece que, para cada vector $\mathbf{a}$ de $\mathbf{R}^2$ existe un z del intervalo $(0, 2\pi)$ tal que

$$\mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x)\} = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}'(z)(y - x)\}.$$

Determinar z en función de $\mathbf{a}$ cuando $x = 0$ e $y = 2\pi$.

12.20 Sea f una función real diferenciable en una 2-bola $B(\mathbf{x})$. Considérese la función

$$g(t) = f[ty_1 + (1 - t)x_1, y_2] + f[x_1, ty_2 + (1 - t)x_2]$$

y demuéstrese que

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (y_1 - x_1)D_1f(z_1, y_2) + (y_2 - x_2)D_2f(x_1, z_2),$$

en donde $z_1 \in L(x_1, y_1)$ y $z_2 \in L(x_2, y_2)$.

12.21 Establecer y demostrar una generalización del resultado del ejercicio 12.20 para una función real diferenciable en una n-bola $B(\mathbf{x})$.

12.22 Sea f una función real y supongamos que la derivada direccional $f'(\mathbf{c}+t\mathbf{u}; \mathbf{u})$ existe para cada t del intervalo $0 \leq t \leq 1$. Probar que para un cierto θ del intervalo abierto $(0, 1)$ tenemos

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{c}) = f'(\mathbf{c} + \theta\mathbf{u}; \mathbf{u}).$$

12.23 a) Si f es una función real y si la derivada direccional $f'(\mathbf{x}; \mathbf{u}) = 0$ para cada $\mathbf{x}$ de una n-bola $B(\mathbf{c})$ y cada dirección $\mathbf{u}$, probar que f es constante en $B(\mathbf{c})$.
b) ¿Qué se puede deducir acerca de f si se sabe que $f'(\mathbf{x}; \mathbf{u}) = 0$ en una dirección fija $\mathbf{u}$ y para cada $\mathbf{x}$ de $B(\mathbf{c})$?

Derivadas de orden superior y fórmula de Taylor

12.24 Para cada una de las siguientes funciones, verificar que las derivadas parciales cruzadas $D_{1,2}f$ y $D_{2,1}f$ son iguales.
a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.
b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$.
c) $f(x, y) = \operatorname{tg}(x^2/y)$, si $y \neq 0$.

12.25 Sea f una función de dos variables. Utilizar la inducción y el teorema 12.13 para demostrar que, si las 2^k derivadas parciales de f de orden k son continuas en un entorno de un punto (x, y), entonces todas las derivadas parciales cruzadas de la forma $D_{r_1,\ldots,r_k}f$ y $D_{p_1,\ldots,p_k}f$ son iguales en (x, y) si la k-pla $(r_1, \ldots, r_k)$ contiene el mismo número de unos que la k-pla $(p_1, \ldots, p_k)$.

12.26 Si f es una función de dos variables que tiene derivadas parciales continuas de orden k en un cierto conjunto abierto S de $\mathbf{R}^2$, probar que

$$f^{(k)}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} t_1^r t_2^{k-r} D_{p_1},\ldots,_{p_k}f(\mathbf{x}), \qquad \text{si } \mathbf{x} \in S, \qquad \mathbf{t} = (t_1, t_2),$$

en donde en el r-ésimo término tenemos $p_1 = \ldots = p_r = 1$ y $p_{r+1} = \ldots = p_k = 2$. Utilizar este resultado para dar una nueva expresión de la fórmula de Taylor (teorema 12.14) en el caso $n = 2$.

NOTA. El símbolo $\binom{k}{r}$ es el coeficiente binómico $k!/[r!(k-r)!]$.

12.27 Utilizar la fórmula de Taylor para expresar las siguientes funciones como potencias de $(x - 1)$ e $(y - 2)$:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy^2$, b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

12.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol. 2, 2.ª ed. Ed. Reverté, S. A. Barcelona, Bogotá, Buenos Aires, Caracas, México.
12.2 Chaundy, T. W., *The Differential Calculus*. Clarendon Press, Oxford, 1935.
12.3 Woll, J. W., *Functions of Several Variables*. Harcourt Brace and World, New York, 1966.

CAPÍTULO 13

Funciones implícitas y problemas de extremos

13.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo consta de dos partes principales. La primera parte discute un importante teorema de Análisis llamado el *teorema de la función implícita*; la segunda parte trata de los problemas de extremos. Ambas partes utilizan los teoremas desarrollados en el capítulo 12.

El teorema de la función implícita en su forma más simple se refiere a una ecuación de la forma

$$f(x, t) = 0. \tag{1}$$

El problema consiste en decidir cuándo dicha ecuación determina a x como función de t. En cuyo caso tenemos

$$x = g(t),$$

para una cierta función g. Se dice que g está definida «implícitamente» por (1).

El problema toma una forma más general cuando se considera un sistema de varias ecuaciones en las que intervienen varias variables y nos preguntamos si se pueden resolver dichas ecuaciones para algunas de esas variables en función de las restantes variables. Éste es el mismo problema que el planteado anteriormente a excepción de que x y t se reemplazan por vectores, y f y g se reemplazan por funcions vectoriales. Bajo condiciones bastante generales, siempre existe una solución. El teorema de la función implícita proporciona una descripción de estas condiciones y ciertas conclusiones acerca de la solución.

Un caso particular importante lo constituye un problema familiar de Álgebra que consiste en resolver n ecuaciones lineales de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

en donde los a_{ij} y los t_i son números y $x_1, \ldots, x_n$ representan las incógnitas. En Álgebra lineal se demuestra que un sistema de este tipo posee solución única si, y sólo si, el determinante de la matriz de los coficientes $A = [a_{ij}]$ es no nulo.

NOTA. El determinante de una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ se designa por det A o por det $[a_{ij}]$. Si det $[a_{ij}] \neq 0$, la solución de (2) se puede obtener aplicando la regla de Cramer que expresa cada x_k como cociente de dos determinantes, a saber $x_k = A_k/D$, en donde $D = \det [a_{ij}]$ y A_k es el determinante de la matriz obtenida reemplazando la k-ésima columna de $[a_{ij}]$ por $t, \ldots, t_n$. (Para una demostración de la regla de Cramer, ver la referencia 13.1, teorema 3.14.) En particular, si cada $t_i = 0$, entonces cada $x_k = 0$.

A continuación vemos cómo el sistema (2) se puede escribir en la forma (1). Cada ecuación de (2) tiene la forma

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = 0 \text{ en donde } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n),$$

y

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - t_i.$$

Por consiguiente, el sistema (2) se puede expresar como una ecuación vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$, en donde $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Si D_jf_j designa la derivada parcial de f_i con respecto a la j-ésima coordenada x_j, es $D_jf_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = a_{ij}$. Entonces la matriz de los coeficientes $A = [a_{ij}]$ que intervienen en (2) es una matriz jabociana. El Álgebra lineal nos dice que (2) tiene solución única si el determinante de esta matriz jacobiana es no nulo.

En el teorema general de la función implícita, la no anulación del determinante de una matriz jacobiana juega un papel muy importante. Esto resulta de haber aproximado $\mathbf{f}$ por medio de una función lineal. La ecuación $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ es reemplazada por un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es la matriz jacobiana de $\mathbf{f}$.

NOTACIÓN. Si $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ y $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, la matriz jacobiana $\mathbf{Df}(\mathbf{x}) = [D_jf_i(x)]$ es una matriz $n \times n$. Su determinante se llama *determinante jacobiano* y se designa por medio de $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$. Entonces,

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \det \mathbf{Df}(\mathbf{x}) = \det [D_jf_i(\mathbf{x})].$$

La notación

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)},$$

se utiliza también para designar el determinante jacobiano $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$.

El siguiente teorema relaciona el determinante jacobiano de una función compleja con su derivada.

Teorema 13.1. *Si $f = u + iv$ es una función compleja con una derivada en un punto z de* $\mathbf{C}$, *entonces* $J_f(z) = |f'(z)|^2$.

Demostración. Tenemos $f'(z) = D_1u + iD_1v$, luego $|f'(z)|^2 = (D_1u)^2 + (D_1v)^2$. Entonces

$$J_f(z) = \det \begin{bmatrix} D_1u & D_2u \\ D_1v & D_2v \end{bmatrix} = D_1u\, D_2v - D_1v\, D_2u = (D_1u)^2 + (D_1v)^2,$$

en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

13.2 FUNCIONES CON DETERMINANTE JACOBIANO NO NULO

Esta sección da algunas propiedades de funciones con determinante jacobiano no nulo en ciertos puntos. Estos resultados serán utilizados más tarde en la demostración del teorema de la función implícita.

Teorema 13.2. *Sea $B = B(\mathbf{a}; r)$ una n-bola de $\mathbf{R}^n$, y designemos por ∂B su frontera,*

$$\partial B = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}$$

y sea $\bar{B} = B \cup \partial B$ su adherencia. Sea $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ continua en $\bar{B}$, y supongamos que todas las derivadas parciales $D_jf_i(\mathbf{x})$ existen si $\mathbf{x} \in B$. Supongamos además que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{a})$ si $\mathbf{x} \in \partial B$ y que el determinante jacobiano $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$ para cada $\mathbf{x}$ de B. Entonces $\mathbf{f}(B)$, la imagen de B por medio de $\mathbf{f}$, contiene una n-bola con centro en $\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Demostración. Definimos una función real g en ∂B como sigue:

$$g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| \qquad \text{si } \mathbf{x} \in \partial B.$$

Entonces $g(\mathbf{x}) > 0$ para cada $\mathbf{x}$ de ∂B puesto que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{a})$ si $\mathbf{x} \in \partial B$. Además, g es continua en ∂B ya que $\mathbf{f}$ es continua en $\bar{B}$. Dado que ∂B es compacto, g alcanza su mínimo absoluto (llamado m) en algún punto de ∂B. Obsérvese que $m > 0$ ya que g es positiva en ∂B. Sea T la n-bola

$$T = B\left(\mathbf{f}(\mathbf{a}); \frac{m}{2}\right).$$

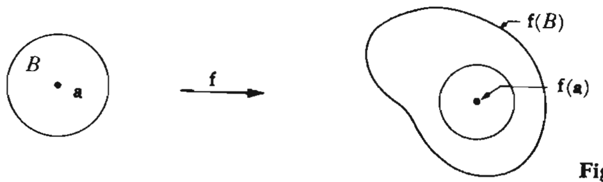


Figura 13.1

Probaremos que $T \subseteq \mathbf{f}(B)$ y esto probará el teorema. (Ver fig. 13.1.)

Para ello demostramos que $\mathbf{y} \in T$ implica $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(B)$. Elegimos un punto $\mathbf{y}$ de T, mantenemos $\mathbf{y}$ fijo, y definimos una nueva función real h en $\bar{B}$ como sigue:

$$h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \in \bar{B}.$$

Entonces h es continua en el conjunto compacto $\bar{B}$ y por lo tanto alcanza su mínimo absoluto en $\bar{B}$. Veremos que h alcanza su mínimó en un cierto punto de la n-bola abierta B. En el centro tenemos

$$h(\mathbf{a}) = \| \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{y}\| < \frac{m}{2}$$

ya que $\mathbf{y} \in T$. Luego el valor mínimo de h en $\bar{B}$ debe ser también $< m/2$. Pero en cada punto $\mathbf{x}$ de la frontera ∂B tenemos

$$h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - (\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{a}))\|$$

$$\geq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| - \|\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{y}\| > g(\mathbf{x}) - \frac{m}{2} \geq \frac{m}{2},$$

luego el mínimo de h no puede ocurrir en la frontera de ∂B. Por lo tanto existe un punto interior $\mathbf{c}$ de B en el que h alcanza su mínimo. En este punto el cuadrado de h también tiene un mínimo. Puesto que

$$h^2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^2 = \sum_{r=1}^{n} [f_r(\mathbf{x}) - y_r]^2,$$

y dado que cada derivada parcial $D_k(h^2)$ debe ser cero en $\mathbf{c}$, debemos tener

$$\sum_{r=1}^{n} [f_r(\mathbf{c}) - y_r] D_k f_r(\mathbf{c}) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Pero éste es un sistema de ecuaciones lineales cuyo determinante $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{c})$ no es cero, ya que $\mathbf{c} \in B$. Por consiguiente $f_r(\mathbf{c}) = y_r$ para cada r, o $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{y}$. Esto es, $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(B)$. Luego $T \subseteq \mathbf{f}(B)$ y esto termina la demostración.

Una función $f: S \to T$ de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T) se llama una *aplicación abierta* si, para cada conjunto abierto A de S, la imagen $f(A)$ es abierta en T.

El teorema que sigue da una condición suficiente para que una función aplique conjuntos abiertos en conjuntos abiertos. (Ver también el teorema 13.5.)

Teorema 13.3. *Sea A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ y supongamos que $\mathbf{f}: A \to \mathbf{R}^n$ es continua y tiene derivadas parciales $D_j f_i$ finitas en A. Si $\mathbf{f}$ es uno a uno en A y si $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$ para cada $\mathbf{x}$ de A, entonces $\mathbf{f}(A)$ es abierto.*

Demostración. Si $\mathbf{b} \in \mathbf{f}(A)$, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ para algún $\mathbf{a}$ de A. Existe una n-bola $B(\mathbf{a}; r) \subseteq A$ en la que $\mathbf{f}$ satisface las hipótesis del teorema 13.2, luego $\mathbf{f}(B)$ contiene una n-bola centrada en $\mathbf{b}$. Por consiguiente, $\mathbf{b}$ es un punto interior de $\mathbf{f}(A)$, luego $\mathbf{f}(A)$ es abierto.

El teorema que sigue prueba que una función con derivadas parciales continuas es localmente uno a uno en las proximidades de un punto en el que no se anula el determinante jacobiano.

Teorema 13.4. *Supongamos que $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ posee derivadas parciales $D_j f_i$ continuas en un conjunto abierto S de $\mathbf{R}^n$, y que el determinante jacobiano $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$ para un cierto punto $\mathbf{a}$ de S. Entonces existe una n-bola $B(\mathbf{a})$ en la que $\mathbf{f}$ es uno a uno.*

Demostración. Sean $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_n$ n puntos de S y sea $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_n)$ el punto de $\mathbf{R}^{n^2}$ cuyas n primeras componentes son las componentes de $\mathbf{Z}_1$, cuyas n componentes siguientes son las de $\mathbf{Z}_2$, y así sucesivamente. Definimos una función real h como sigue:

$$h(\mathbf{Z}) = \det [D_j f_i(\mathbf{Z}_i)].$$

Esta función es continua en aquellos puntos $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{R}^{n^2}$ en donde $h(\mathbf{Z})$ está definida puesto que $D_j f_i$ es continua en S y un determinante es un polinomio en sus n^2 elementos. Sea $\mathbf{Z}$ el punto de $\mathbf{R}^{n^2}$ obtenido haciendo

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \cdots = \mathbf{Z}_n = \mathbf{a}.$$

Entonces $h(\mathbf{Z}) = J_f(\mathbf{a}) \neq 0$ y entonces, por continuidad, existe una n-bola $B(\mathbf{a})$ tal que $\det [D_j f_i(\mathbf{Z}_i)] \neq 0$ si cada $\mathbf{Z}_i \in B(\mathbf{a})$. Demostraremos que $\mathbf{f}$ es uno a uno en $B(\mathbf{a})$.

Supongamos lo contrario. Esto es, supongamos que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ para un cierto par de puntos $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ de $B(\mathbf{a})$. Dado que $B(\mathbf{a})$ es convexo, el segmento rectilíneo $L(\mathbf{x},\mathbf{y}) \subseteq B(\mathbf{a})$ y podemos aplicar el teorema del valor medio a cada componente de $\mathbf{f}$ para escribir

$$0 = f_i(\mathbf{y}) - f_i(\mathbf{x}) = \nabla f_i(\mathbf{Z}_i)\cdot(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n,$$

en donde cada $\mathbf{Z}_i \in L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y entonces $\mathbf{Z}_i \in B(\mathbf{a})$. (El teorema del valor medio es aplicable puesto que $\mathbf{f}$ es diferenciable en S.) Pero éste es un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)a_{ik} = 0 \qquad \text{con } a_{ik} = D_k f_i(\mathbf{Z}_i).$$

El determinante de este sistema no es cero, ya que $\mathbf{Z}_i \in B(\mathbf{a})$. Luego $y_k - x_k = 0$ para cada k, y esto contradice la hipótesis de que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Hemos demostrado, por consiguiente, que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ implica $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{y})$ y por ello $\mathbf{f}$ es uno a uno en $B(\mathbf{a})$.

NOTA. El lector deberá tener en cuenta que el teorema 13.4 es un teorema *local* y no un teorema global. La no anulación de $J_f(\mathbf{a})$ garantiza que $\mathbf{f}$ es uno a uno en un entorno de $\mathbf{a}$. No se deduce que $\mathbf{f}$ es uno a uno en S, aun cuando $J_f(\mathbf{x}) \neq 0$ para cada $\mathbf{x}$ de S. El ejemplo que sigue ilustra este punto. Sea $\mathbf{f}$ la función compleja definida por $f(z) = e^z$ si $z \in \mathbf{C}$. Si $z = x + iy$ tenemos

$$J_f(z) = |f'(z)|^2 = |e^z|^2 = e^{2x}.$$

Entonces $J_f(z) \neq 0$ para cada z de $\mathbf{C}$. Sin embargo, f no es uno a uno en $\mathbf{C}$ puesto que $f(z_1) = f(z_2)$ para cada par de puntos z_1 y z_2 que difieran en $2\pi i$.

El teorema que sigue da una propiedad global de las funciones con determinante jacobiano no nulo.

Teorema 13.5. *Si A es subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ y suponemos que $\mathbf{f}: A \to \mathbf{R}^n$ tiene derivadas parciales continuas $D_j f_i$ en A y si $J_f(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x}$ de A, entonces $\mathbf{f}$ es una aplicación abierta.*

Demostración. Sea S un subconjunto abierto de A. Si $\mathbf{x} \in S$ existe una n-bola $B(\mathbf{x})$ en la que $\mathbf{f}$ es uno a uno (por el teorema 13.4). Por consiguiente, por el teorema 13.3, la imagen $\mathbf{f}(B(\mathbf{x}))$ es abierta en $\mathbf{R}^n$. Pero podemos escribir $S = \bigcup_{\mathbf{x}\in S} B(\mathbf{x})$. Aplicando $\mathbf{f}$ obtenemos $\mathbf{f}(S) = \bigcup_{\mathbf{x}\in S} \mathbf{f}(B(\mathbf{x}))$, luego $\mathbf{f}(S)$ es abierto.

NOTA. Si una función $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ tiene derivadas parciales continuas en un conjunto S, decimos que $\mathbf{f}$ es *continuamente diferenciable* en S, y se escribe $\mathbf{f} \in C'$ en S. A la vista del teorema 12.11 resulta que la diferenciabilidad con continuidad en un punto implica la diferenciabilidad en ese punto.

El teorema 13.4 prueba que una función diferenciable con continuidad con jacobiano no nulo en un punto $\mathbf{a}$ admite una inversa local en un entorno de $\mathbf{a}$. El teorema que sigue da algunas de las propiedades locales de diferenciabilidad de esta función inversa local.

13.3 EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Teorema 13.6. *Supongamos que $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in C'$ en un conjunto abierto S de $\mathbf{R}^n$, y sea $T = \mathbf{f}(S)$. Si el determinante jacobiano $\mathbf{J}_f(\mathbf{a}) \neq 0$ en un punto $\mathbf{a}$ de S, entonces existen dos* conjuntos abiertos *$X \subseteq S$ e $Y \subseteq T$ y una función $\mathbf{g}$ unívocamente determinada tales que*

a) $\mathbf{a} \in X$ *y* $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in Y$,
b) $Y = \mathbf{f}(X)$,
c) $\mathbf{f}$ *es uno a uno en* X,
d) $\mathbf{g}$ *está definida en* Y, $\mathbf{g}(Y) = X$, *y* $\mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \mathbf{x}$ *para cada* $\mathbf{x}$ *de* X,
e) $\mathbf{g} \in C'$ en Y.

Demostración. La función J_f es continua en S y, puesto que $J_f(\mathbf{a}) \neq 0$, existe una n-bola $B_1(\mathbf{a})$ tal que $J_f(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x}$ de $B_1(\mathbf{a})$. Por el teorema 13.4, existe una n-bola $B(\mathbf{a}) \subseteq B_1(\mathbf{a})$ en la que $\mathbf{f}$ es uno a uno. Sea B una n-bola centrada en $\mathbf{a}$ y de radio menor que el de $B(\mathbf{a})$. Por el teorema 13.2, $\mathbf{f}(B)$ contiene una n-bola centrada en $\mathbf{f}(\mathbf{a})$. Designémosla por Y y sea $X = \mathbf{f}^{-1}(Y) \cap B$. Entonces X es abierto puesto que tanto $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ como B son abiertos. (Ver figura 13.2.)

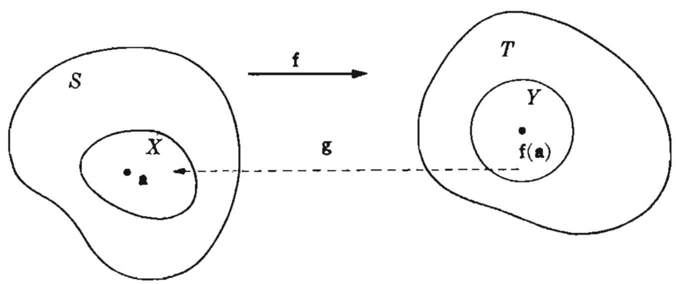


Figura 13.2

El conjunto $\bar{B}$ (adherencia de B) es compacto y $\mathbf{f}$ es uno a uno y continua en $\bar{B}$. Por lo tanto, por el teorema 4.29, existe una función $\mathbf{g}$ (la función inversa $\mathbf{f}^{-1}$ del teorema 4.29) definida en $\mathbf{f}(\bar{B})$ tal que $\mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$ de $\bar{B}$.

Además, $\mathbf{g}$ es continua en $\mathbf{f}(\bar{B})$. Y puesto que $X \subseteq \bar{B}$ e $Y \subseteq \mathbf{f}(\bar{B})$, esto demuestra las partes (a), (b), (c) y (d). La unicidad de $\mathbf{g}$ se sigue de (d).

A continuación se demuestra (e). Para ello, definimos una función real h por medio de la ecuación $h(\mathbf{Z}) = \det [D_j f_i(\mathbf{Z}_i)]$, en donde $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_n$ son n puntos de S, y $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1; \ldots; \mathbf{Z}_n)$ es el punto correspondiente en $\mathbf{R}^{n^2}$. Entonces, razonando como en la demostración del teorema 13.4, existe una n-bola $B_2(\mathbf{a})$ tal que $h(\mathbf{Z}) \neq 0$ si cada $\mathbf{Z}_i \in B_2(\mathbf{a})$. Ahora podemos suponer que, en la primera parte de la demostración, la n-bola $B(\mathbf{a})$ ha sido elegida de tal manera que $B(\mathbf{a}) \subseteq B_2(\mathbf{a})$. Entonces $\bar{B} \subseteq B_2(\mathbf{a})$ y $h(\mathbf{Z}) \neq 0$ si cada $\mathbf{Z}_i \in \bar{B}$.

Para demostrar (e), escribimos $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$. Probaremos que cada $g_k \in C'$ en Y. Para demostrar que $D_r g_k$ existe en Y, suponemos que $\mathbf{y} \in Y$ y consideramos el cociente incremental $[g_k(\mathbf{y} + t\mathbf{u}_r) - g_k(\mathbf{y})]/t$, en donde $\mathbf{u}_r$ es el r-ésimo vector coordenado unitario. (Dado que Y es abierto, $\mathbf{y} + t\mathbf{u}_r \in Y$ si t es suficientemente pequeño.) Sea $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ y sea $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{y} + t\mathbf{u}_r)$. Entonces tanto $\mathbf{x}$ como $\mathbf{x}'$ pertenecen a X y $\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = t\mathbf{u}_r$. Luego $f_i(\mathbf{x}') - f_i(\mathbf{x})$ es 0 si $i \neq r$, y es t si $i = r$. Por el teorema del valor medio tenemos

$$\frac{f_i(\mathbf{x}') - f_i(\mathbf{x})}{t} = \nabla f_i(\mathbf{Z}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{t} \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

en donde cada $\mathbf{Z}_i$ pertenece al segmento rectilíneo que une $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$; luego $\mathbf{Z}_i \in B$. La expresión de la izquierda es 1 o 0, según que $i = r$ o $i \neq r$. Éste es un sistema lineal de n ecuaciones con las n incógnitas $(x'_j - x_j)/t$ y tiene solución única, ya que

$$\det [D_j f_i(\mathbf{Z}_i)] = h(\mathbf{Z}) \neq 0.$$

Determinando la k-ésima incógnita por medio de la regla de Cramer, obtenemos una expresión para $[g_k(\mathbf{y} + t\mathbf{u}_r) - g_k(\mathbf{y})]/t$ como cociente de determinantes. Cuando $t \to 0$, el punto $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}$, ya que $\mathbf{g}$ es continua, y por consiguiente cada $\mathbf{Z}_i \to \mathbf{x}$, pues $\mathbf{Z}_i$ está en el segmento que une $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}'$. El determinante que aparece en el denominador tiene por límite al número $\det [D_j f_i(x)] = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, y éste es no nulo, puesto que $\mathbf{x} \in X$. Por lo tanto, el límite siguiente existe:

$$\lim_{t \to 0} \frac{g_k(\mathbf{y} + t\mathbf{u}_r) - g_k(\mathbf{y})}{t} = D_r g_k(\mathbf{y}).$$

De donde resulta la existencia de $D_r g_k(\mathbf{y})$ para cada $\mathbf{y}$ de Y y cada $r = 1, 2, \ldots, n$. Por otra parte, este límite es un cociente de dos determinantes en los que figuran únicamente las derivadas $D_j f_i(\mathbf{x})$. La continuidad de las $D_j f_i$ implica la continuidad de cada una de las derivadas parciales $D_r g_k$. Esto termina la demostración de (e).

NOTA. La demostración precedente facilita además un método para calcular $D_r g_k(\mathbf{y})$. En la práctica, las derivadas $D_r g_k$ se pueden obtener más fácilmente (sin necesidad de recurrir a un proceso de límite) utilizando el siguiente hecho, si $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, el producto de las dos matrices jacobianas $\mathbf{Df}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{Dg}(\mathbf{y})$ es la matriz identidad. Si escribimos esto con todo detalle obtenemos el siguiente sistema de n^2 ecuaciones:

$$\sum_{k=1}^{n} D_k g_i(\mathbf{y}) D_j f_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Para cada i fijo, obtenemos n ecuaciones lineales cuando j recorre los valores $1, 2, \ldots, n$. Estas ecuaciones permiten determinar las n incógnitas $D_1 g_i(\mathbf{y}), \ldots, D_n g_i(\mathbf{y})$, por medio de la regla de Cramer, o por cualquier otro medio.

13.4 EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

El lector sabe que la ecuación de una curva del plano xy se puede expresar en forma «explícita», tal como $y = f(x)$, o bien en forma «implícita», tal como $F(x, y) = 0$. Sin embargo, si disponemos de una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, ésta no representa necesariamente una función. (Como ejemplo, considérese $x^2 + y^2 - 5 = 0$). La ecuación $F(x, y) = 0$ representa siempre una *relación*, a saber, el conjunto de todos los pares (x, y) que satisfacen la ecuación. Por lo tanto se presenta naturalmente la siguiente pregunta: ¿Cuándo es una función la relación definida por $F(x, y) = 0$? En otras palabras, ¿cuándo la ecuación $F(x, y) = 0$ permite resolver y en función de x, obteniéndose una solución única? El teorema de la función implícita trata *localmente* esta cuestión. Nos dice que, dado un punto $(x_0\ y_0)$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ en ciertas condiciones existirá un entorno de (x_0, y_0) tal que *en este entorno* la relación definida por $F(x, y) = 0$ es también una función. Las condiciones son que F y D_2F sean continuas en un entorno de (x_0, y_0) y que $D_2F(x_0, y_0) \neq 0$. En su forma más general, el teorema trata, en vez de una ecuación de dos variables, un sistema de n ecuaciones con $n + k$ variables:

$$f_r(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_k) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Este sistema puede resolverse para $x_1, \ldots, x_n$ en función de $t_1, \ldots, t_k$, en el supuesto de que ciertas derivadas parciales sean continuas y en el supuesto de que el determinante jacobiano $n \times n$, $\partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)$ sea no nulo.

Por brevedad, en este teorema adoptaremos la siguiente notación: Los puntos del espacio $(n+k)$-dimensional $\mathbf{R}^{n+k}$ se escribirán en la forma $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$, en donde

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \qquad \text{y} \qquad \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbf{R}^k.$$

Teorema 13.7 (teorema de la función implícita). *Sea* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots f_n)$ *una función vectorial definida en un conjunto abierto* S *de* $\mathbf{R}^{n+k}$ *con valores en* $\mathbf{R}^n$. *Supongamos que* $\mathbf{f} \in C'$ *en* S. *Sea* $(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)$ *un punto de* S *en el que* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$ *y el determinante jacobiano* $n \times n$ *det* $[D_j f_i(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)] \neq 0$. *Entonces existe un conjunto abierto k-dimensional* T_0 *que contiene a* $\mathbf{t}_0$ *y una función vectorial* $\mathbf{g}$, *y sólo una, definida en* T_0 *y con valores en* $\mathbf{R}^n$ *tales que*

a) $\mathbf{g} \in C'$ *en* T_0.
b) $\mathbf{g}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$.
c) $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ *para cada* $\mathbf{t}$ *de* T_0.

Demostración. Aplicaremos el teorema de la función inversa a una cierta función vectorial $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n; F_{n+1}, \ldots, F_{n+k})$ definida en S y con valores en $\mathbf{R}^{n+k}$. La función $\mathbf{F}$ se define como sigue: Para $1 \le m \le n$, sea $F_m(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = f_m(\mathbf{x}; \mathbf{t})$, y para $1 \le m \le k$, sea $F_{n+m}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = t_m$. Podemos escribir entonces $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \mathbf{I})$, en donde $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ y en donde $\mathbf{I}$ es la función identidad definida por $\mathbf{I}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ para cada $\mathbf{t}$ de $\mathbf{R}^k$. El jacobiano $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ vale entonces lo mismo que el determinante $n \times n$, det $[D_j f_i(\mathbf{x}; \mathbf{t})]$ puesto que los términos que aparecen en las k últimas filas y también en las k últimas columnas de $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ forman un determinante $k \times k$ con unos en la diagonal principal y ceros en los restantes términos; las n primeras filas y las n primeras columnas forman el determinante det $[D_j f_i(\mathbf{x}; \mathbf{t})]$, y

$$D_i F_{n+j}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = 0 \quad \text{para } 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le k.$$

Luego el jacobiano $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0) \neq 0$. Además, $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0) = (\mathbf{0}; \mathbf{t}_0)$. Por consiguiente, en virtud del teorema 13.6, existen conjuntos abiertos X e Y que contienen $(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)$ y $(\mathbf{0}; \mathbf{t}_0)$, respectivamente, tales que $\mathbf{F}$ es uno a uno en X, y $X = \mathbf{F}^{-1}(Y)$. Luego, existe una función $\mathbf{G}$ que es la inversa local de $\mathbf{F}$, definida en Y y con valores en X, tal que

$$\mathbf{G}[\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = (\mathbf{x}; \mathbf{t}),$$

y $\mathbf{G} \in C'$ en Y.

Ahora $\mathbf{G}$ puede ser reducido a componentes como sigue: $\mathbf{G} = (\mathbf{v}; \mathbf{w})$, en donde $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ es una función vectorial definida en Y con valores en $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_k)$ está también definida en Y pero con valores en $\mathbf{R}^k$. Ahora estamos en situación de determinar $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ explícitamente. La ecuación $\mathbf{G}[\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = (\mathbf{x}; \mathbf{t})$, escrita en términos de las componentes $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, nos proporciona las dos ecuaciones

$$\mathbf{v}[\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = \mathbf{x} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{w}[\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = \mathbf{t}.$$

Pero ahora, *cada punto* $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ de Y se puede escribir unívocamente en la forma $(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}'; \mathbf{t}')$ para un $(\mathbf{x}'; \mathbf{t}')$ de X, puesto que $\mathbf{F}$ es uno a uno en X y la imagen inversa $\mathbf{F}^{-1}(Y)$ contiene a X. Además, por la manera como se ha definido $\mathbf{F}$, si se escribe $(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}'; \mathbf{t}')$, debe ser $\mathbf{t}' = \mathbf{t}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbf{v}[\mathbf{F}(\mathbf{x}'; \mathbf{t})] = \mathbf{x}' \qquad \text{y} \qquad \mathbf{w}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbf{w}[\mathbf{F}(\mathbf{x}'; \mathbf{t})] = \mathbf{t}.$$

Por lo tanto la función $\mathbf{G}$ se puede describir como sigue: Dado un punto $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ de Y, tenemos $\mathbf{G}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = (\mathbf{x}'; \mathbf{t})$, en donde $\mathbf{x}'$ es el punto de $\mathbf{R}^n$ tal que $(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}'; \mathbf{t})$. Esta afirmación implica que

$$\mathbf{F}[\mathbf{v}(\mathbf{x}; \mathbf{t}); \mathbf{t}] = (\mathbf{x}; \mathbf{t}) \quad \text{para cada } (\mathbf{x}; \mathbf{t}) \text{ de } Y.$$

Ahora estamos a punto de definir el conjunto T_0 y la función $\mathbf{g}$ del teorema. Sea

$$T_0 = \{\mathbf{t} : \mathbf{t} \in \mathbf{R}^k, \quad (\mathbf{0}; \mathbf{t}) \in Y\},$$

y para cada $\mathbf{t}$ de T_0 definimos $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \mathbf{v}(\mathbf{0}; \mathbf{t})$. El conjunto T_0 es abierto en $\mathbf{R}^k$. Además, $\mathbf{g} \in C'$ en T_0 puesto que $\mathbf{G} \in C'$ en Y y las componentes de $\mathbf{g}$ se han tomado de entre las componentes de $\mathbf{G}$. Además,

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{v}(\mathbf{0}; \mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$$

puesto que $(\mathbf{0}; \mathbf{t}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)$. Finalmente, la ecuación $\mathbf{F}[\mathbf{v}(\mathbf{x}; \mathbf{t}); \mathbf{t}] = (\mathbf{x}; \mathbf{t})$, que se verifica para cada $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ de Y, da lugar (considerando las componentes de $\mathbf{R}^n$) a la ecuación $\mathbf{f}[\mathbf{v}(\mathbf{x}; \mathbf{t}); \mathbf{t}] = \mathbf{x}$. Haciendo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, vemos que para cada $\mathbf{t}$ de T_0, tenemos $\mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{t}); \mathbf{t}] = \mathbf{0}$, y esto termina la demostración de las proposiciones (a), (b) y (c). Falta demostrar que sólo existe una tal función $\mathbf{g}$. Pero ello se sigue inmediatamente del hecho de que $\mathbf{f}$ sea uno a uno. Si tuviéramos otra función $\mathbf{h}$, que verificase (c), entonces tendríamos $\mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{t}); \mathbf{t}] = \mathbf{f}[\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}]$, y ello implicaría $(\mathbf{g}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) = (\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t})$, o $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \mathbf{h}(\mathbf{t})$ para cada $\mathbf{t}$ de T_0.

13.5 EXTREMOS DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

En el resto del capítulo consideraremos funciones reales f en vistas a determinar aquellos puntos (si existen) en los que f posee un extremo local, esto es, o un máximo local o un mínimo local.

Ya hemos obtenido algún resultado en este sentido para funciones de una variable (teorema 5.9). En dicho teorema establecíamos que una condición necesaria para que una función real f tenga un extremo local en un punto interior c de un intervalo es que $f'(c) = 0$, en el supuesto de que $f'(c)$ exista. Esta condición, sin embargo, no es suficiente, como se ve si se considera $f(x) = x^3$, $c = 0$. Ahora deduciremos una condición suficiente.

Teorema 13.8. *Para un entero $n \geq 1$, sea f una función que posea n-ésima derivada continua en el intervalo abierto (a, b). Supongamos también que para un cierto punto interior c de (a, b) tenemos*

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad \text{pero} \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Entonces para n par, f posee un mínimo local en c si $f^{(n)}(c) > 0$, y un máximo local en c si $f^{(n)}(c) < 0$. Si n es impar, no existe ni máximo ni mínimo locales en c.

Demostración. Puesto que $f^{(n)}(c) \neq 0$, existe un intervalo $B(c)$ tal que para cada x de $B(c)$, la derivada $f^{(n)}(x)$ tendrá el mismo signo que $f^{(n)}(c)$. Por la fórmula de Taylor (teorema 5.19), para cada x de $B(c)$ se tiene

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - c)^n, \qquad \text{donde } x_1 \in B(c).$$

Si n es par, esta ecuación implica $f(x) \geq f(c)$ cuando $f^{(n)}(c) > 0$, y $f(x) \leq f(c)$ cuando $f^{(n)}(c) < 0$. Si n es impar y $f^{(n)}(c) > 0$, entonces $f(x) > f(c)$ cuando $x > c$, pero cuando $x < c$, $f(x) < f(c)$, y no puede haber extremo en c. Una afirmación análoga se verifica si n es impar y $f^{(n)}(c) < 0$. Ello demuestra el teorema.

13.6 EXTREMOS DE FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

Volvamos ahora a las funciones de varias variables. El ejercicio 12.1 proporciona una condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo locales en un punto interior $\mathbf{a}$ de un conjunto abierto. La condición es que cada derivada parcial $D_k f(\mathbf{a})$ sea cero en dicho punto. Es posible establecer este resultado en términos de derivadas direccionales, diciendo que $f'(\mathbf{a}; \mathbf{u})$ debe ser cero para cada dirección $\mathbf{u}$.

Sin embargo, el recíproco de este resultado no es verdadero. Consideremos el siguiente ejemplo de una función de dos variables:

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Se tiene, en este caso, $D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 0$. Ahora bien, $f(0, 0) = 0$, pero la función toma tanto valores positivos como negativos en cada entorno de $(0, 0)$, luego no posee ni máximo ni mínimo locales en $(0, 0)$. (Ver fig. 13.3.)

Este ejemplo ilustra otro fenómeno interesante. Si tomamos una recta fija que pase por el origen e imponemos que el punto (x, y) se mueva a lo largo de esta recta hacia $(0, 0)$, entonces el punto penetrará en la región situada por encima de la parábola $y = 2x^2$ (o por debajo de la parábola $y = x^2$), en la

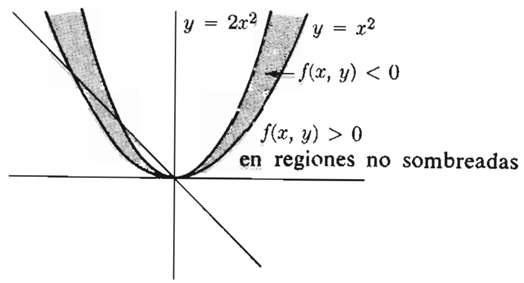


Figura 13.3

que $f(x, y)$ llega a ser y permanece positiva para cada $(x, y) \neq (0, 0)$. Por consiguiente, a lo largo de cada una de tales líneas, f posee un mínimo en $(0, 0)$, pero el origen no es un mínimo local en un entorno bidimensional de $(0, 0)$.

Definición 13.9. *Si f es diferenciable en $\mathbf{a}$ y si $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, el punto $\mathbf{a}$ se llama un punto estacionario de $\mathbf{f}$. Un punto estacionario se llama un punto de silla si cada n-bola $B(\mathbf{a})$ contiene puntos $\mathbf{x}$ tales que $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$ y puntos tales que $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$.*

En el ejemplo precedente, el origen es un punto de silla de la función.

Para determinar cuándo una función de n variables tiene un máximo local, un mínimo local, o un punto de silla en un punto estacionario $\mathbf{a}$, debemos determinar el signo algebraico de $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ para todo $\mathbf{x}$ de un entorno de $\mathbf{a}$. Como en el caso unidimensional, esto se hace con la ayuda de la fórmula de Taylor (teorema 12.14). Hagamos $m = 2$ e $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{t}$ en el teorema 12.14. Si las derivadas parciales de f son diferenciables en una n-bola $B(\mathbf{a})$, entonces

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{t} + \tfrac{1}{2} f''(\mathbf{z}; \mathbf{t}), \tag{3}$$

en donde $\mathbf{z}$ pertenece al segmento rectilíneo que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{a} + \mathbf{t}$, y

$$f''(\mathbf{z}; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{i,j} f(\mathbf{z}) t_i t_j.$$

En un punto estacionario tenemos $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ con lo cual (3) toma la forma

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) = \tfrac{1}{2} f''(\mathbf{z}; \mathbf{t}).$$

Por lo tanto, dado que $\mathbf{a} + \mathbf{t}$ recorre $B(\mathbf{a})$, el signo algebraico de $f(\mathbf{a} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{a})$ está determinado por el de $f''(\mathbf{z}; \mathbf{t})$. Podemos escribir (3) en la forma

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) = \tfrac{1}{2} f''(\mathbf{a}; \mathbf{t}) + \|\mathbf{t}\|^2 E(\mathbf{t}), \tag{4}$$

en donde

$$\|\mathbf{t}\|^2 E(\mathbf{t}) = \tfrac{1}{2}f''(\mathbf{z}; \mathbf{t}) - \tfrac{1}{2}f''(\mathbf{a}; \mathbf{t}).$$

La desigualdad

$$\|\mathbf{t}\|^2 \, |E(\mathbf{t})| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |D_{i,j}f(\mathbf{z}) - D_{i,j}f(\mathbf{a})| \, \|\mathbf{t}\|^2,$$

prueba que $E(\mathbf{t}) \to 0$ cuando $\mathbf{t} \to 0$ si las derivadas parciales de segundo orden de f son continuas en $\mathbf{a}$. Puesto que $\|\mathbf{t}\|^2 E(\mathbf{t})$ tiende a cero más rápidamente que $\|\mathbf{t}\|^2$, parece razonable esperar que el signo algebraico de $f(\mathbf{a} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{a})$ venga determinado por el de $f''(\mathbf{a}; \mathbf{t})$. Esto es lo que afirma el próximo teorema.

Teorema 13.10 (Criterio de las derivadas segundas en el cálculo de extremos). *Supongamos que existen las derivadas parciales segundas $D_{i,j}f$ en una n-bola $B(\mathbf{a})$ y que son continuas en $\mathbf{a}$, en donde $\mathbf{a}$ es un punto estacionario de f. Sea*

$$Q(\mathbf{t}) = \tfrac{1}{2}f''(\mathbf{a}; \mathbf{t}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{i,j}f(\mathbf{a})t_i t_j. \tag{5}$$

a) *Si $Q(\mathbf{t}) > 0$ para todo $\mathbf{t} \ne \mathbf{0}$, f tiene un mínimo relativo en $\mathbf{a}$.*
b) *Si $Q(\mathbf{t}) < 0$ para todo $\mathbf{t} \ne \mathbf{0}$, f tiene un máximo relativo en $\mathbf{a}$.*
c) *Si $Q(\mathbf{t})$ toma valores positivos y negativos, entonces f tiene un punto de silla en $\mathbf{a}$.*

Demostración. La función Q es continua en cada punto $\mathbf{t}$ de $\mathbf{R}^n$. Sea $S = \{\mathbf{t} : \|\mathbf{t}\| = 1\}$ la frontera de la n-bola $B(\mathbf{0}; 1)$. Si $Q(\mathbf{t}) > 0$ para todo $\mathbf{t} \ne \mathbf{0}$, entonces $Q(\mathbf{t})$ es positivo en S. Dado que S es compacto, Q tiene un mínimo en S (llamémosle m), y $m > 0$. Ahora bien, $Q(c\mathbf{t}) = c^2Q(\mathbf{t})$ para cada número real c. Haciendo $c = 1/\|\mathbf{t}\|$ en donde $\mathbf{t} \ne \mathbf{0}$ vemos que $c\mathbf{t} \in S$ y por lo tanto $c^2Q(\mathbf{t}) \ge m$, luego $Q(\mathbf{t}) \ge m\,\|\mathbf{t}\|^2$. Utilizando esto en (4) obtenemos

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) = Q(\mathbf{t}) + \|\mathbf{t}\|^2E(\mathbf{t}) \ge m\,\|\mathbf{t}\|^2 + \|\mathbf{t}\|^2E(\mathbf{t}).$$

Puesto que $E(\mathbf{t}) \to 0$ cuando $\mathbf{t} \to \mathbf{0}$, existe un número positivo r tal que $|E(\mathbf{t})| < \tfrac{1}{2}m$ siempre que $0 < \|\mathbf{t}\| < r$. Para tales $\mathbf{t}$ tenemos $0 \le \|\mathbf{t}\|^2\,|E(\mathbf{t})| < \tfrac{1}{2}m\|\mathbf{t}\|^2$, luego

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) > m\|\mathbf{t}\|^2 - \tfrac{1}{2}m\|\mathbf{t}\|^2 = \tfrac{1}{2}m\|\mathbf{t}\|^2 > 0.$$

Por consiguiente f tiene un mínimo relativo en $\mathbf{a}$ que prueba (a). Para probar (b) se utiliza un argumento análogo, o simplemente se aplica la parte (a) a $-f$.

Finalmente, probaremos (c). Para cada $\lambda > 0$ tenemos, de (4),

$$f(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{t}) - f(\mathbf{a}) = Q(\lambda\mathbf{t}) + \lambda^2\|\mathbf{t}\|^2E(\lambda\mathbf{t}) = \lambda^2\{Q(\mathbf{t}) + \|\mathbf{t}\|^2E(\lambda\mathbf{t})\}.$$

Supongamos que $Q(\mathbf{t}) \ne 0$ para un cierto $\mathbf{t}$. Ya que $E(\mathbf{y}) \to 0$ cuando $\mathbf{y} \to \mathbf{0}$, existe un r positivo tal que

$$\|\mathbf{t}\|^2E(\lambda\mathbf{t}) < \tfrac{1}{2}|Q(\mathbf{t})| \qquad \text{si } 0 < \lambda < r.$$

Por consiguiente, para cada uno de estos λ la cantidad $\lambda^2\{Q(\mathbf{t}) + \|\mathbf{t}\|^2E(\lambda\mathbf{t})\}$ tiene el mismo signo que $Q(\mathbf{t})$. Luego, si $0 < \lambda < r$, la diferencia $f(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{t}) - f(\mathbf{a})$ tiene el mismo signo que $Q(\mathbf{t})$. De donde, si $Q(\mathbf{t})$ toma valores positivos y negativos, se sigue que f tiene un punto de silla en $\mathbf{a}$.

NOTA. Una función real Q definida en $\mathbf{R}^n$ por una ecuación del tipo

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

en donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y los a_{ij} son reales se llama *forma cuadrática.* La forma es *simétrica* si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i y j, *definida positiva* si $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ implica $Q(\mathbf{x}) > 0$, y *definida negativa* si $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ implica $Q(\mathbf{x}) < 0$.

En general, no es fácil determinar cuándo una forma cuadrática es definida positiva o negativa. En la referencia 13.1, teorema 9.5, se desarrolla un criterio que utiliza valores propios. Otro criterio, que utiliza determinantes, se puede describir como sigue. Sea $\Delta = \det [a_{ij}]$ y sea Δ_k el determinante de la matriz $k \times k$ obtenida borrando las $(n - k)$ últimas filas y columnas de $[a_{ij}]$. Además, hagamos $\Delta_0 = 1$. La teoría de las formas cuadráticas dice que una condición necesaria y suficiente para que una forma simétrica sea definida positiva es que los $n + 1$ números $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ sean positivos. La forma es definida negativa si, y sólo si, los mismos $n + 1$ números son alternativamente positivos y negativos. (Ver referencia 13.2, pp. 304-308.) La forma cuadrática que aparece en (5) es simétrica, ya que las derivadas parciales cruzadas $D_{i,j}f(\mathbf{a})$ y $D_{j,i}f(\mathbf{a})$ son iguales. Por consiguiente, en las condiciones del teorema 13.10, vemos que f tiene un mínimo local en $\mathbf{a}$ si los $(n + 1)$ números $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ son todos positivos, y un máximo local si estos números son alternadamente positivos y negativos. El caso $n = 2$ puede tratarse directamente y nos proporciona el siguiente criterio.

Teorema 13.11. *Sea f una función real con derivadas parciales de segundo orden continuas en un punto estacionario $\mathbf{a}$ de $\mathbf{R}^2$. Sea*

$$A = D_{1,1}f(\mathbf{a}), \qquad B = D_{1,2}f(\mathbf{a}), \qquad C = D_{2,2}f(\mathbf{a}),$$

y sea

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = AC - B^2.$$

Entonces tenemos:

a) *Si* $\Delta > 0$ *y* $A > 0$, f *tiene un mínimo relativo en* **a**.
b) *Si* $\Delta > 0$ *y* $A < 0$, f *tiene un máximo relativo en* **a**.
c) *Si* $\Delta < 0$, f *tiene un punto de silla en* **a**.

Demostración. En el caso bidimensional podemos escribir la forma cuadrática de (5) como sigue:

$$Q(x, y) = \tfrac{1}{2}\{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2\}.$$

Si $A \neq 0$, podemos escribirla también

$$Q(x, y) = \frac{1}{2A}\{(Ax + By)^2 + \Delta y^2\}.$$

Si $\Delta > 0$, la expresión de las llaves es la suma de dos cuadrados, luego $Q(x, y)$ tiene el mismo signo que A. Por consiguiente, las afirmaciones (a) y (b) se siguen inmediatamente de las partes (a) y (b) del teorema 13.10.

Si $\Delta < 0$, la forma cuadrática es el producto de dos factores lineales. Por consiguiente, el conjunto de puntos (x, y) tales que $Q(x, y) = 0$ consta de dos líneas del plano xy que se cortan en $(0, 0)$. Estas líneas dividen el plano en cuatro regiones; $Q(x, y)$ es positivo en dos de estas regiones y negativo en las otras dos. Por consiguiente f tiene un punto de silla en **a**.

NOTA. Si $\Delta = 0$, puede haber un máximo local, un mínimo local o un punto de silla local en **a**.

13.7 PROBLEMAS DE EXTREMOS CONDICIONADOS

Consideremos el siguiente tipo de problemas de extremos. Supongamos que $f(x, y, z)$ representa la temperatura del punto (x, y, z) del espacio y preguntamos cuál es el valor máximo o mínimo de la temperatura en una cierta superficie. Si la ecuación de la superficie está dada explícitamente por medio de $z = h(x, y)$, entonces en la expresión $f(x, y\ z)$ podemos substituir z por $h(x, y)$ a fin de obtener la temperatura sobre la superficie en función de x e y solamente, obteniendo $F(x, y) = f[x, y, h(x, y)]$. El problema se reduce entonces a buscar los valores extremos de F. Sin embargo, en la práctica, se presentan ciertas dificultades. La ecuación de la superficie puede estar dada en forma implícita, por ejemplo $g(x, y, z) = 0$, y puede ser imposible, en la práctica, resolver esta ecuación explícitamente para z en función de x e y, o aun para x o y en función de las variables restantes. El problema puede complicarse todavía más si se piden los valores extremos de la temperatura en los puntos de una *curva* dada del espacio. Una tal curva es la intersección de dos superficies, por ejemplo $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$. Si pudiésemos resolver estas dos ecuaciones simultáneamente, por ejemplo x e y en función de z, entonces introduciríamos estas expresiones en f y obtendríamos una nueva función con la única variable z, cuyos extremos serían entonces los buscados. Sin embargo, en general, este procedimiento no se puede llevar a término y debemos buscar un método más practicable. Uno muy elegante y fácil para atacar tales problemas fue desarrollado por Lagrange.

El método de Lagrange proporciona una condición *necesaria* para un extremo y se puede describir como sigue. Sea $f(x_1, ..., x_n)$ una expresión a la que se buscan los valores de sus extremos cuando las variables se hallan restringidas por medio de un cierto número de condiciones, por ejemplo $g_1(x_1, ..., x_n) = 0, ..., g_m(x_1, ..., x_n) = 0$. Formamos entonces la combinación lineal

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n),$$

en donde $\lambda_1, ..., \lambda_m$ son m constantes. Diferenciamos, entonces, ϕ respecto a cada una de las variables y consideramos el siguiente sistema de $n + m$ ecuaciones:

$$D_r\phi(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots, n,$$
$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Lagrange descubrió que, si el punto $(x_1, ..., x_n)$ es una solución del problema del extremo, entonces debe satisfacer también este sistema de $n + m$ ecuaciones. En la práctica, se intenta resolver este sistema para las $n + m$ «incógnitas», $\lambda_1, ..., \lambda_m$, y $x_1, ..., x_n$. Entonces es preciso determinar si los puntos $(x_1, ..., x_n)$ así obtenidos pertenecen a un máximo, a un mínimo o a ninguno de ellos. Los números $\lambda_1, ..., \lambda_m$, introducidos únicamente para determinar las incógnitas $x_1, ..., x_n$, se conocen con el nombre de *multiplicadores de Lagrange*. Se introduce un multiplicador para cada condición.

Existe un criterio analítico complicado que permite, en tales problemas, distinguir entre máximos y mínimos. (Ver, por ejemplo, la referencia 13.3.) Sin embargo, este criterio no es muy útil en la práctica y en cada problema particular es generalmente más fácil utilizar otros métodos (por ejemplo, consideraciones de tipo físico o geométrico) para realizar esta distinción.

El teorema que sigue establece la validez del método de Lagrange:

Teorema 13.12. *Sea f una función real tal que $f \in C'$ en un conjunto abierto S de $\mathbf{R}^n$. Sean $g_1, \ldots, g_m$ m funciones reales tales que $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m) \in C'$ en S, y supongamos que $m < n$. Sea X_0 el subconjunto de S en el que $\mathbf{g}$ se anula, esto es,*

$$X_0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S, \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Supongamos que $\mathbf{x}_0 \in X_0$ y que existe una n-bola $B(\mathbf{x}_0)$ tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x}$ de $X_0 \cap B(\mathbf{x}_0)$ o tal que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x}$ de $X_0 \cap B(\mathbf{x}_0)$. Supongamos, además, que el determinante de orden m det $[D_j g_i(\mathbf{x}_0)] \neq 0$. *Entonces existen m números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tales que se satisfacen las n ecuaciones siguientes:*

$$D_r f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_r g_k(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

NOTA. Las n ecuaciones de (6) son equivalentes a la ecuación vectorial siguiente:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Demostración. Consideremos el siguiente sistema de m ecuaciones lineales con las m incógnitas $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_r g_k(\mathbf{x}_0) = -D_r f(\mathbf{x}_0) \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Este sistema tiene solución única puesto que, por hipótesis, el determinante del sistema es no nulo. Por consiguiente, se satisfacen las m *primeras ecuaciones* de (6). Debemos verificar ahora que, para esta elección de $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, se satisfacen también las $n - m$ ecuaciones restantes de (6).

Para ello, aplicamos el teorema de la función implícita. Dado que $m < n$, cada punto $\mathbf{x}$ de S puede escribirse en la forma $\mathbf{x} = (\mathbf{x}'; \mathbf{t})$, en donde $\mathbf{x}' \in \mathbf{R}^m$ y $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^{n-m}$. En el resto de la demostración, escribiremos $\mathbf{x}'$ para designar $(x_1, \ldots, x_m)$ y $\mathbf{t}$ para designar $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, esto es $t_k = x_{m+k}$. En términos de la función vectorial $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m)$, podemos escribir

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0'; \mathbf{t}_0) = \mathbf{0} \quad \text{si} \quad \mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0'; \mathbf{t}_0).$$

Dado que $\mathbf{g} \in C'$ en S, y que el determinante det $[D_j g_i(\mathbf{x}_0'; \mathbf{t}_0)] \neq 0$, resulta que se verifican las condiciones de la función implícita. Por consiguiente, existe un entorno $(n - m)$-dimensional T_0 de $\mathbf{t}_0$ y una única función vectorial $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_m)$, definida en T_0 y con valores en $\mathbf{R}^m$ tales que $\mathbf{h} \in C'$ en T_0, $\mathbf{h}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}'_0$, y para cada $\mathbf{t}$ de T_0, tenemos $\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}] = \mathbf{0}$. Esto nos lleva a decir que el sistema de m ecuaciones

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

permite expresar $x_1, \ldots, x_m$ en función de $x_{m+1}, \ldots, x_n$, obteniéndose soluciones de la forma $x_r = h_r(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $r = 1, 2, \ldots, m$. Substituiremos ahora estas expresiones de $x_1, \ldots, x_m$ en la $f(x_1, \ldots, x_n)$ y también en cada una de las $g_p(x_1, \ldots, x_n)$. Así nos queda definida una nueva función F, como sigue:

$$F(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f[h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n); x_{m+1}, \ldots, x_n];$$

y también m nuevas funciones $G_1, \ldots, G_m$:

$$G_p(x_{m+1}, \ldots, x_n) = g_p[h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n); x_{m+1}, \ldots, x_n].$$

Más brevemente, podemos escribir $F(\mathbf{t}) = f[\mathbf{H}(\mathbf{t})]$ y $G_p(\mathbf{t}) = g_p[\mathbf{H}(\mathbf{t})]$, en donde $\mathbf{H}(\mathbf{t}) = (\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t})$. Aquí $\mathbf{t}$ está obligado a pertenecer al conjunto T_0.

Cada función G_p así definida es idénticamente cero en el conjunto T_0 por el teorema de la función implícita. Por consiguiente, cada derivada $D_r G_p$ es asimismo idénticamente nula en T_0 y, en particular, $D_r G_p(\mathbf{t}_0) = 0$. Pero por la regla de la cadena (Ec. 12.20), podemos calcular estas derivadas, y se tiene:

$$D_r G_p(\mathbf{t}_0) = \sum_{k=1}^{n} D_k g_p(\mathbf{x}_0) D_r H_k(\mathbf{t}_0) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n - m).$$

Pero $H_k(\mathbf{t}) = h_k(\mathbf{t})$ si $1 \leq k \leq m$, y $H_k(\mathbf{t}) = x_k$ si $m + 1 \leq k \leq n$. Por consiguiente, cuando $m + 1 \leq k \leq n$, tenemos $D_r H_k(\mathbf{t}) \equiv 0$ si $m + r \neq k$ y $D_r H_{m+r}(\mathbf{t}) = 1$ para cada $\mathbf{t}$. Entonces el anterior conjunto de ecuaciones se convierte en

$$\sum_{k=1}^{m} D_k g_p(\mathbf{x}_0) D_r h_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r} g_p(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad \begin{cases} p = 1, 2, \ldots, m, \\ r = 1, 2, \ldots, n - m. \end{cases} \tag{7}$$

Por la continuidad de $\mathbf{h}$, *existe una* $(n - m)$-*bola* $B(\mathbf{t}_0) \subseteq T_0$ tal que $\mathbf{t} \in B(\mathbf{t}_0)$ implica $(\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) \in B(\mathbf{x}_0)$, en donde $B(\mathbf{x}_0)$ es la *n-bola* del enunciado del teorema. Luego, $\mathbf{t} \in B(\mathbf{t}_0)$ implica $(\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) \in X_0 \cap B(\mathbf{x}_0)$ y entonces, por hipótesis, se tiene, o bien $F(\mathbf{t}) \leq F(\mathbf{t}_0)$ para todo $\mathbf{t}$ de $B(\mathbf{t}_0)$, o si no $F(\mathbf{t}) \geq F(\mathbf{t}_0)$ para todo $\mathbf{t}$ de $B(\mathbf{t}_0)$. Esto es, F tiene un máximo local o un mínimo local en el punto inte rior $\mathbf{t}_0$. Cada derivada parcial $D_rF(\mathbf{t}_0)$ debe entonces ser cero. Si utilizamos la regla de la cadena para calcular estas derivads, obtenemos

$$D_rF(\mathbf{t}_0) = \sum_{k=1}^{n} D_kf(\mathbf{x}_0)D_rH_k(\mathbf{t}_0) \qquad (r = 1, \ldots, n - m),$$

y entonces podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{m} D_kf(\mathbf{x}_0)D_rh_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r}f(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n - m). \tag{8}$$

Si ahora multiplicamos (7) por λ_p, sumamos respecto a p, y añadimos el resultado a (8), obtenemos

$$\sum_{k=1}^{m}\left[D_kf(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^{m}\lambda_pD_kg_p(\mathbf{x}_0)\right]D_rh_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r}f(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^{m}\lambda_pD_{m+r}g_p(\mathbf{x}_0) = 0,$$

para $r = 1, \ldots, n - m$. En la suma relativa a k, la expresión en corchetes se anula en virtud de cómo fueron definidos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Por lo tanto, el primer miembro queda reducido a

$$D_{m+r}f(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^{m}\lambda_pD_{m+r}g_p(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n - m),$$

y estas son precisamente las ecuaciones que necesitamos para terminar la demostración.

NOTA. Cuando se pretende hallar la solución de un problema concreto de extremos por medio del método de Lagrange, se suele obtener muy fácilmente el sistema de ecuaciones (6), pero, en general, no existe un procedimiento simple para *resolver* realmente el sistema. A menudo se pueden utilizar artificios especiales a fin de obtener los valores extremos de f directamente de (6) sin hallar primeramente los puntos particulares en los que dichos extremos se alcanzan. El ejemplo que sigue ilustra alguno de estos artificios:

Ejemplo. Una superficie cuádrica con centro en el origen tiene la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1.$$

Determinar las longitudes de los semiejes.

Solución. Escribamos (x_1, x_2, x_3) en lugar de (x, y, z) e introduzcamos la forma cuadrática

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}x_ix_j, \tag{9}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y se eligen $a_{ij} = a_{ji}$ de forma que la ecuación de la superficie se convierta en $q(\mathbf{x}) = 1$. (Luego la forma cuadrática es simétrica y definida positiva.) El problema equivale a determinar los valores extremos de $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sujeta a la condición $g(\mathbf{x}) = 0$, donde $g(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) - 1$. Utilizando el método de Lagrange, introducimos un multiplicador y consideramos la ecuación vectorial

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda\nabla q(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{10}$$

(puesto que $\nabla g = \nabla q$). En este caso particular, tanto f como q son funciones homogéneas de grado 2 a las que se les puede aplicar el teorema de Euler (ver ejercicio 12.18) en (10), obteniéndose

$$\mathbf{x}\cdot\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda\mathbf{x}\cdot\nabla q(\mathbf{x}) = 2f(\mathbf{x}) + 2\lambda q(\mathbf{x}) = 0.$$

Puesto que $q(\mathbf{x}) = 1$ sobre la superficie, determinamos $\lambda = -f(\mathbf{x})$, y (10) se convierte en

$$t\,\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla q(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{11}$$

donde $t = 1/f(\mathbf{x})$. (En este problema no puede ser $f(\mathbf{x}) = 0$.) La ecuación vectorial (11) conduce a las tres ecuaciones para x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned}(a_{11} - t)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0,\\ a_{21}x_1 + (a_{22} - t)x_2 + a_{23}x_3 &= 0,\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - t)x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Como $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no puede ser una solución del problema, el determinante de este sistema debe anularse. Es decir, debemos tener

$$\begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

La ecuación (12) se llama *ecuación característica* de la forma cuadrática de (9). En este caso, la naturaleza geométrica del problema nos asegura que las tres raíces t_1, t_2, t_3 deben ser reales y positivas. [Puesto que $q(\mathbf{x})$ es simétrica y definida positiva, la teoría general de las formas cuadráticas también garantiza que las raíces de (12) son todas reales y positivas. (Ver referencia 13.1, teorema 9.5.)] Los semiejes de la superficie cuádrica son $t_1^{-1/2}$, $t_2^{-1/2}$, $t_3^{-1/2}$.

EJERCICIOS

Jacobianos

13.1 Sea f una función compleja definida para cada número complejo $z \neq 0$ por la ecuación $f(z) = 1/\bar{z}$. Probar que $J_f(z) = -|z|^{-4}$. Probar que f es uno a uno y calcular explícitamente la función f^{-1}.

13.2 Sea $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ la función vectorial definida (para cada punto (x_1, x_2, x_3) de $\mathbf{R}^3$ en el que $x_1 + x_2 + x_3 \neq -1$) como sigue:

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_k}{1 + x_1 + x_2 + x_3} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Probar que $J_{\mathbf{f}}(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1 + x_2 + x_3)^{-4}$. Probar que $\mathbf{f}$ es uno a uno y calcular explícitamente $\mathbf{f}^{-1}$.

13.3 Sea $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ una función vectorial definida en $\mathbf{R}^n$, supongamos que $\mathbf{f} \in C'$ en $\mathbf{R}^n$, y que $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ designa el determinante jacobiano. Sean $g_1, \dots, g_n$ n funciones reales definidas en $\mathbf{R}^1$ y con derivadas continuas $g_1', \dots, g_n'$. Sea $h_k(\mathbf{x}) = f_k[g_1(x_1), \dots, g_n(x_n)]$, $k = 1, 2, \dots, n$, y hagamos $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$. Probar que

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}[g_1(x_1), \dots, g_n(x_n)]g_1'(x_1) \cdots g_n'(x_n).$$

13.4 a) Si $x(r, \theta) = r \cos \theta$, $y(r, \theta) = r \operatorname{sen} \theta$, probar que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r.$$

b) Si $x(r, \theta, \phi) = r \cos \theta \operatorname{sen} \phi$, $y(r, \theta, \phi) = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$, $z = r \cos \phi$, probar que

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = -r^2 \operatorname{sen} \phi.$$

13.5 a) Establecer condiciones para f y g que permitan asegurar que en las ecuaciones $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ se pueden despejar u y v en un entorno de (x_0, y_0). Si las soluciones son $u = F(x, y)$, $v = G(x, y)$ y si $J = \partial(f, g)/\partial(u, v)$, probar que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial v}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial v}, \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial u}.$$

b) Calcular J así como las derivadas parciales de F y G en $(x_0, y_0) = (1, 1)$ cuando $f(u, v) = u^2 - v^2$, $g(u, v) = 2uv$.

13.6 Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ relacionadas como en el teorema 13.6. Consideremos el caso $n = 3$ y probemos que se verifica

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})D_1 g_i(\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \delta_{i,1} & D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_1 f_3(\mathbf{x}) \\ \delta_{i,2} & D_2 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_3(\mathbf{x}) \\ \delta_{i,3} & D_3 f_2(\mathbf{x}) & D_3 f_3(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

en donde $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\delta_{i,j} = 0$ ó 1 según que $i \neq j$ o $i = j$. Utilizar este resultado para deducir la fórmula

$$D_1 g_1 = \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(x_2, x_3)} \bigg/ \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}.$$

Existen expresiones análogas para las ocho derivadas $D_k g_i$ restantes.

13.7 Sea $f = u + iv$ una función compleja que satisfaga las siguientes condiciones: $u \in C'$ y $v \in C'$ en un disco abierto $A = \{z : |z| < 1\}$; f es continua en el disco cerrado $\bar{A} = \{z : |z| \leq 1\}$; $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = y$ siempre que $x^2 + y^2 = 1$; el jacobiano $J_f(z) > 0$ si $z \in A$. Sea $B = f(A)$ la imagen de A por f. Demostrar que:

a) Si X es un subconjunto abierto de A, entonces $f(X)$ es un subconjunto abierto de B.

b) B es un disco abierto de radio 1.

c) Para cada punto $u_0 + iv_0$ de B, existe solamente un número finito de puntos z de A tales que $f(z) = u_0 + iv_0$.

Problemas de extremos

13.8 Hallar y clasificar los valores extremos (si existen) de las funciones definidas por medio de las ecuaciones siguientes:

a) $f(x, y) = y^2 + x^2 y + x^4$,

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$,

c) $f(x, y) = (x - 1)^4 + (x - y)^4$,

d) $f(x, y) = y^2 - x^3$.

13.9 Hallar la menor distancia del punto $(0, b)$ del eje OY a la parábola $x^2 - 4y = 0$. Resolver este problema utilizando el método de Lagrange y también sin utilizarlo.

13.10 Revolver, utilizando el método de Lagrange, los siguientes problemas geométricos:

a) Hallar la mínima distancia que hay desde un punto (a_1, a_2, a_3) al plano de ecuación $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_0 = 0$.

b) Hallar el punto de la recta intersección de los dos planos

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_0 = 0$$

y

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_0 = 0$$

más próximo al origen.

13.11 Buscar el valor máximo de $|\sum_{k=1}^n a_k x_k|$, if $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$, utilizando

a) la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

b) el método de Lagrange.

13.12 Hallar el máximo de $(x_1 x_2 \dots x_n)^2$ con condición

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Utilizar este resultado para obtener la siguiente desigualdad, válida para números reales positivos $a_1, \dots, a_n$:

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

13.13 Si $f(\mathbf{x}) = x_1^k + \dots + x_n^k$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, probar que un extremo local de f, sujeto a la condición $x_1 + \dots + x_n = a$, es $a^k n^{1-k}$.

13.14 Probar que todos los puntos (x_1, x_2, x_3, x_4) en los que $x_1^2 + x_2^2$ tiene un extremo local sujeto a las dos condiciones $x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$, $x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 = 9$, se hallan entre

$$(0, 0, \pm\sqrt{3}, \pm 1), \quad (0, \pm 1, +2, 0), \quad (\pm 1, 0, 0, \pm\sqrt{3}), \quad (\pm 2, \pm 3, 0, 0).$$

¿Cuáles de ellos determinan máximos locales y cuáles mínimos locales? Dar razones para las conclusiones.

13.15 Probar que los valores extremos de $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, sujetos a las dos condiciones

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 1 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

y

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0, \qquad (b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0),$$

son t_1^{-1}, t_2^{-1}, en donde t_1 y t_2 son las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ a_{11} - t & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Probar que ésta es una ecuación cuadrática en t y dar un argumento geométrico para explicar por qué las raíces t_1, t_2 son reales y positivas.

13.16 Sea $\Delta = \det [x_{ij}]$ y sea $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$. Un teorema famoso de Hadamard establece que $|\Delta| \le d_1, \dots, d_n$, si $d_1, \dots, d_n$ son n constantes positivas tales que $|\mathbf{X}_i|^2 = d_i^2$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Probar esto considerando que Δ es una función de n^2 variables sujetas a n restricciones, utilizando el método de Lagrange para probar que, cuando Δ tiene un extremo bajo estas condiciones, debe ser

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} d_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n^2 \end{vmatrix}.$$

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

13.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol. 2, 2.ª ed. Ed. Reverté, S. A. Barcelona, Bogotá, Buenos Aires, Caracas, México.

13.2 Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*, Vol. 1. Traductor: K. A. Hirsch, Chelsea, New York, 1959.

13.3 Hancock, H., *Theory of Maxima and Minima*. Ginn, Boston, 1917.

CAPÍTULO 14

Integrales múltiples de Riemann

14.1 INTRODUCCIÓN

La integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede generalizar reemplazando el intervalo $[a, b]$ por una región n-dimensional en la que f esté definida y acotada. Las regiones más convenientes de $\mathbf{R}^n$ para este propósito son los intervalos n-dimensionales. Por ejemplo, en $\mathbf{R}^2$ se toma como región un rectángulo I dividido en subrectángulos I_k y se consideran las sumas de Riemann de la forma $\sum f(x_k, y_k)A(I_k)$, en donde $(x_k, y_k) \in I_k$ y $A(I_k)$ designa el área de I_k. Esto nos conduce al concepto de integral doble. Análogamente, en $\mathbf{R}^3$ utilizamos paralelepípedos rectangulares subdivididos en paralelepípedos más pequeños I_k y, considerando sumas de la forma $\sum f(x_k, y_k, z_k)V(I_k)$, en donde $(x_k, y_k, z_k) \in I_k$ y $V(I_k)$ es el volumen de I_k, llegamos al concepto de integral triple. Es tan riguroso como fácil discutir las integrales múltiples de $\mathbf{R}^n$, si disponemos de una generalización conveniente de las nociones de área y volumen. Este «volumen generalizado» se llama *medida* o *contenido* y se define en la próxima sección.

14.2 MEDIDA DE UN INTERVALO ACOTADO DE $\mathbf{R}^n$

Sean $A_1, \ldots, A_n$ n intervalos de $\mathbf{R}^1$; esto es, cada A_k puede ser acotado, no acotado, abierto, cerrado o semiabierto en $\mathbf{R}^1$. Un conjunto A de $\mathbf{R}^n$ de la forma

$$A = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_k \in A_k \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n\},$$

se llama intervalo general n-dimensional. Admitimos también el caso degenerado en el que uno o más de los intervalos A_k conste de un solo punto.

Si cada A_k es abierto, cerrado, o acotado en $\mathbf{R}^1$, entonces A posee la propiedad correspondiente de $\mathbf{R}^n$.

Si cada A_k está acotado, la medida n-dimensional (o n-medida) de A, designada por $\mu(A)$, se define por la igualdad

$$\mu(A) = \mu(A_1) \cdots \mu(A_n),$$

en donde $\mu(A_k)$ es la medida unidimensional (longitud) de A_k. Cuando $n = 2$, ésta se llama *área* de A, y cuando $n = 3$, se llama *volumen* de A. Obsérvese que $\mu(A) = 0$ si $\mu(A_k) = 0$ para un cierto k.

Estamos ahora en disposición de discutir la integración de Riemann de $\mathbf{R}^n$. La única diferencia esencial entre el caso $n = 1$ y el caso $n > 1$ es que la cantidad $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ que fue utilizada por la medida de la longitud del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se reemplaza por la medida $\mu(I_k)$ de un subintervalo n-dimensional. Puesto que el proceso es exactamente el mismo que en el caso unidimensional, omitiremos gran parte de los detalles de la discusión que sigue.

14.3 INTEGRAL DE RIEMANN DE UNA FUNCIÓN ACOTADA DEFINIDA EN UN INTERVALO COMPACTO DE $\mathbf{R}^n$

Definición 14.1. *Sea $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ un intervalo compacto de $\mathbf{R}^n$. Si P_k es una partición de A_k, el producto cartesiano*

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n,$$

se llama partición de A. Si P_k divide a A_k en m_k subintervalos unidimensionales, entonces P determina una descomposición de A como reunión de $m_1 \cdots m_n$ intervalos n-dimensionales (llamados subintervalos de P). Una partición P' de A se dice que es más fina que P si $P \subseteq P'$. El conjunto de todas las particiones de A se designará por $\mathscr{P}(A)$.

La figura 14.1 ilustra particiones de intervalos de $\mathbf{R}^2$ y de $\mathbf{R}^3$.

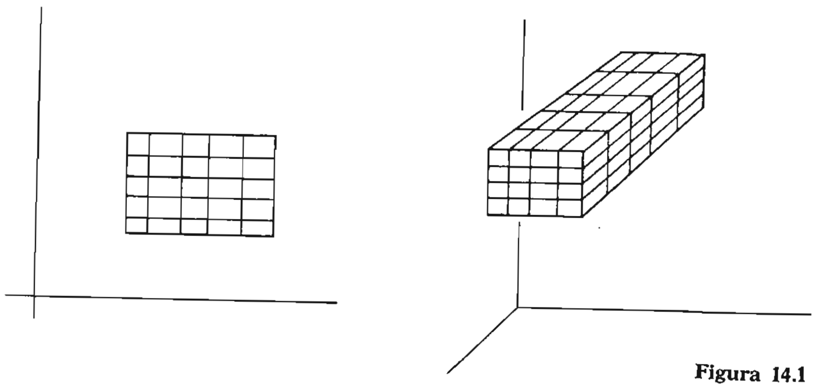


Figura 14.1

Definición 14.2. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo compacto I de $\mathbf{R}^n$. Si P es una partición de I en m subintervalos $I_1, \ldots, I_m$ y si $\mathbf{t}_k \in I_k$, una suma de la forma*

$$S(P, f) = \sum_{k=1}^{m} f(\mathbf{t}_k)\mu(I_k),$$

se llama suma de Riemann. Decimos que f es integrable de Riemann en I y escribimos $f \in R$ en I, siempre que exista un número real que verifique la siguiente propiedad: Para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de I tal que P es más fina que P_ε implica

$$|S(P, f) - A| < \varepsilon,$$

para todas las sumas de Riemann $S(P, f)$. Cuando un tal número A existe, es único y se designa por

$$\int_I f\, d\mathbf{x}, \qquad \int_I f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad o \text{ por } \quad \int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n).$$

NOTA. Para $n > 1$ la integral se llama integral *múltiple* o integral *n-pla*. Cuando $n = 2$ y 3, se utilizan los términos *doble* y *triple*. Como en $\mathbf{R}^1$, el símbolo $\mathbf{x}$ de $\int_I f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ es una «variable muda» y puede reemplazarse por cualquier otro símbolo conveniente. La notación $\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n$ se usa también en vez de $\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n)$. Las integrales dobles se escriben a menudo con dos signos integrales y las triples con tres símbolos, como por ejemplo:

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy, \qquad \iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Definición 14.3. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo compacto I de $\mathbf{R}^n$. Si P es una partición de I en m subintervalos $I_1, \ldots, I_m$, sean*

$$m_k(f) = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in I_k\}, \qquad M_k(f) = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in I_k\}.$$

Los números

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{m} M_k(f)\mu(I_k) \qquad y \qquad L(P, f) = \sum_{k=1}^{m} m_k(f)\mu(I_k),$$

se llaman sumas superiores e inferiores de Riemann. Las integrales superior e inferior de Riemann de f en I se definen como sigue:

$$\overline{\int_I} f\,d\mathbf{x} = \inf\{U(P,f) : P \in \mathscr{P}(I)\},$$

$$\underline{\int_I} f\,d\mathbf{x} = \sup\{L(P,f) : P \in \mathscr{P}(I)\}.$$

La función f satisface la condición de Riemann sobre I si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de I tal que una partición P más fina que P_ε implica $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$.

NOTA. Como en el caso unidimensional, las integrales superior e inferior verifican las siguientes propiedades:

a)
$$\overline{\int_I} (f+g)\,d\mathbf{x} \le \overline{\int_I} f\,d\mathbf{x} + \overline{\int_I} g\,d\mathbf{x},$$

$$\underline{\int_I} (f+g)\,d\mathbf{x} \ge \underline{\int_I} f\,d\mathbf{x} + \underline{\int_I} g\,d\mathbf{x}.$$

b) Si un intervalo I se descompone en una reunión de dos intervalos I_1, I_2 que no se solapen, se tiene

$$\overline{\int_I} f\,d\mathbf{x} = \overline{\int_{I_1}} f\,d\mathbf{x} + \overline{\int_{I_2}} f\,d\mathbf{x}$$

y

$$\underline{\int_I} f\,d\mathbf{x} = \underline{\int_{I_1}} f\,d\mathbf{x} + \underline{\int_{I_2}} f\,d\mathbf{x}.$$

La demostración del teorema que sigue es esencialmente la misma que la del teorema 7.19 y la omitiremos.

Teorema 14.4. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo compacto I de $\mathbf{R}^n$. Entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:*

i) *$f \in R$ en I.*
ii) *f satisface la condición de Riemann en I.*
iii) *$\underline{\int_I} f\,d\mathbf{x} = \overline{\int_I} f\,d\mathbf{x}$.*

14.4 CONJUNTOS DE MEDIDA CERO Y CRITERIO DE LEBESGUE PARA LA EXISTENCIA DE UNA INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN

Un subconjunto T de $\mathbf{R}^n$ tiene n-medida cero si, para cada $\varepsilon > 0$, es posible recubrir a T por medio de una colección numerable de intervalos n-dimensionales, la suma de cuyas n-medidas sea $< \varepsilon$.

Como en el caso unidimensional, la reunión de una colección numerable de conjuntos de n-medida 0 es asimismo de n-medida 0. Si $m < n$, cada subconjunto de $\mathbf{R}^m$, considerado como subconjunto de $\mathbf{R}^n$, tiene n-medida 0.

Se dice que una propiedad se verifica casi en todo un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ si se verifica en todo S excepto en un subconjunto de n-medida 0.

El criterio de Lebesgue para la existencia de una integral de Riemann en $\mathbf{R}^1$ admite una extensión directa al caso de integrales múltiples. La demostración es análoga a la del teorema 7.48.

Teorema 14.5. *Sea f una función definida y acotada en un intervalo compacto I de $\mathbf{R}^n$. Entonces $f \in R$ en I si, y sólo si, el conjunto de puntos de discontinuidad de f en I tiene n-medida cero.*

14.5 CÁLCULO DE UNA INTEGRAL MÚLTIPLE POR INTEGRACIÓN REITERADA

El lector ha aprendido, en el Cálculo elemental, a calcular ciertas integrales dobles y triples por integración sucesiva respecto a cada variable. Por ejemplo, si f es una función de dos variables continua en un rectángulo compacto Q del plano xy, definido por $Q = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$, entonces para cada y fijo de $[c, d]$ la función F definida por medio de la ecuación $F(x) = f(x, y)$ es continua (y por lo tanto integrable) en $[a, b]$. El valor de la integral $\int_a^b F(x)\,dx$ depende de y y define una nueva función G, en donde $G(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$. Esta función G es continua (por el teorema 7.38), y por lo tanto integrable en $[c, d]$. La integral $\int_c^d G(y)\,dy$ tiene el mismo valor que la integral *doble* $\int_Q f(x, y)\,d(x, y)$. Esto es, se verifica la ecuación

$$\int_Q f(x, y)\,d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy. \tag{1}$$

(Esta fórmula se demostrará más adelante.) La cuestión que ahora se presenta consiste en ver si es válido un resultado análogo cuando f es integrable (y no necesariamente continua) en Q. Podemos ver inmediatamente que es imposible evitar ciertas dificultades. Por ejemplo, la integral interior $\int_a^b f(x, y)\,dx$ puede no existir para ciertos valores de y, aun cuando la integral doble exista. En efecto, si f es discontinua en cada punto del segmento rectilíneo $y = y_0$, $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x, y_0)\,dx$ no existirá. Sin embargo, este segmento rectilíneo es un conjunto cuya 2-medida es cero y por lo tanto no afecta a la integrabilidad de f en el rectángulo entero Q. En un caso de esta naturaleza debemos hacer uso de las integrales superior e inferior a fin de obtener una generalización conveniente de (1).

Teorema 14.6. *Sea f definida y acotada en un rectángulo compacto*

$$Q = [a, b] \times [c, d] \qquad \textit{de } \mathbf{R}^2.$$

Entonces tenemos:

i) $\underline{\int}_Q f\,d(x, y) \leq \underline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)\,dy\right] dx \leq \overline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)\,dy\right] dx \leq \overline{\int}_Q f\,d(x, y)$.

ii) *La proposición* (i) *se verifica también si se substituye en todas partes* $\overline{\int}_c^d$ *por* $\underline{\int}_c^d$.

iii) $\underline{\int}_Q f\,d(x, y) \leq \underline{\int}_c^d \left[\overline{\int}_a^b f(x, y)\,dx\right] dy \leq \overline{\int}_c^d \left[\overline{\int}_a^b f(x, y)\,dx\right] dy \leq \overline{\int}_Q f\,d(x, y)$.

iv) *La proposición* (iii) *se verifica también si se substituye en todas partes* $\overline{\int}_a^b$ *por* $\underline{\int}_a^b$.

v) *Cuando* $\int_Q f(x, y)\,d(x, y)$ *existe, tenemos*

$$\begin{aligned}\int_Q f(x, y)\,d(x, y) &= \int_a^b \left[\underline{\int}_c^d f(x, y)\,dy\right] dx = \int_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)\,dy\right] dx \\ &= \int_c^d \left[\underline{\int}_a^b f(x, y)\,dx\right] dy = \int_c^d \left[\overline{\int}_a^b f(x, y)\,dx\right] dy.\end{aligned}$$

Demostración. Para probar (i), definimos F por medio de la ecuación

$$F(x) = \overline{\int}_c^d f(x, y)\,dy, \qquad \text{si } x \in [a, b].$$

Entonces $|F(x)| \leq M(d - c)$, en donde $M = \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in Q\}$, y podemos considerar

$$\bar{I} = \overline{\int}_a^b F(x)\,dx = \overline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)\,dy\right] dx.$$

Análogamente, definimos

$$\underline{I} = \underline{\int}_a^b F(x)\,dx = \underline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)\,dy\right] dx.$$

Sea $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea

$$P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\},$$

una partición de $[c, d]$. Entonces $P = P_1 \times P_2$ es una partición de Q en mn subrectángulos Q_{ij} y definimos

$$\bar{I}_{ij} = \overline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\overline{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\,dy\right] dx, \qquad \underline{I}_{ij} = \underline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\overline{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\,dy\right] dx.$$

Puesto que se verifica

$$\overline{\int}_c^d f(x, y)\,dy = \sum_{j=1}^m \overline{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\,dy,$$

podemos escribir

$$\begin{aligned}\overline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_c^d f(x, y)\,dy\right] dx &\leq \sum_{j=1}^m \overline{\int}_a^b \left[\overline{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\,dy\right] dx \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \overline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\overline{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\,dy\right] dx.\end{aligned}$$

Esto es, tenemos la desigualdad

$$\bar{I} \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \bar{I}_{ij}.$$

Análogamente, se obtiene

$$\underline{I} \geq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \underline{I}_{ij}.$$

Si escribimos

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in Q_{ij}\},$$

y

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in Q_{ij}\},$$

entonces, de la desigualdad $m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}$, $(x, y) \in Q_{ij}$, obtenemos

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x, y)\, dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

Esto implica, a su vez,

$$m_{ij}\mu(Q_{ij}) \leq \underline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} \left[\overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x, y)\, dy \right] dx$$

$$\leq \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} \left[\overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x, y)\, dy \right] dx \leq M_{ij}\mu(Q_{ij}).$$

Sumando respecto de i y de j y utilizando las desigualdades establecidas anteriormente, encontramos

$$L(P, f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq U(P, f).$$

Dado que esto se verifica para toda partición P de Q, debemos tener

$$\underline{\int_Q} f\, d(x, y) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \overline{\int_Q} f\, d(x, y).$$

Esto prueba la proposición (i).

Es claro que la demostración precedente puede llevarse a término también si la función F es definida originalmente por la fórmula

$$F(x) = \underline{\int_c^d} f(x, y)\, dy,$$

y entonces (ii) se deduce utilizando un razonamiento análogo.

Las proposiciones (iii) y (iv) se pueden demostrar análogamente intercambiando los papeles de x e y. Finalmente, la proposición (v) es una consecuencia inmediata de la proposición (i) y de la (iv).

Como corolario, tenemos la fórmula mencionada anteriormente:

$$\int_Q f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy,$$

que es válida cuando f es continua en Q. Este resultado se conoce a menudo como el *teorema de Fubini*.

NOTA. La existencia de las integrales reiteradas

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx \qquad \text{y} \qquad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy,$$

no implica la existencia de $\int_Q f(x, y)\, d(x, y)$. Un contraejemplo puede verse en el ejercicio 14.7.

Antes de comentar el teorema análogo al teorema 14.6 en $\mathbf{R}^n$, introducimos cierta notación y terminología nuevas. Si $k \leq n$, el conjunto de $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ para los que $x_k = 0$ se llama el *hiperplano coordenado* Π_k. Dado un conjunto S de $\mathbf{R}^n$, la *proyección* S_k de S en Π_k se define como la imagen de $\bar{S}$ en la aplicación cuyo valor en cada punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de S es $(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Es fácil probar que dicha aplicación es continua en S. Se sigue que si S es compacto, cada proyección S_k es compacta. Asimismo, si S es conexo, cada S_k es conexo. Las proyecciones de $\mathbf{R}^3$ se hallan ilustradas en la fig. 14.2.

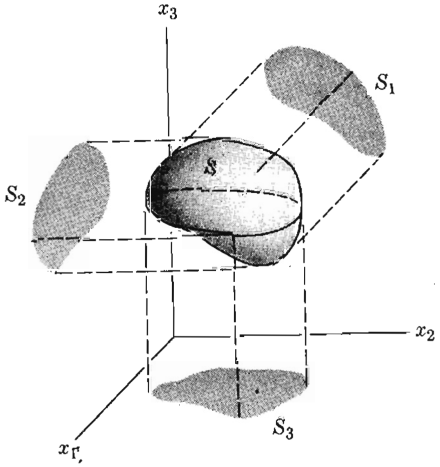


Figura 14.2

Un teorema enteramente análogo al teorema 14.6 se verifica para integrales n-plas. Será suficiente indicar cómo se hace la extensión cuando $n = 3$. En este caso, f está definida y acotada en un intervalo compacto $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ de $\mathbf{R}^3$ y la proposición (i) del teorema 14.6 se reemplaza por

$$\underline{\int_Q} f\, d\mathbf{x} \leq \underline{\int_{a_1}^{b_1}} \left[\overline{\int_{Q_1}} f\, d(x_2, x_3) \right] dx_1 \leq \overline{\int_{a_1}^{b_1}} \left[\overline{\int_{Q_1}} f\, d(x_2, x_3) \right] dx_1 \leq \overline{\int_Q} f\, d\mathbf{x} \quad (2)$$

en donde Q_1 es la proyección de Q en el plano coordenado Π_1. Cuando $\int_Q f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ existe, la parte análoga a la parte (v) del teorema 14.6 la constituye la fórmula

$$\int_Q f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1}\left[\overline{\int_{Q_1}} f\,d(x_2, x_3)\right]dx_1 = \int_{Q_1}\left[\overline{\int_{a_1}^{b_1}} f\,dx_1\right]d(x_2, x_3). \tag{3}$$

Como en el teorema 14.6, son válidas las proposiciones análogas obtenidas reemplazando de forma adecuada las integrales superiores por las integrales inferiores, y existen también fórmulas análogas para las proyecciones Q_2 y Q_3.

El lector no tendrá dificultad alguna en establecer resultados parecidos para el caso de integrales n-plas (pueden probarse mediante el método utilizado en el teorema 14.6). El caso particular en que existe la integral n-pla $\int_Q f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ es de especial importancia y puede establecerse como sigue:

Teorema 14.7. *Sea f definida y acotada en un intervalo compacto*

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

de $\mathbf{R}^n$. Supongamos que $\int_Q f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ existe. Entonces

$$\int_Q f\,d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1}\left[\overline{\int_{Q_1}} f\,d(x_2, \ldots, x_n)\right]dx_1 = \int_{Q_1}\left[\overline{\int_{a_1}^{b_1}} f\,dx_1\right]d(x_2, \ldots, x_n).$$

Son válidas también las fórmulas análogas obtenidas reemplazando las integrales inferiores por las superiores y Q_1 por Q_k, proyección de Q en Π_k.

14.6 CONJUNTOS MEDIBLES JORDAN EN $\mathbf{R}^n$

Hasta aquí la integral múltiple $\int_I f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ se ha definido únicamente para intervalos I. Esto es, naturalmente, demasiado restrictivo para las aplicaciones de la integración. No es difícil extender la definición a conjuntos acotados más generales, llamados conjuntos *medibles Jordan.* Estos conjuntos se estudian en esta sección. La definición hace uso de la frontera de un conjunto S de $\mathbf{R}^n$. Recordemos que un punto $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ es un *punto frontera* de S si cada n-bola $B(\mathbf{x})$ contiene un punto de S y también un punto que no sea de S. El conjunto de todos los puntos frontera de S se *frontera* de S y se designa por ∂S. (Ver sección 3.16.)

Definición 14.8. *Sea S un subconjunto de un intervalo compacto I de $\mathbf{R}^n$. Para cada partición P de I definimos $\underline{J}(P, S)$ como la suma de las medidas de los subintervalos de P que contienen sólo puntos interiores de S y $\bar{J}(P, S)$ como la suma de las medidas de los subintervalos de P que contienen puntos de $S \cup \partial S$. Los números*

$$\underline{c}(S) = \sup\{\underline{J}(P, S) : P \in \mathscr{P}(I)\},$$
$$\bar{c}(S) = \inf\{\bar{J}(P, S) : P \in \mathscr{P}(I)\},$$

se llaman, respectivamente, contenido (n-dimensional) interior y contenido exterior de Jordan de S. El conjunto S se llama medible Jordan si $\underline{c}(S) = \bar{c}(S)$, en cuyo caso este valor común se llama el contenido de Jordan de S y se designa por $c(S)$.

Es fácil verificar que $\underline{c}(S)$ y $\bar{c}(S)$ dependen sólo de S y no del intervalo I que contiene a S. Además, $0 \leq \underline{c}(S) \leq \bar{c}(S)$.

Si S tiene contenido 0, entonces $\underline{c}(S) = \bar{c}(S) = 0$. Luego, para cada $\varepsilon > 0$, se puede recubrir a S por medio de una colección finita de intervalos, tales que la suma de sus medidas sea $< \varepsilon$. Obsérvese que el contenido cero se describe utilizando recubrimientos *finitos,* mientras que la medida cero se describe utilizando recubrimientos *numerables.* Cualquier conjunto que tenga contenido cero tendrá también medida cero, pero el recíproco no es cierto.

Cada intervalo compacto Q es medible de Jordan y su contenido, $c(Q)$, es igual a su media $\mu(Q)$. Si $k < n$, el contenido n-dimensional de cada conjunto acotado de $\mathbf{R}^k$ es cero.

También se dice que los conjuntos medibles Jordan S de $\mathbf{R}^2$ tienen *área* $c(S)$. En este caso, las sumas $\underline{J}(P, S)$ y $\bar{J}(P, S)$ representan aproximaciones al área desde el «interior» y desde el «exterior» de S, respectivamente. Esto está representado en la figura 14.3, en donde los rectángulos sombreados ligeramente son los considerados en $\bar{J}(P, S)$, y los rectángulos sombreados con mayor intensidad son los de $\underline{J}(P, S)$. Para los conjuntos de $\mathbf{R}^3$, $c(S)$ se llama también *volumen* de S.

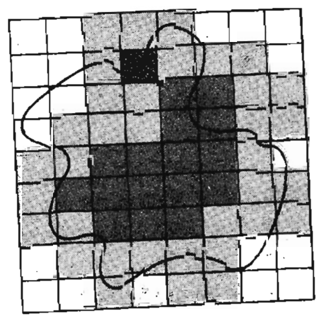


Figura 14.3

El próximo teorema prueba que un conjunto acotado tiene contenido de Jordan si, y sólo si, su frontera no es demasiado «gruesa».

Teorema 14.9. *Sea S un conjunto acotado de $\mathbf{R}^n$ y sea ∂S su frontera. Entonces tenemos*

$$\bar{c}(\partial S) = \bar{c}(S) - \underline{c}(S).$$

En consecuencia, S es medible Jordan si, y sólo si, ∂S tiene contenido cero.

Demostración. Sea I un intervalo compacto que contenga a S y a ∂S. Entonces para cada partición P de I tenemos

$$\bar{J}(P, \partial S) = \bar{J}(P, S) - \underline{J}(P, S).$$

Por consiguiente, $\bar{J}(P, \partial S) \geq \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$ y por tanto $\bar{c}(\partial S) \geq \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$. Para obtener la desigualdad contraria, dado $\varepsilon > 0$, elegimos P_1 tal que $\bar{J}(P_1, S) < \bar{c}(S) + \varepsilon/2$ y elegimos P_2 tal que $\underline{J}(P_2, S) > \underline{c}(S) - \varepsilon/2$. Sea $P = P_1 \cup P_2$. Como en los refinamientos crecen las sumas interiores $\underline{J}$ y decrecen las sumas exteriores $\bar{J}$, obtenemos

$$\bar{c}(\partial S) \leq \bar{J}(P, \partial S) = \bar{J}(P, S) - \underline{J}(P, S) \leq \bar{J}(P_1, S) - \underline{J}(P_2, S)$$
$$< \bar{c}(S) - \underline{c}(S) + \varepsilon.$$

Puesto que ε es arbitrario, esto significa que $\bar{c}(\partial S) \leq \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$. Por consiguiente, $\bar{c}(\partial S) = \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$ y la demostración está terminada.

14.7 INTEGRACIÓN MÚLTIPLE SOBRE CONJUNTOS MEDIBLES JORDAN

Definición 14.10. *Sea f definida y acotada en un conjunto medible Jordan, acotado, S de $\mathbf{R}^n$. Sea I un intervalo compacto que contenga a S y definamos g en I como sigue:*

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & si\ \mathbf{x} \in S, \\ 0 & si\ \mathbf{x} \in I - S. \end{cases}$$

Entonces se dice que f es integrable Riemann en S y se escribe $f \in R$ en S, siempre que existe la integral $\int_I g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Escribimos también

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_I g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Las integrales superior e inferior $\bar{\int}_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ e $\underline{\int}_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ se definen análogamente.

NOTA. Considerando las sumas de Riemann que aproximan $\int_I g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ es fácil ver que la integral $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ no depende de la elección del intervalo I utilizado para encerrar a S.

Ahora podemos dar una condición necesaria y suficiente para que exista $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.

Teorema 14.11. *Sea S un conjunto medible Jordan de $\mathbf{R}^n$, y sea f definida y acotada en S. Entonces $f \in R$ en S si, y sólo si, las discontinuidades de f en S constituyen un conjunto de medida cero.*

Demostración. Sea I un intervalo compacto que contenga a S y sea $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} \in S$, $g(\mathbf{x}) = 0$ cuando $\mathbf{x} \in I - S$. Las discontinuidades de f serán discontinuidades de g. Sin embargo, g puede tener además discontinuidades en alguno o en todos los puntos de la frontera de S. Dado que S es medible de Jordan, el teorema 14.9 nos dice que $c(\partial S) = 0$. Por lo tanto, $g \in R$ en I si, y sólo si, las discontinuidades de f forman un conjunto de medida cero.

14.8 EL CONTENIDO DE JORDAN EXPRESADO COMO INTEGRAL DE RIEMANN

Teorema 14.12. *Sea S un conjunto compacto medible Jordan de $\mathbf{R}^n$. Entonces la integral $\int_S 1$ existe y tenemos*

$$c(S) = \int_S 1.$$

Demostración. Sea I un intervalo compacto que contenga a S y sea χ_S la función característica de S. Esto es,

$$\chi_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S, \\ 0 & \text{si } x \in I - S. \end{cases}$$

Las discontinuidades de χ_S en I son los puntos de la frontera de S y éstos constituyen un conjunto de medida cero, luego la integral $\int_I \chi_S$ existe, y por tanto $\int_S 1$ existe.

Sea P una partición de I en subintervalos $I_1, \ldots, I_m$, y sea

$$A = \{k : I_k \cap S \text{ es no vacío}\}.$$

Si $k \in A$, tenemos

$$M_k(\chi_S) = \sup \{\chi_S(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in I_k\} = 1,$$

y $M_k(\chi_S) = 0$ si $k \notin A$, luego

$$U(P, \chi_S) = \sum_{k=1}^{m} M_k(\chi_S)\mu(I_k) = \sum_{k \in A} \mu(I_k) = \bar{J}(P, \chi_S).$$

Puesto que esto se verifica para toda partición, tenemos $\bar{\int}_I \chi_S = \bar{c}(S) = c(S)$. Pero

$$\bar{\int}_I \chi_S = \int_I \chi_S \text{ luego } c(S) = \int_I \chi_S = \int_S 1.$$

14.9 PROPIEDAD ADITIVA DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

El próximo teorema prueba que la integral es aditiva respecto de los conjuntos que tienen contenido de Jordan.

Teorema 14.13. *Supongamos que $f \in R$ en un conjunto medible Jordan S de $\mathbf{R}^n$. Supongamos que $S = A \cup B$, en donde A y B son medibles Jordan pero sin puntos interiores en común. Entonces $f \in R$ en A, $f \in R$ en B, y tenemos*

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{4}$$

Demostración. Sea I un intervalo compacto que contenga a S y definamos g como sigue:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in S, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in I - S. \end{cases}$$

La existencia de $\int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ e $\int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ es una consecuencia inmediata del teorema 14.11. Para demostrar (4), sea P una partición de I en m subintervalos $I_1, \ldots, I_m$ y formemos una suma de Riemann

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^{m} g(\mathbf{t}_k)\mu(I_k).$$

Si S_A designa la parte de la suma que procede de aquellos subintervalos que contienen puntos de A, y S_B se define análogamente, podemos escribir

$$S(P, g) = S_A + S_B - S_C,$$

en donde S_C contiene los términos procedentes de los subintervalos que contienen a la vez puntos de A y de B. En particular, todos los puntos comunes a las dos fronteras ∂A y ∂B pertenecerán a esta tercera clase. Pero S_A es una suma de Riemann que aproxima la integral $\int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, y S_B es una suma de Riemann que aproxima $\int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Puesto que $c(\partial A \cap \partial B) = 0$, se sigue que $|S_C|$ puede hacerse suficientemente pequeño cuando P es suficientemente fina. La ecuación del teorema se deduce fácilmente de estas consideraciones.

NOTA. La fórmula (4) se verifica también para integrales superiores e inferiores.

Para conjuntos S cuya estructura es relativamente simple, es posible utilizar el teorema 14.6 para obtener fórmulas que den el valor de la integral doble por medio de integrales reiteradas. En el próximo teorema se dan dichas fórmulas.

Teorema 14.14. *Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos funciones continuas definidas en $[a, b]$ tales que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para cada x de $[a, b]$. Sea S el conjunto compacto de $\mathbf{R}^2$ dado por*

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}.$$

Si $f \in R$ en S, tenemos

$$\int_S f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \left[\bar{\int}_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

NOTA. El conjunto S es medible Jordan puesto que su frontera tiene contenido cero. (Ver ejercicio 14.9.)

Proposiciones análogas son válidas también en el caso de integrales n-múltiples. Las extensiones son obvias y no precisan posteriores comentarios.

La figura 14.4 ilustra el tipo de región descrita en el teorema. Para conjuntos que puedan descomponerse en un número finito de regiones medibles Jordan de este tipo, podemos aplicar la integración reiterada a cada parte por separado y sumar los resultados de acuerdo con el teorema 14.13.

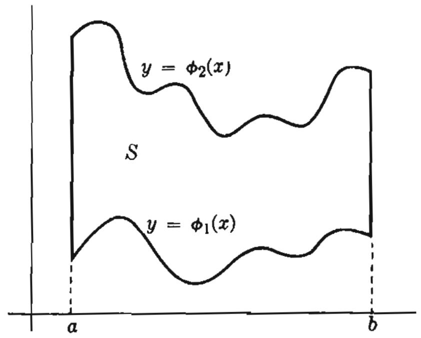


Figura 14.4

14.10 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES MÚLTIPLES

Como en el caso unidimensional, las integrales múltiples verifican una propiedad de valor medio. Se obtiene como consecuencia inmediata del siguiente teorema, cuya demostración se deja como ejercicio.

Teorema 14.15. *Supongamos que $f \in R$ y que $g \in R$ en un conjunto medible de Jordan S de $\mathbf{R}^n$. Si $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x}$ de S, tenemos*

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Teorema 14.16 (Teorema del valor medio para integrales mútiples). *Supongamos que $g \in R$ y que $f \in R$ en un conjunto medible de Jordan S de $\mathbf{R}^n$ y supongamos que $g(\mathbf{x}) \geq 0$ para cada $\mathbf{x}$ de S. Sean $m = \inf f(S), M = \sup f(S)$. Entonces existe un número real λ en el intervalo $m \leq \lambda \leq M$ tal que*

$$\int_S f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lambda \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{5}$$

En particular, tenemos

$$mc(S) \leq \int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq Mc(S). \tag{6}$$

NOTA. Si, además, S es conexo y f es continua en S, entonces $\lambda = f(\mathbf{x}_0)$ para algún $\mathbf{x}_0$ de S (por el teorema 4.38) y (5) se transforma en

$$\int_S f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0) \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{7}$$

En particular, (7) implica $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)c(S)$, en donde $\mathbf{x}_0 \in S$.

Demostración. Puesto que $g(\mathbf{x}) \geq 0$, tenemos $mg(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}) \leq Mg(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x}$ de S. Por el teorema 14.15, podemos escribir

$$m \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq \int_S f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq M \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Si $\int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$, (5) se verifica para todo λ. Si $\int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} > 0$, (5) se verifica para $\lambda = \int_S f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} / \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Haciendo $g(\mathbf{x}) \equiv 1$, se obtiene (6).

Podemos utilizar (6) para probar que es posible alterar el integrando f en un conjunto de contenido cero sin que quede afectado el valor de la integral. En efecto, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 14.17. *Supongamos que $f \in R$ en un conjunto medible Jordan S de $\mathbf{R}^n$. Sea T un subconjunto de S que posea contenido n-dimensional de Jordan cero. Sea g una función, definida y acotada en S, tal que $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} \in S - T$. Entonces $g \in R$ en S e*

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_S g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Demostración. Sea $h = f - g$. Entonces $\int_S h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_T h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{S-T} h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Sin embargo, $\int_T h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$ en virtud de (6), e $\int_{S-T} h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$ ya que $h(\mathbf{x}) = 0$ para cada $\mathbf{x}$ de $S - T$.

NOTA. El teorema sugiere un método para extender la definición de la integral de Riemann $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ a funciones que no estén definidas y acotadas en *todo* el conjunto S. En efecto, sea S un conjunto acotado de $\mathbf{R}^n$ que tenga contenido de Jordan y sea T un subconjunto de S con contenido cero. Si f está definida y acotada en $S - T$ y si $\int_{S-T} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ existe, convenimos en escribir

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{S-T} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

y decimos que f es integrable Riemann en S. A la vista del teorema que acabamos de demostrar, esto es lo mismo que extender el dominio de definición de f a todo el conjunto S, definiendo f en T de tal manera que permanezca acotada.

EJERCICIOS

Integrales múltiples

14.1 Si $f_1 \in R$ en $[a_1, b_1]$, ..., $f_n \in R$ en $[a_n, b_n]$, probar que

$$\int_S f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\, d(x_1,\ldots,x_n) = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\, dx_1\right)\cdots\left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n)\, dx_n\right),$$

en donde $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

14.2 Sea f definida y acotada en un rectángulo compacto $Q = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbf{R}^2$. Supongamos que para cada y fijo de $[c, d]$, $f(x, y)$ es una función de x, creciente, y que para cada x fijo de $[a, b]$, $f(x, y)$ es una función de y, creciente. Probar que $f \in R$ en Q.

14.3 Evaluar cada una de las integrales dobles siguientes:

a) $\displaystyle\iint_Q \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y\, dx\, dy$, en donde $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

b) $\displaystyle\iint_Q |\cos(x + y)|\, dx\, dy$, en donde $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

c) $\displaystyle\iint_Q [x + y]\, dx\, dy$, donde $Q = [0, 2] \times [0, 2]$, y $[t]$ es la parte entera de t.

14.4 Sea $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ y calcular $\iint_Q f(x, y)\, dx\, dy$ en cada caso.

a) $f(x, y) = 1 - x - y$ si $x + y \le 1$, $f(x, y) = 0$ en otro caso.
b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ si $x^2 + y^2 \le 1$, $f(x, y) = 0$ en otro caso.
c) $f(x, y) = x + y$ si $x^2 \le y \le 2x^2$, $f(x, y) = 0$ en otro caso.

14.5 Definimos f en el cuadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 2y & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

a) Probar que $\int_0^t f(x, y)\, dy$ existe para $0 \le t \le 1$ y que

$$\int_0^1 \left[\int_0^t f(x, y)\, dy\right] dx = t^2,$$

y

$$\int_0^1 \left[\int_0^t f(x, y)\, dy\right] dx = t.$$

Esto prueba que $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)\, dy]\, dx$ existe y es igual a 1.

b) Probar que $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)\, dx]\, dy$ existe y buscar su valor.
c) Probar que la integral doble $\int_Q f(x, y)\, d(x, y)$ no existe.

14.6 Definir f en el cuadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si en uno al menos de los valores } x,\ y \text{ es irracional,} \\ 1/n & \text{si } y \text{ es racional y } x = m/n, \end{cases}$$

en donde m y n son primos entre sí, $n > 0$. Probar que

$$\int_0^1 f(x, y)\, dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y)\, dx\right] dy = \int_Q f(x, y)\, d(x, y) = 0$$

pero que $\int_0^1 f(x, y)\, dy$ no existe para x racional.

14.7 Si p_k designa el k-ésimo número primo, sea

$$S(p_k) = \left\{\left(\frac{n}{p_k}, \frac{m}{p_k}\right) : n = 1, 2, \ldots, p_k - 1, \quad m = 1, 2, \ldots, p_k - 1\right\},$$

sea $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S(p_k)$, y sea $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

a) Probar que S es denso en Q (esto es, la adherencia de S contiene a Q) pero que cualquier recta paralela a los ejes coordenados contiene a lo sumo un subconjunto finito de S.
b) Definir f en Q como sigue:

$$f(x, y) = 0 \quad \text{si } (x, y) \in S, \qquad f(x, y) = 1 \quad \text{si } (x, y) \in Q - S.$$

Probar que $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)\, dy]\, dx = \int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)\, dx]\, dy = 1$, pero que la integral doble $\int_Q f(x, y)\, d(x, y)$ no existe.

Contenido de Jordan

14.8 Sea S un conjunto acotado de $\mathbf{R}^n$ que posea a lo sumo un número finito de puntos de acumulación. Demostrar que $c(S) = 0$.

14.9 Sea f una función real continua, definida en $[a, b]$. Designemos por S la gráfica de f, esto es, $S = \{(x, y) : y = f(x),\ a \le x \le b\}$. Probar que S tiene contenido de Jordan 2-dimensional cero.

14.10 Sea Γ una curva rectificable de $\mathbf{R}^n$. Probar que Γ tiene contenido de Jordan n-dimensional cero.

14.11 Sea f una función no negativa definida en un conjunto S de $\mathbf{R}^n$. El *conjunto de ordenadas* de f sobre S es el siguiente subconjunto de $\mathbf{R}^{n+1}$:

$$\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \ldots, x_n) \in S,\ 0 \le x_{n+1} \le f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Si S es una región medible Jordan de $\mathbf{R}^n$ y si f es continua en S, probar que el conjunto de ordenadas de f sobre S tiene contenido de Jordan $(n+1)$-dimensional cuyo valor es $\int_S f(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n)$. Interpretar geométricamente este problema cuando $n = 1$ y $n = 2$.

14.12 Supongamos que $f \in R$ en S y supongamos $\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$ (S es un subconjunto de $\mathbf{R}^n$). Sea $A = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S,\ f(\mathbf{x}) < 0\}$ y supongamos que $c(A) = 0$. Probar que existe un conjunto B de medida cero tal que $f(\mathbf{x}) = 0$ para cada $\mathbf{x}$ de $S - B$.

14.13 Supongamos que $f \in R$ en S, en donde S es una región de $\mathbf{R}^n$ y f es continua en S. Probar que existe un punto *interior* $\mathbf{x}_0$ de S tal que

$$\int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)c(S).$$

14.14 Sea f continua en un rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$. Para cada punto interior (x_1, x_2) de Q, definimos

$$F(x_1, x_2) = \int_a^{x_1} \left(\int_c^{x_2} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Probar que $D_{1,2}F(x_1, x_2) = D_{2,1}F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$.

14.15 Sea T la siguiente región triangular del plano:

$$T = \left\{ (x, y) : 0 \le \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \le 1 \right\}, \quad \text{en donde } a > 0,\ b > 0.$$

Supongamos que f admite derivada parcial segunda $D_{1,2}f$, continua en T. Probar que existe un punto (x_0, y_0) del segmento $(a, 0)$ y $(0, b)$ tal que

$$\int_T D_{1,2}f(x, y)\, d(x, y) = f(0, 0) - f(a, 0) + aD_1 f(x_0, y_0).$$

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

14.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol. 2, 2.ª ed. Ed. Reverté, S. A. Barcelona, Bogotá, Buenos Aires, Caracas, México.

14.2 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration*. Oxford University Press, 1937.

14.3 Rogosinski, W. W., *Volume and Integral*. Wiley, New York, 1952.

CAPÍTULO 15

Integrales de Lebesgue múltiples

15.1 INTRODUCCIÓN

La integral de Lebesgue fue descrita en el capítulo 10 para funciones definidas en subconjuntos de $\mathbf{R}^1$. El método utilizado allí se puede generalizar a fin de obtener una teoría de la integración de Lebesgue para funciones definidas en subconjuntos del espacio n-dimensional $\mathbf{R}^n$. Las integrales resultantes se llaman *integrales múltiples*. Cuando $n = 2$ se llaman *integrales dobles*, y cuando $n = 3$ se llaman *integrales triples*.

Como en el caso unidimensional, la integración múltiple de Lebesgue es una extensión de la integración múltiple de Riemann. Se puede aplicar a funciones más generales, trata lo mismo funciones acotadas como funciones no acotadas, y maneja conjuntos más generales como regiones de integración.

Las definiciones básicas y los teoremas principales de convergencia son completamente análogos a los del caso unidimensional. Sin embargo, aparece un rasgo que no aparece en $\mathbf{R}^1$. Una integral múltiple de $\mathbf{R}^n$ se puede obtener calculando una sucesión de n integrales unidimensionales. Este resultado, llamado *teorema de Fubini*, es uno de los más importantes dados en este capítulo.

Como en el caso unidimensional definimos la integral primeramente para funciones escalonadas, después para una clase más amplia (llamadas funciones superiores) que contiene los límites de ciertas sucesiones crecientes de funciones escalonadas, y finalmente para una clase todavía más amplia, las funciones integrables Lebesgue. Puesto que el desarrollo sigue exactamente las mismas líneas que el seguido en el caso unidimensional, omitiremos la mayoría de los detalles de las demostraciones.

Recordemos algunos de los conceptos introducidos en el capítulo 14. Si $I = I_1 \times \ldots \times I_n$ es un intervalo acotado de $\mathbf{R}^n$, la n-medida de I se define por

$$\mu(I) = \mu(I_1) \cdots \mu(I_n),$$

en donde $\mu(I_k)$ es la medida unidimensional, o longitud, de I_k.

Un subconjunto T de $\mathbf{R}^n$ tiene n-medida 0 si, para cada $\varepsilon > 0$, podemos recubrir T por una colección numerable de intervalos n-dimensionales, la suma de cuyas n-medidas sea $< \varepsilon$.

Una propiedad se verifica casi en todo un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ si se verifica en todo S excepto en un subconjunto de n-medida 0. Por ejemplo, si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones, se dice que $f_n \to f$ casi en todo S si $\lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ de S excepto para los $\mathbf{x}$ de un subconjunto de n-medida 0.

15.2 FUNCIONES ESCALONADAS Y SUS INTEGRALES

Sea I un intervalo compacto de $\mathbf{R}^n$, por ejemplo

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

en donde cada I_k es un subintervalo compacto de $\mathbf{R}^1$. Si P_k es una partición de I_k, el producto cartesiano $P = P_1 \times \ldots \times P_n$ se llama partición de I. Si P_k descompone I_k en m_k subintervalos unidimensionales, entonces P descompone I en $m = m_1, \ldots, m_k$ subintervalos n-dimensionales, por ejemplo $J_1, \ldots, J_m$.

Una función s definida en I se llama una *función escalonada* si existe una partición P de I tal que s es constante en el interior de cada subintervalo J_k, o sea

$$s(\mathbf{x}) = c_k \qquad \text{si } \mathbf{x} \in \operatorname{int} J_k.$$

La integral de s sobre I se define por medio de la ecuación

$$\int_I s = \sum_{k=1}^{m} c_k \mu(J_k). \tag{1}$$

Sea ahora G un intervalo general n-dimensional, esto es, un intervalo de $\mathbf{R}^n$ que no sea necesariamente compacto. Una función s es escalonada en G si existe un subintervalo n-dimensional compacto I de G tal que s es una función escalonada en I y $s(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \in G - I$. La integral de s sobre G se define por medio de la fórmula

$$\int_G s = \int_I s,$$

en donde la integral I viene dada por (1). Como en el caso unidimensional la integral no depende de la elección de I.

15.3 FUNCIONES SUPERIORES Y FUNCIONES INTEGRABLES LEBESGUE

Las funciones superiores y las funciones integrables Lebesgue se definen exactamente igual que en el caso unidimensional.

Una función real f definida en un intervalo I de $\mathbf{R}^n$ se llama función superior en I, y se escribe $f \in U(I)$, si existe una sucesión creciente de funciones escalonadas $\{s_n\}$ tal que:

a) $s_n \to f$ casi en todo I,

y

b) $\lim_{n\to\infty} \int_I s_n$ existe.

Se dice que la sucesión $\{s_n\}$ genera f. La integral de f sobre I se define por medio de la ecuación

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n. \tag{2}$$

Designamos por $L(I)$ el conjunto de todas las funciones f de la forma $f = u - v$, en donde $u \in U(I)$ y $v \in U(I)$. Cada función f de $L(I)$ es integrable Lebesgue en I, y su integral se define por medio de la ecuación

$$\int_I f = \int_I u - \int_I v.$$

Puesto que estas definiciones son totalmente análogas a las del caso unidimensional, no es sorprendente para quien estudia esta materia el saber que muchos de los teoremas derivados de estas definiciones son también válidos. En particular, los teoremas 10.5, 10.6, 10.7, 10.9, 10.10, 10.11, 10.13, 10.14, 10.16, 10.17(a) y (c), 10.18 y 10.19 son todos ellos válidos para integrables múltiples. El teorema 10.17 (b), que describe el comportamiento de una integral bajo las dilataciones o contracciones del intervalo de integración, debe ser modificado como sigue:

Si $f \in L(I)$ y si $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}/c)$, en donde $c > 0$, entonces $g \in L(cI)$ e

$$\int_{cI} g = c^n \int_I f.$$

En otras palabras, la dilatación de un intervalo por un factor positivo c tiene el efecto de multiplicar la integral por c^n, en donde n es la dimensión del espacio.

Los teoremas de convergencia de Levi (teoremas del 10.22 al 10.26) y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (teorema 10.27) y sus consecuencias (teoremas 10.28, 10.29 y 10.30) son también válidos para integrales múltiples.

NOTACIÓN. La integral $\int_I f$ se designa también por

$$\int_I f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \qquad \text{o} \qquad \int_I f(x_1, \ldots, x_n) d(x_1, \ldots, x_n).$$

También se utiliza la notación $\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$ Las integrales dobles se escriben a menudo con dos signos de integral, y las integrales triples con tres de estos signos, o sea:

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy, \qquad \iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

15.4 FUNCIONES MEDIBLES Y CONJUNTOS MEDIBLES DE $\mathbf{R}^n$

Una función real f definida en un intervalo I de $\mathbf{R}^n$ es *medible* en I, y se escribe $f \in M(I)$, si existe una sucesión de funciones escalonadas $\{s_n\}$ en I de modo que

$$\lim_{n\to\infty} s_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \qquad c.e.t. \quad I$$

También son válidas en esta situación más general las propiedades de las funciones medibles que fueron descritas en los teoremas 10.35, 10.36 y 10.37.

Un subconjunto S de $\mathbf{R}^n$ es medible si su función característica χ_S es medible. Si, además, χ_S es integrable Lebesgue en $\mathbf{R}^n$, entonces la n-medida $\mu(S)$ del conjunto S se define por medio de la ecuación

$$\mu(S) = \int_{\mathbf{R}^n} \chi_S.$$

Si χ_S es medible pero no pertenece a $L(\mathbf{R}^n)$, definimos $\mu(S) = +\infty$. La función μ así definida se llama medida n-dimensional de Lebesgue.

Las propiedades de la medida descritas desde el teorema 10.44 al teorema 10.47 son también válidas para medidas de Lebesgue n-dimensionales. Además, utilizando el método de la sección 10.19 es posible definir la integral de Lebesgue para subconjuntos arbitrarios S de $\mathbf{R}^n$.

Hacemos especial mención de la propiedad de la aditividad numerable de la medida de Lebesgue descrita en el teorema 10.47:

Si $\{A_1, A_2, \ldots\}$ es una colección disjunta numerable de conjuntos medibles de $\mathbf{R}^n$, entonces la unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es medible y

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

El teorema que se da a continuación demuestra que cada subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ es medible.

Teorema 15.1. *Cada conjunto abierto S de $\mathbf{R}^n$ se puede expresar como reunión de una colección disjunta numerable de cubos acotados cuyas adherencias están contenidas en S. Por consiguiente, S es medible. Por otra parte, si S está acotado, entonces $\mu(S)$ es finita.*

Demostración. Fijamos un entero $m \geq 1$ y consideramos todos los intervalos semiabiertos de $\mathbf{R}^1$ de la forma

$$\left(\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right] \qquad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Todso los intervalos tienen longitud 2^{-m}, y forman una colección disjunta numerable cuya unión es $\mathbf{R}^1$. El producto cartesiano de n de estos intervalos es un cubo n-dimensional de longitud lateral 2^{-m}. Sea F_m la colección de todos estos cubos. Entonces F_m es una colección disjunta numerable cuya unión es $\mathbf{R}^n$.

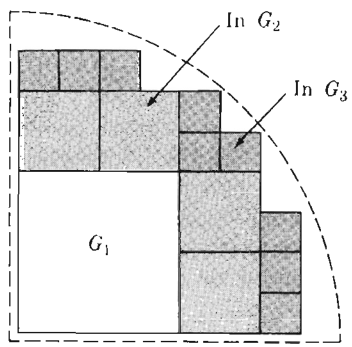


Figura 15.1

Obsérvese que los cubos de F_{m+1} se obtienen bisecando los lados de los de F_m. Por consiguiente, si Q_m es un cubo de F_m y si Q_{m+1} es un cubo de F_{m+1}, entonces o $Q_{m+1} \subseteq Q_m$, o Q_{m+1} y Q_m son disjuntos.

Ahora extraemos una subcolección G_m de F_m como sigue: Si $m = 1$, G_1 consta de todos los cubos de F_1 cuya adherencia pertenece a S. Si $m = 2$, G_2 consta de todos los cubos de F_2 cuya adherencia pertenece a S, pero a ninguno de los cubos de G_1. Si $m = 3$, G_3 consta de todos los cubos de F_3 cuya adherencia pertenece a S, pero a ninguno de los cubos de G_1 o G_2, y así sucesivamente. La construcción se halla ilustrada en la Fig. 15.1, en donde S es una cuarta parte de un disco abierto de $\mathbf{R}^2$. El cuadrado blanco está en G_1, los sombreados ligeramente pertenecen a G_2, y los oscuros pertenecen a G_3.

Sea ahora

$$T = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{Q \in G_m} Q.$$

Esto es, T es la unión de todos los cubos de $G_1, G_2, \ldots$ Probaremos que $S = T$ de lo que resultará la demostración del teorema, ya que T será una colección disjunta numerable de cubos cuya adherencia pertenece a S. Ahora bien, $T \subseteq S$, ya que cada Q de G_m es un subconjunto de S. Luego, sólo necesitamos demostrar que $S \subseteq T$.

Sea $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ un punto de S. Puesto que S es abierto, existe un cubo con centro en $\mathbf{p}$ y arista lateral $\delta > 0$, que pertenece a S. Elijamos m de modo que $2^{-m} < \delta/2$. Entonces, para cada i tenemos

$$p_i - \frac{\delta}{2} < p_i - \frac{1}{2^m} < p_i < p_i + \frac{1}{2^m} < p_i + \frac{\delta}{2}.$$

Ahora elegimos k_i, tal que

$$\frac{k_i}{2^m} < p_i \leq \frac{k_i + 1}{2^m},$$

y sea Q el producto cartesiano de los intervalos $(k_i 2^{-m}, (k_i + 1)2^{-m}]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $\mathbf{p} \in Q$ para algún cubo Q de F_m. Si m es el menor entero con esta propiedad, entonces $Q \in G_m$, luego $\mathbf{p} \in T$. Por tanto, $S \subseteq T$. Las proposiciones sobre la mesurabilidad de S se siguen inmediatamente de la propiedad de aditividad numerable de la medida de Lebesgue.

NOTA. Si S es medible, también lo es $\mathbf{R}^n - S$, puesto que $\chi_{\mathbf{R}^n - S} = 1 - \chi_S$. Por consiguiente, cada subconjunto cerrado de $\mathbf{R}^n$ es medible.

15.5 TEOREMA DE FUBINI PARA LA REDUCCIÓN DE LA INTEGRAL DOBLE DE UNA FUNCIÓN ESCALONADA

Excepto en este punto, la teoría de Lebesgue de $\mathbf{R}^n$ es completamente análoga a la del caso unidimensional. Se requieren ideas nuevas para tratar el teorema de Fubini que permite calcular una integral múltiple de $\mathbf{R}^n$ por medio de integrales reiteradas de dimensión inferior. Para conocer mejor lo necesario, consideramos primeramente el caso bidimensional.

Recordemos el resultado correspondiente para integrales múltiples de Riemann. Si $I = [a, b] \times [c, d]$ es un intervalo compacto de $\mathbf{R}^2$ y si f es integrable de Riemann en I, entonces tenemos la siguiente fórmula de reducción (de la parte (v) del teorema 14.6):

$$\int_I f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \left[\underline{\int_a^b} f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{3}$$

Existe una fórmula compañera de ésta que se obtiene reemplazando la integral inferior $\underline{\int_a^b}$ por la integral superior $\overline{\int_a^b}$, y existen dos fórmulas semejantes a éstas, pero con el orden de integración invertido. En estas fórmulas, las integrales superior e inferior son necesarias, puesto que la hipótesis de integrabilidad de Riemann en I no es lo suficientemente fuerte para asegurar la existencia de la integral de Riemann unidimensional $\int_a^b f(x, y)\, dx$. Esta dificultad no aparece en la teoría de Lebesgue. El teorema de Fubini para integrales de Lebesgue dobles nos da las fórmulas de reducción

$$\int_I f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx,$$

con la única hipótesis de que f sea integrable Lebesgue en I. Probaremos que las integrales interiores existen siempre como integrales de Lebesgue. Esto constituye otro de los ejemplos que ilustran cómo la teoría de Lebesgue supera dificultades inherentes a la teoría de Riemann.

En esta sección demostramos el teorema de Fubini para funciones escalonadas, y en una sección posterior lo extenderemos a funciones integrables Lebesgue arbitrarias.

Teorema 15.2 (Teorema de Fubini para funciones escalonadas). *Sea s una función escalonada en $\mathbf{R}^2$. Entonces para cada y fijo de $\mathbf{R}^1$ existe la inte-*

gral $\int_{\mathbf{R}^1} s(x, y)\,dx$ *y, como función de y, es integrable Lebesgue en* $\mathbf{R}^1$. *Además, tenemos*

$$\iint_{\mathbf{R}^2} s(x, y)\,d(x, y) = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} s(x, y)\,dx\right] dy. \tag{4}$$

Análogamente, para cada x fijo de $\mathbf{R}^1$ *existe la integral* $\int_{\mathbf{R}^1} s(x, y)\,dy$ *y, como función de x, es integrable Lebesgue en* $\mathbf{R}^1$. *Se tiene también*

$$\iint_{\mathbf{R}^2} s(x, y)\,d(x, y) = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} s(x, y)\,dy\right] dx. \tag{5}$$

Demostración. Este teorema se puede deducir de la fórmula de reducción (3) para integrales de Riemann, pero preferimos dar una demostración directa independiente de la teoría de Riemann.

Existe un intervalo compacto $I = [a, b] \times [c, d]$ tal que s es una función escalonada en I y $s(x, y) = 0$ si $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - I$. Existe una partición de I en mn subrectángulos $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ tales que s es constante en el interior de I_{ij}, esto es

$$s(x, y) = c_{ij} \qquad \text{si } (x, y) \in \operatorname{int} I_{ij}.$$

Entonces

$$\iint_{I_{ij}} s(x, y)\,d(x, y) = c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} s(x, y)\,dx\right] dy.$$

Sumando para i y para j obtenemos

$$\iint_I s(x, y)\,d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b s(x, y)\,dx\right] dy.$$

Dado que s se anula fuera de I, esto demuestra (4), y un argumento análogo prueba (5).

Para extender el teorema de Fubini a las funciones integrables de Lebesgue precisamos de algunos otros resultados concernientes a conjuntos de medida cero, que se desarrollan en la sección siguiente.

15.6 ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS DE MEDIDA CERO

Teorema 15.3. *Sea S un subconjunto de* $\mathbf{R}^n$. *Entonces S tiene n-medida 0 si, y sólo si, existe una colección numerable de intervalos n-dimensionales* $\{J_1, J_2, \ldots\}$, *tal que la suma de sus n-medidas sea finita, y tal que cada punto de S pertenezca a* J_k *para una infinidad de k.*

Demostración. Supongamos primeramente que S tiene n-medida 0. Entonces, para cada $m \geq 1$, se puede recubrir S por una colección numerable de intervalos n-dimensionales $\{I_{m,1}, I_{m,2}, \ldots\}$, la suma de cuyas n-medidas sea $< 2^{-m}$. El conjunto A que consta de todos los intervalos $I_{m,k}$ para $m = 1, 2, \ldots,$ y $k = 1, 2, \ldots,$ es una colección numerable que recubre a S, y tal que la suma de las n-medidas de todos sus intervalos es $< \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1$. Además, si $\mathbf{a} \in S$ entonces, para cada m, $\mathbf{a} \in I_{m,k}$ para un cierto k. Por consiguiente, si escribimos $A = \{J_1, J_2, \ldots\}$, vemos que $\mathbf{a}$ pertenece a J_k para una infinidad de k.

Recíprocamente, supongamos que existe una colección numerable de intervalos n-dimensionales $\{J_1, J_2, \ldots\}$ tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(J_k)$ sea convergente y tal que cada punto de S pertenezca a J_k para una infinidad de k. Dado $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$\sum_{k=N}^{\infty} \mu(J_k) < \varepsilon.$$

Cada uno de los puntos de S pertenece al conjunto $\bigcup_{k=N}^{\infty} J_k$, luego $S \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} J_k$. Entonces, S se ha recubierto por medio de una colección numerable de intervalos, la suma de cuyas n-medidas es $< \varepsilon$, luego S tiene n-medida 0.

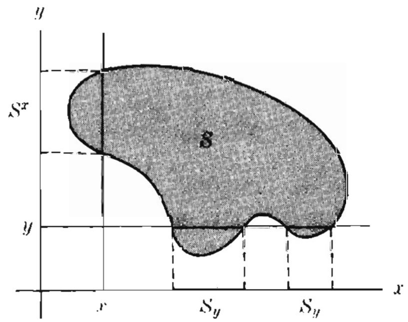


Figura 15.2

Definición 15.4. *Si S es un subconjunto arbitrario de $\mathbf{R}^2$, y si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, designamos por S_y y por S^x a los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^1$:*

$$S_y = \{x : x \in \mathbf{R}^1 \quad y \quad (x, y) \in S\},$$

$$S^x = \{y : y \in \mathbf{R}^1 \quad y \quad (x, y) \in S\}.$$

En la figura 15.2 se muestran algunos ejemplos. Geométricamente, S_y es la proyección sobre el eje x de una sección transversal horizontal de S; y S^x es la proyección sobre el eje y de una sección transversal vertical de S.

Teorema 15.5. *Si S es un subconjunto de $\mathbf{R}^2$ con 2-medida 0, entonces S_y tiene 1-medida 0 para casi todos los y de $\mathbf{R}^1$, y S^x tiene 1-medida 0 para casi todos los x de $\mathbf{R}^1$.*

Demostración. Probaremos que S_y tiene 1-medida 0 para casi todos los y de $\mathbf{R}^1$. La demostración utiliza el teorema 15.3.

Puesto que S tiene 2-medida 0, en virtud del teorema 15.3 existe una colección numerable de rectángulos $\{I_k\}$ tal que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) \qquad \text{converge,} \tag{6}$$

y tal que cada punto (x, y) de S pertenece a I_k para una infinidad de k. Ahora hacemos $I_k = X_k \times Y_k$, en donde X_k e Y_k son subintervalos de $\mathbf{R}^1$. Entonces

$$\mu(I_k) = \mu(X_k)\mu(Y_k) = \mu(X_k) \int_{\mathbf{R}^1} \chi_{Y_k} = \int_{\mathbf{R}^1} \mu(X_k)\, \chi_{Y_k},$$

en donde χ_{Y_k} es la función característica del intervalo Y_k. Sea $g_k = \mu(X_k)\chi_{Y_k}$. Entonces (6) implica la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^1} g_k$$

Ahora $\{g_k\}$ es una sucesión de funciones no negativas de $L(\mathbf{R}^1)$ tal que converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^1} g_k$. Por consiguiente, en virtud del teorema de Levi (teorema 10.25), la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge casi en todo $\mathbf{R}^1$. En otras palabras, existe un subconjunto T de $\mathbf{R}^1$ de medida unidimensional 0 tal que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k)\chi_{Y_k}(y) \qquad \text{converge para todo } y \text{ de } \mathbf{R}^1 - T. \tag{7}$$

Tomemos un punto y de $\mathbf{R}^1 - T$, fijémoslo y consideremos el conjunto S_y. Probaremos que S_y tiene medida unidimensional 0.

Podemos suponer que S_y es no vacío; en otro caso es trivial. Sea

$$A(y) = \{X_k : y \in Y_k, \quad k = 1, 2, \dots\}.$$

Entonces $A(y)$ constituye una colección numerable de intervalos unidimensionales que representaremos por $\{J_1, J_2, \dots\}$. La suma de las longitudes de todos los intervalos J_k converge en virtud de (7). Si $x \in S_y$, entonces $(x, y) \in S$, luego $(x, y) \in I_k = X_k \times Y_k$ para una infinidad de k, y por lo tanto $x \in J_k$ para una infinidad de k. Aplicando la versión unidimensional del teorema 15.3 vemos que S_y tiene medida unidimensional 0. Esto demuestra que S_y tiene medida unidimensional cero casi en todo y de $\mathbf{R}^1$, y un argumento análogo demuestra que S^x tiene medida unidimensional cero casi en todo x de $\mathbf{R}^1$.

15.7 TEOREMA DE FUBINI PARA LA REDUCCIÓN DE INTEGRALES DOBLES

Teorema 15.6. *Supongamos que f es integrable Lebesgue en $\mathbf{R}^2$. Entonces tenemos:*

a) *Existe un conjunto T de medida unidimensional 0 tal que la integral de Lebesgue $\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dx$ existe para todo y de $\mathbf{R}^1 - T$.*
b) *La función G definida en $\mathbf{R}^1$ por medio de la ecuación*

$$G(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dx & \text{si } y \in \mathbf{R}^1 - T, \\ 0 & \text{si } y \in T, \end{cases}$$

es integrable Lebesgue en $\mathbf{R}^1$.

c) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} f = \int_{\mathbf{R}^1} G(y)\, dy.$ *Esto es,*

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, d(x, y) = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

NOTA. Existe un resultado análogo que afirma

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, d(x, y) = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Demostración. Hemos demostrado ya este mismo teorema para funciones escalonadas. A continuación se demuestra este teorema para funciones superiores. Si $f \in U(\mathbf{R}^2)$ existe una sucesión creciente de funciones escalonadas $\{s_n\}$ tal que $s_n(x, y) \to f(x, y)$ para todo (x, y) de $\mathbf{R}^2 - S$, en donde S es un conjunto de medida bidimensional 0; luego

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbf{R}^2} s_n(x, y)\, d(x, y) = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, d(x, y).$$

Ahora bien, $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - S$ si, y sólo si, $x \in \mathbf{R}^1 - S_y$. Por lo tanto,

$$s_n(x, y) \to f(x, y) \qquad \text{si } x \in \mathbf{R}^1 - S_y. \tag{8}$$

Sea $t_n(y) = \int_{\mathbf{R}^1} s_n(x, y)\, dx$. Esta integral existe para cada número real y y es una función de y integrable. Además, en virtud del teorema 15.2 tenemos

$$\int_{\mathbf{R}^1} t_n(y)\, dy = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} s_n(x, y)\, dx \right] dy = \iint_{\mathbf{R}^2} s_n(x, y)\, d(x, y) \le \iint_{\mathbf{R}^2} f.$$

Puesto que la sucesión $\{t_n\}$ es creciente, esta última desigualdad prueba que existe $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} t_n(y)\, dy$. Por lo tanto, aplicando el teorema de Levi (teorema 10.24) existe una función t de $L(\mathbf{R}^1)$ tal que $t_n \to t$ casi por todo en $\mathbf{R}^1$. En otras palabras, existe un conjunto T_1 de medida unidimensional 0 tal que $t_n(y) \to t(y)$ si $y \in \mathbf{R}^1 - T_1$. Además,

$$\int_{\mathbf{R}^1} t(y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} t_n(y)\, dy.$$

Puesto que $\{t_n\}$ es creciente, tenemos de nuevo

$$t_n(y) = \int_{\mathbf{R}^1} s_n(x, y)\, dx \le t(y) \qquad \text{si } y \in \mathbf{R}^1 - T_1.$$

Aplicando el teorema de Levi a $\{s_n\}$ vemos que si $y \in \mathbf{R}^1 - T_1$ existe una función g de $L(\mathbf{R}^1)$ tal que $s_n(x, y) \to g(x, y)$ para x de $\mathbf{R}^1 - A$, en donde A es un conjunto de medida unidimensional 0. (El conjunto A depende sólo de y.) Comparando este resultado con (8) vemos que si $y \in \mathbf{R}^1 - T_1$ entonces

$$g(x, y) = f(x, y) \qquad \text{si } x \in \mathbf{R}^1 - (A \cup S_y). \tag{9}$$

Pero A tiene medida unidimensional 0 y S_y tiene medida unidimensional 0 casi para todo y, esto es para todo y de $\mathbf{R}^1 - T_2$, en donde T_2 tiene medida unidimensional 0. Sea $T = T_1 \cup T_2$. Entonces T tiene medida unidimensional 0. Si $y \in \mathbf{R}^1 - T$, el conjunto $A \cup S_y$ tiene medida unidimensional 0 y (9) se verifica. Dado que existe la integral $\int_{\mathbf{R}^1} g(x, y)\, dx$ si $y \in \mathbf{R}^1 - T$, tenemos que, si $y \in \mathbf{R}^1 - T$, existe también la integral $\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dx$. Esto demuestra (a). Además, si $y \in \mathbf{R}^1 - T$, tenemos

$$\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dx = \int_{\mathbf{R}^1} g(x, y)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} s_n(x, y)\, dx = t(y). \tag{10}$$

Puesto que $t \in L(\mathbf{R}^1)$, (b) está demostrado. Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^1} t(y)\, dy &= \int_{\mathbf{R}^1} \lim_{n\to\infty} t_n(y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} t_n(y)\, dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} s_n(x, y)\, dx \right] dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbf{R}^2} s_n(x, y)\, d(x, y) \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, d(x, y). \end{aligned}$$

Comparando este resultado con (10) obtenemos (c). Esto demuestra el teorema de Fubini para funciones superiores.

Para demostrarlo para funciones integrables de Lebesgue escribimos $f = u - v$, en donde $u \in L(\mathbf{R}^2)$ y $v \in L(\mathbf{R}^2)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} f &= \iint_{\mathbf{R}^2} u - \iint_{\mathbf{R}^2} v = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} u(x, y)\, dx \right] dy - \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} v(x, y)\, dx \right] dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} \{u(x, y) - v(x, y)\}\, dx \right] dy = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dx \right] dy. \end{aligned}$$

Como corolario inmediato del teorema 15.6 y del teorema bidimensional análogo al teorema 10.11 obtenemos:

Teorema 15.7. *Supongamos que f está definida y acotada en un rectángulo compacto $I = [a, b] \times [c, d]$, y que f es continua casi todo en I. Entonces $f \in L(I)$ y se verifica*

$$\iint_I f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx.$$

NOTA. La integral unidimensional $\int_a^b f(x, y)\, dx$ existe casi para todo y de $[c, d]$ como integral de Lebesgue. No es preciso que exista como integral de Riemann. Una observación análoga se aplica a la integral $\int_c^d f(x, y)\, dy$. En la teoría de Riemann, las integrales interiores de la fórmula de reducción deben ser reemplazadas por integrales superiores o inferiores. (Ver teorema 14.6, parte (v).)

Existe, además, una extensión del teorema de Fubini a integrales de orden superior. Si f es integrable Lebesgue en $\mathbf{R}^{m+k}$ el teorema análogo al teorema 15.6 concluye que

$$\int_{\mathbf{R}^{m+k}} f = \int_{\mathbf{R}^k} \left[\int_{\mathbf{R}^m} f(\mathbf{x}; \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\right] d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{R}^m} \left[\int_{\mathbf{R}^k} f(\mathbf{x}; \mathbf{y})\, d\mathbf{y}\right] d\mathbf{x}.$$

En esta fórmula hemos escrito $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ para designar un punto de $\mathbf{R}^{m+k}$, en el que $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ e $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$. Se puede probar esto, por medio de una extensión del método utilizado para demostrar el caso bidimensional, pero omitiremos los detalles.

15.8 CRITERIO DE TONELLI-HOBSON DE INTEGRABILIDAD

¿Qué funciones son integrables de Lebesgue en $\mathbf{R}^2$? El teorema que sigue proporciona una condición suficiente de integrabilidad muy útil. Su demostración hace uso del teorema de Fubini.

Teorema 15.8. *Supongamos que f es medible en $\mathbf{R}^2$ y que existe una por lo menos de las dos integrales reiteradas*

$$\int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} |f(x, y)|\, dx\right] dy$$

o

$$\int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} |f(x, y)|\, dy\right] dx,$$

Entonces tenemos:

a) $f \in L(\mathbf{R}^2)$.

b) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} f = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dx\right] dy = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dy\right] dx.$

Demostración. La parte (b) se sigue de la parte (a) en virtud del teorema de Fubini. Utilizaremos también el teorema de Fubini para demostrar la parte (a). Supongamos que existe la integral reiterada $\int_{\mathbf{R}^1} [\int_{\mathbf{R}^1} |f(x, y)|\, dx]\, dy$. Designamos por $\{s_n\}$ la sucesión creciente de funciones escalonadas no negativas definidas por medio de:

$$s_n(x, y) = \begin{cases} n & \text{si } |x| \le n \text{ e } |y| \le n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $f_n(x, y) = \min\{s_n(x, y), |f(x, y)|\}$. Tanto s_n como $|f|$ son medibles, luego f_n es medible. Además, tenemos $0 \le f_n(x, y) \le s_n(x, y)$, luego f_n está dominada por una función integrable Lebesgue. Por consiguiente, $f_n \in L(\mathbf{R}^2)$. Entonces podemos aplicar el teorema de Fubini a f_n junto con la desigualdad $0 \le f_n(x, y) \le |f(x, y)|$ a fin de obtener

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f_n = \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} f_n(x, y)\, dx\right] dy \le \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} |f(x, y)|\, dx\right] dy.$$

Puesto que $\{f_n\}$ es creciente, esto demuestra la existencia del límite $\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbf{R}^2} f_n$. Por el teorema de Levi (el teorema bidimensional análogo al teorema 10.24), $\{f_n\}$ converge casi en todo $\mathbf{R}^2$ hacia una función límite de $L(\mathbf{R}^2)$. Pero $f_n(x, y) \to |f(x, y)|$ cuando $n \to \infty$, luego $|f| \in L(\mathbf{R}^2)$. Puesto que f es medible, tenemos que $f \in L(\mathbf{R}^2)$. Ello demuestra (a). La demostración es análoga si existe la otra integral reiterada.

15.9 CAMBIOS DE COORDENADAS

Uno de los resultados más importantes en la teoría de la integración múltiple lo constituye la fórmula que da el cambio de variables. Constituye una extensión de la fórmula

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\, dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)\, dt,$$

que fue demostrada en el teorema 7.36 para integrales de Riemann en el supuesto de que g posea derivada continua g' en un intervalo $T = [c, d]$ y que f sea continua en la imagen $g(T)$.

Consideremos el caso especial en que g' no se anule (esto es de signo constante) en T. Si g' es positiva en T, entonces g es creciente, luego $g(c) < g(d)$, $g(T) = [g(c), g(d)]$, y la fórmula anterior se puede escribir como sigue:

$$\int_{g(T)} f(x)\,dx = \int_T f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

Por otro lado, si g' es negativa en T, entonces $g(T) = [g(d), g(c)]$ y la fórmula anterior se convierte en

$$\int_{g(T)} f(x)\,dx = -\int_T f[g(t)]g'(t)\,dt.$$

Ambos casos se hallan, por lo tanto, incluidos en la *única* fórmula

$$\int_{g(T)} f(x)\,dx = \int_T f[g(t)]\,|g'(t)|\,dt. \tag{11}$$

La ecuación (11) es también válida cuando $c > d$, y es en esta forma que el resultado puede generalizarse a integrales múltiples. La función g que transforma las variables debe substituirse por una función vectorial llamada *cambio de coordenadas* * que se define como sigue:

Definición 15.9. *Sea T un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$. Una función vectorial $\mathbf{g}: T \to \mathbf{R}^n$ se llama cambio (o transformación) de coordenadas en T si verifica las tres propiedades siguientes:*

a) $\mathbf{g} \in C'$ *en* T.
b) $\mathbf{g}$ *es uno a uno en* T.
c) *El determinante jacobiano* $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) = \det \mathbf{Dg}(\mathbf{t}) \neq 0$ *para todo* $\mathbf{t}$ *de* T.

NOTA. Un cambio de coordenadas se llama a veces un *diffeomorfismo*.

La propiedad (a) establece que $\mathbf{g}$ es diferenciable con continuidad en T. En virtud del teorema 13.4 sabemos que una función diferenciable con continuidad es localmente uno a uno en las proximidades de los puntos en los que no se anula el determinante jacobiano. La propiedad (b) afirma que g es *globalmente* uno a uno en T. Ello garantiza la existencia de una inversa global $\mathbf{g}^{-1}$ que está definida y es uno a uno en la imagen $\mathbf{g}(T)$. Las propiedades (a) y (c) conjuntamente implican que $\mathbf{g}$ es una aplicación abierta (en virtud del teorema 13.5). Además, $\mathbf{g}^{-1}$ es diferenciable con continuidad en $\mathbf{g}(T)$ (en virtud del teorema 13.6).

* Se llama también una *transformación de coordenadas.*

Propiedades ulteriores de los cambios de coordenadas se deducirán a partir de la siguiente propiedad multiplicativa de los determinantes jacobianos.

Teorema 15.10 (teorema de multiplicación para determinantes jacobianos). *Supongamos que $\mathbf{g}$ es diferenciable en un conjunto abierto T de $\mathbf{R}^n$ y que $\mathbf{h}$ es diferenciable en la imagen $\mathbf{g}(T)$. Entonces la función compuesta $\mathbf{k} = \mathbf{h} \circ \mathbf{g}$ es diferenciable en T, y para cada $\mathbf{t}$ de T se tiene*

$$J_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = J_{\mathbf{h}}[\mathbf{g}(\mathbf{t})]J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}). \tag{12}$$

Demostración. La regla de la cadena (teorema 12.7) nos dice que la función compuesta $\mathbf{k}$ es diferenciable en T, y la forma matricial de la regla de la cadena nos dice que las correspondientes matrices jacobianas se hallan relacionadas como sigue:

$$\mathbf{Dk}(\mathbf{t}) = \mathbf{Dh}[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\mathbf{Dg}(\mathbf{t}). \tag{13}$$

Por la teoría de los determinantes sabemos que $\det(AB) = \det A \det B$, luego (13) implica (12).

Este teorema demuestra que si $\mathbf{g}$ es un cambio de coordenadas en T y si $\mathbf{h}$ es un cambio de cordenadas en $\mathbf{g}(T)$, entonces la compuesta $\mathbf{k}$ es un cambio de coordenadas en T. En consecuencia, si $\mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1}$, entonces

$$\mathbf{k}(\mathbf{t}) = \mathbf{t} \quad \text{para todo } \mathbf{t} \text{ de } T \quad \text{y} \quad J_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = 1,$$

luego $J_{\mathbf{h}}[\mathbf{g}(\mathbf{t})]J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) = 1$ y $\mathbf{g}^{-1}$ es una transformación de coordenadas en $\mathbf{g}(T)$.

Un cambio de coordenadas $\mathbf{g}$ y su inverso $\mathbf{g}^{-1}$ proporcionan una correspondencia uno a uno entre los subconjuntos abiertos de T y los subconjuntos abiertos de $\mathbf{g}(T)$, y también entre los subconjuntos compactos de T y los subconjuntos compactos de $\mathbf{g}(T)$. Los ejemplos que siguen constituyen cambios de coordenadas utilizados frecuentemente.

Ejemplo 1. *Coordenadas polares de* $\mathbf{R}^2$. En este caso tomamos

$$T = \{(t_1, t_2) : t_1 > 0, 0 < t_2 < 2\pi\},$$

y consideramos una función $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ definida en T como sigue:

$$g_1(\mathbf{t}) = t_1 \cos t_2, \qquad g_2(\mathbf{t}) = t_1 \operatorname{sen} t_2.$$

Es usual designar por (r, θ) las componentes de $\mathbf{t}$ en vez de designarlas (t_1, t_2). El cambio de coordenadas $\mathbf{g}$ aplica cada punto (r, θ) de T en el punto (x, y) de $\mathbf{g}(T)$ dado por las fórmulas familiares

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta.$$

La imagen $\mathbf{g}(T)$ es el conjunto $\mathbf{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$, y el determinante jacobiano es

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Ejemplo 2. *Coordenadas cilíndricas de* $\mathbf{R}^3$. Aquí escribimos $\mathbf{t} = (r, \theta, z)$ y tomamos

$$T = \{(r, \theta, z) : r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty\}.$$

El cambio de coordenadas $\mathbf{g}$ aplica cada punto (r, θ, z) de T en el punto (x, y, z) de $\mathbf{g}(T)$ dado por las ecuaciones

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta, \qquad z = z.$$

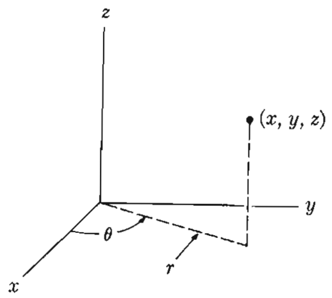


Figura 15.3

La imagen $\mathbf{g}(T)$ es el conjunto $\mathbf{R}^3 - \{(x, 0, 0) : x \geq 0\}$, y el determinante jacobiano está dado por

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

El significado geométrico de r, θ y z se halla representado en la figura 15.3.

Ejemplo 3. *Coordenadas esféricas de* $\mathbf{R}^3$. En este caso escribimos $\mathbf{t} = (\rho, \theta, \varphi)$ y tomamos

$$T = \{(\rho, \theta, \varphi) : \rho > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi\}.$$

El cambio de coordenadas $\mathbf{g}$ aplica cada punto (ρ, θ, φ) de T en el punto (x, y, z) de $\mathbf{g}(T)$ dado por las ecuaciones

$$x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi.$$

La imagen $\mathbf{g}(T)$ es el conjunto $\mathbf{R}^3 - [\{(x, 0, 0) : x \geq 0\} \cup \{(0, 0, z) : z \in \mathbf{R}\}]$, y el determinante jacobiano es

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \\ -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} = -\rho^2\operatorname{sen}\varphi.$$

El significado geométrico de ρ, θ y φ puede verse en la figura 15.4.

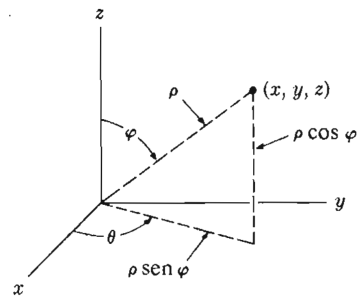


Figura 15.4

Ejempo 4. *Transformaciones lineales de* $\mathbf{R}^n$. Sea $\mathbf{g} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una transformación lineal representada por una matriz $(a_{ij}) = m(\mathbf{g})$, esto es

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}t_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}t_j\right).$$

Entonces $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ en donde $g_i(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j$, y la matriz jacobiana es

$$\mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{t}) = (D_j g_i(\mathbf{t})) = (a_{ij}).$$

Así el determinante jacobiano $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})$ es constante, e igual a $\det(a_{ij})$, determinante de la matriz (a_{ij}). Se llama también el determinante de $\mathbf{g}$ y se escribe

$$\det \mathbf{g} = \det(a_{ij}).$$

Una transformación lineal $\mathbf{g}$, uno a uno en $\mathbf{R}^n$, se llama *no-singular*. Utilizaremos los siguientes resultados elementales concernientes a transformaciones no singulares de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$. (Las demostraciones pueden hallarse en cualquier texto de Álgebra lineal: ver también la referencia 14.1.)

Una transformación lineal $\mathbf{g}$ es no singular si, y sólo si, su matriz $A = m(\mathbf{g})$ tiene una inversa A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$, en donde I es la matriz identidad (la matriz correspondiente a la transformación identidad), en cuyo caso A se llama también no singular. Una matriz A $n \times n$ es no singular si, y sólo si, det $A \neq 0$. Luego, una función lineal $\mathbf{g}$ es un cambio de coordenadas si, y sólo si, det $\mathbf{g} \neq 0$.

Toda $\mathbf{g}$ no singular se puede expresar como composición de tres tipos especiales de transformaciones no singulares llamadas *transformaciones elementales*, a las que nos referiremos como *de tipo a, b* y *c*. Se definen como sigue:

Tipo a: $\mathbf{g}_a(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, \lambda t_k, \ldots, t_n)$, en donde $\lambda \neq 0$. En otras palabras, $\mathbf{g}_a$ multiplica una componente de $\mathbf{t}$ por un escalar no nulo λ. En particular, $\mathbf{g}_a$ transforma los vectores coordenados unitarios como sigue:

$$\mathbf{g}_a(\mathbf{u}_k) = \lambda \mathbf{u}_k \quad \text{para un } k, \quad \mathbf{g}_a(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i \quad \text{para todo } i \neq k.$$

La matriz de $\mathbf{g}_a$ se obtiene multiplicando los elementos de la k-ésima fila de la matriz identidad por λ. Además, det $\mathbf{g}_a = \lambda$.

Tipo b: $\mathbf{g}_b(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_k + t_j, \ldots, t_n)$, en donde $j \neq k$. Entonces, $\mathbf{g}_b$ remplaza una componente de $\mathbf{t}$ por ella misma más otra. En particular, $\mathbf{g}_b$ transforma los vectores coordenados como sigue:

$$\mathbf{g}_b(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_j \quad \text{para ciertos } k \text{ y } j \text{ fijos}, \quad k \neq j,$$

$$\mathbf{g}_b(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i \quad \text{para todo } i \neq k.$$

La matriz $\mathbf{g}_b$ puede obtenerse a partir de la matriz identidad reemplazando la k-ésima fila de I por la k-ésima fila de I más la j-ésima fila de I. Además, det $\mathbf{g}_b = 1$.

Tipo c: $\mathbf{g}_c(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_j, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_i, \ldots, t_n)$, en donde $i \neq j$. Esto es, $\mathbf{g}_c$ intercambia las componentes i-ésima y j-ésima de $\mathbf{t}$ para ciertos i y j con $i \neq j$. En particular, $\mathbf{g}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_j$, $\mathbf{g}(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i$, y $\mathbf{g}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_k$ para todo $k \neq i$, $k \neq j$. La matriz de $\mathbf{g}_c$ es la matriz identidad con las filas i y j intercambiadas. En este caso det $\mathbf{g}_c = -1$.

La inversa de una transformación elemental es otra transformación elemental del mismo tipo. La matriz de una transformación elemental se llama una *matriz elemental*. Cada matriz no singular A se puede transformar en la matriz identidad I multiplicando la matriz A de la izquierda por una sucesión de matrices elementales. (Esto constituye el familiar procedimiento de Gauss-Jordan del Álgebra lineal.) Así pues,

$$I = T_1 T_2 \cdots T_r A,$$

en donde cada T_k es una matriz elemental. Luego,

$$A = T_r^{-1} \cdots T_2^{-1} T_1^{-1}.$$

Si $A = m(\mathbf{g})$, esto da una descomposición de $\mathbf{g}$ en producto de transformaciones elementales.

15.10 FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES MÚLTIPLES

El resto de este capítulo está dedicado a dar una demostración de la fórmula del cambio de variables para integrales múltiples.

Teorema 15.11. *Sea T un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ y sea $\mathbf{g}$ un cambio de coordenadas en T. Sea f una función real definida en la imagen $\mathbf{g}(T)$ y supongamos que existe la integral de Lebesgue $\int_{\mathbf{g}(T)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ Entonces existe también la integral de Lebesgue $\int_T f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, dt$ y se tiene*

$$\int_{\mathbf{g}(T)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_T f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, dt. \tag{14}$$

NOTA. La ecuación (14) es válida asimismo si el determinante jacobiano $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})$ se anula en un subconjunto de T de medida 0, puesto que ello no afecta ni a la existencia ni al valor de la integral de la derecha.

La demostración del teorema 15.11 se divide en tres partes. La parte 1 prueba que la fórmula es válida para cada transformación lineal de coordenadas $\mathbf{x}$. Como corolario obtenemos la relación

$$\mu[\boldsymbol{\alpha}(A)] = |\det \boldsymbol{\alpha}|\, \mu(A),$$

para cada subconjunto A de $\mathbf{R}^n$ con medida de Lebesgue finita. En la parte 2 consideramos un cambio de coordenadas general $\mathbf{g}$ y probamos que (14) se verifica cuando f es la función característica de un cubo compacto. Esto nos da

$$\mu(K) = \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}, \tag{15}$$

para cada cubo compacto K de $\mathbf{g}(T)$. Ésta es la parte más larga de la demostración. En la parte 3 se utiliza (15) para deducir (14) en su forma general.

15.11 DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLES PARA TRANSFORMACIONES LINEALES DE COORDENADAS

Teorema 15.12. *Sea $\boldsymbol{\alpha}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una transformación lineal de coordenadas. Si existe la integral de Lebesgue $\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, entonces también existe la integral de Lebesgue $\int_{\mathbf{R}^n} f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\, |J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})|\, dt$ y ambas integrales son iguales.*

Demostración. Ante todo obsérvese que si el teorema es cierto para $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$, entonces es cierto también para la función compuesta $\gamma = \boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\beta}$ puesto que

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^n} f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\, |J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} = \int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{\beta}(\mathbf{t})])\, |J_{\boldsymbol{\alpha}}[\boldsymbol{\beta}(\mathbf{t})]|\, |J_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} f[\gamma(\mathbf{t})]\, |J_{\gamma}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t},$$

ya que $J_{\gamma}(\mathbf{t}) = J_{\boldsymbol{\alpha}}[\boldsymbol{\beta}(\mathbf{t})]\, J_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{t})$.

Por consiguiente, puesto que toda transformación lineal no singular $\boldsymbol{\alpha}$ es una composición de transformaciones elementales, es suficiente probar el teorema para cada transformación elemental. Es suficiente también suponer que $f \geq 0$.

Supongamos que $\boldsymbol{\alpha}$ es de *tipo a*. A fin de simplificar, suponemos que $\boldsymbol{\alpha}$ multiplica la última componente de $\mathbf{t}$ por un escalar no nulo λ, esto es

$$\boldsymbol{\alpha}(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{n-1}, \lambda t_n).$$

Entonces $|J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})| = |\det \boldsymbol{\alpha}| = |\lambda|$. Aplicamos el teorema de Fubini a fin de escribir la integral de f sobre $\mathbf{R}^n$ como la reiteración de una integral $(n-1)$-dimensional sobre $\mathbf{R}^{n-1}$ y una integral unidimensional sobre $\mathbf{R}^1$. Para la integral sobre $\mathbf{R}^1$ utilizamos el teorema 10.17(b) y (c), y obtenemos

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n\right] dx_1 \cdots dx_{n-1}$$
$$= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left[|\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \lambda t_n)\, dt_n\right] dx_1 \cdots dx_{n-1}$$
$$= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\, |J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})|\, dt_n\right] dt_1 \cdots dt_{n-1}$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\, |J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t},$$

en donde en el último paso hemos utilizado el teorema de Tonelli-Hobson. Esto prueba el teorema si $\boldsymbol{\alpha}$ es del *tipo a*. Si $\boldsymbol{\alpha}$ es del *tipo b* la demostración es análoga salvo que se utiliza el teorema 10.17(a) en el caso unidimensional. En este caso $|J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})| = 1$. Finalmente, si $\boldsymbol{\alpha}$ es del *tipo c* se utiliza sólo el teorema de

Fubini para intercambiar el orden de integración sobre las coordenadas i-ésima y j-ésima. De nuevo, en este caso, $|J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})| = 1$.

Como corolario inmediato tenemos:

Teorema 15.13. *Si $\boldsymbol{\alpha}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es una transformación lineal de coordenadas y si A es un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ tal que existe la integral de Lebesgue $\int_{\boldsymbol{\alpha}(A)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, entonces la integral de Lebesgue $\int_A f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\, |J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}$ también existe, y ambas son iguales.*

Demostración. Sea $\bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ si $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\alpha}(A)$, y sea $\bar{f}(\mathbf{x}) = 0$ en cualquier otro caso. Entonces

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}(A)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^n} \bar{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^n} \bar{f}[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\, |J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} = \int_A f[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})]\, |J_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}.$$

Como corolario del teorema 15.13 tenemos la siguiente relación entre la medida de A y la medida de $\boldsymbol{\alpha}(A)$.

Teorema 15.14. *Sea $\boldsymbol{\alpha}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una transformación lineal de coordenadas. Si A es un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ con medida de Lebesgue $\mu(A)$ finita, entonces $\boldsymbol{\alpha}(A)$ tiene también medida de Lebesgue finita y*

$$\mu[\boldsymbol{\alpha}(A)] = |\det \boldsymbol{\alpha}|\, \mu(A). \tag{16}$$

Demostración. Escribimos $A = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(B)$, en donde $B = \boldsymbol{\alpha}(A)$. Puesto que $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ es también una transformación lineal de coordenadas, obtenemos

$$\mu(A) = \int_A d\mathbf{x} = \int_{\boldsymbol{\alpha}^{-1}(B)} d\mathbf{x} = \int_B |\det \boldsymbol{\alpha}^{-1}|\, d\mathbf{t} = |\det \boldsymbol{\alpha}^{-1}|\, \mu(B).$$

Ello prueba (16) ya que $B = \boldsymbol{\alpha}(A)$ y $\det(\boldsymbol{\alpha}^{-1}) = (\det \boldsymbol{\alpha})^{-1}$.

Teorema 15.15. *Si A es un subconjunto compacto de $\mathbf{R}^n$ medible de Jordan, entonces para cada transformación lineal de corodenadas $\boldsymbol{\alpha}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ la imagen $\boldsymbol{\alpha}(A)$ es un conjunto compacto medible de Jordan y su contenido viene dado por*

$$c[\boldsymbol{\alpha}(A)] = |\det \boldsymbol{\alpha}|\, c(A).$$

Demostración. El conjunto $\boldsymbol{\alpha}(A)$ es compacto puesto que $\boldsymbol{\alpha}$ es continua en A. Para probar el teorema se arguye como en la demostración del teorema 15.14. En este caso, sin embargo, todas las integrales existen como integrales de Lebesgue y como integrales de Riemann.

15.12 DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLES PARA LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE UN CUBO COMPACTO

Esta sección contiene la parte 2 de la demostración del teorema 15.11. A lo largo de ella suponemos que $\mathbf{g}$ es un cambio de coordenadas en un conjunto abierto T de $\mathbf{R}^n$. Nuestro propósito consiste en demostrar que

$$\mu(K) = \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} |J_{\mathbf{g}}(T)|\, d\mathbf{t},$$

para cada cubo compacto K de T. Los resultados auxiliares precisos para probar esta fórmula se dan por medio de lemas.

A fin de simplificar los detalles, introducimos ciertas notaciones convenientes. En vez de utilizar la métrica euclídea usual de $\mathbf{R}^n$ utilizaremos la métrica d dada por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|.$$

Esta métrica fue introducida en el ejemplo 9, sección 3.13. En esta sección, sólo escribiremos $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ para designar $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Con esta métrica, una bola $B(\mathbf{a}; r)$ con centro en $\mathbf{a}$ y radio r es un cubo n-dimensional con centro $\mathbf{a}$ y longitud lateral $2r$; esto es, $B(\mathbf{a}; r)$ es el producto cartesiano de n intervalos unidimensionales, cada uno de ellos de longitud $2r$. La medida de uno de tales cubos es $(2r)^n$, producto de las longitudes de sus lados.

Si $\boldsymbol{\alpha}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es una transformación lineal representada por una matriz (a_{ij}), o sea

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\right),$$

entonces

$$\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})\| = \max_{1 \le i \le n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \|\mathbf{x}\| \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{17}$$

Definimos también

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{18}$$

Esto define una métrica $\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|$ en el espacio de todas las transformaciones lineales de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$. El primer lema da ciertas propiedades de esta métrica.

Lema 1. *Supongamos que $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ designan transformaciones lineales de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$. Entonces tenemos:*

a) $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})\|$ *para ciertos* $\mathbf{x}$ *tales que* $\|\mathbf{x}\| = 1$.
b) $\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})\| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\, \|\mathbf{x}\|$ *para todo* $\mathbf{x}$ *de* $\mathbf{R}^n$.
c) $\|\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\beta}\| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\, \|\boldsymbol{\beta}\|$.
d) $\|\mathbf{I}\| = 1$, *en donde* $\mathbf{I}$ *designa la transformación identidad.*

Demostración. Supongamos que $\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ es alcanzado para $i = p$. Tomemos $x_p = 1$ si $a_{pj} \ge 0$, $x_p = -1$ si $a_{pj} < 0$, y $x_j = 0$ si $j \ne p$. Entonces $\|\mathbf{x}\| = 1$ y $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})\|$, lo cual prueba (a).

La parte (b) se sigue inmediatamente de (17) y (18). Para probar (c) utilizamos (b) para escribir

$$\|(\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\beta})(\mathbf{x})\| = \|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}))\| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\, \|\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\, \|\boldsymbol{\beta}\|\, \|\mathbf{x}\|.$$

Eligiendo $\mathbf{x}$ tal que $\|\mathbf{x}\| = 1$ se tiene $\|(\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\beta})(\mathbf{x})\| = \|\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\beta}\|$, con lo cual se obtiene (c).

Finalmente, si $\mathbf{I}$ es la transformación identidad, entonces en (18) cada suma $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 1$,con lo cual $\|\mathbf{I}\| = 1$.

La transformación de coordenadas $\mathbf{g}$ es diferenciable en T, luego para cada $\mathbf{t}$ de T la derivada total $\mathbf{g}'(\mathbf{t})$ es una transformación lineal de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$ representada por la matriz jacobiana $\mathbf{Dg}(\mathbf{t}) = (D_j g_i(\mathbf{t}))$. Por consiguiente, haciendo $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{g}'(\mathbf{t})$ en (18) se obtiene

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |D_j g_i(\mathbf{t})|.$$

Observemos que $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\|$ es una función continua de $\mathbf{t}$ ya que todas las derivadas parciales $D_j g_i$ son continuas en T.

Si Q es un subconjunto compacto de T, cada función $D_j g_i$ está acotada en Q; luego $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\|$ está también acotada en Q, y definimos

$$\lambda_{\mathbf{g}}(Q) = \sup_{\mathbf{t}\in Q} \|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\| = \sup_{\mathbf{t}\in Q} \left\{ \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |D_j g_i(\mathbf{t})| \right\}. \tag{19}$$

El lema que sigue establece que la imagen $\mathbf{g}(Q)$ de un cubo Q de longitud lateral $2r$ está en otro cubo de longitud lateral $2r\lambda_{\mathbf{g}}(Q)$.

Lema 2. *Sea $Q = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \le r\}$ un cubo compacto de longitud lateral $2r$ contenido en T. Entonces para cada $\mathbf{x}$ de Q tenemos*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\| \le r\lambda_{\mathbf{g}}(Q). \tag{20}$$

Por lo tanto $\mathbf{g}(Q)$ está contenido en un cubo de longitud lateral $2r\lambda_{\mathbf{g}}(Q)$.

Demostración. En virtud del teorema del valor medio para funciones reales tenemos

$$g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{a}) = \nabla g_i(\mathbf{z}_i)\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{n} D_j g_i(\mathbf{z}_i)(x_j - a_j),$$

en donde $\mathbf{z}_i$ pertenece al segmento rectilíneo que une $\mathbf{x}$ y $\mathbf{a}$. Por consiguiente

$$|g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{a})| \le \sum_{j=1}^{n} |D_j g_i(\mathbf{z}_i)|\,|x_j - a_j| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \sum_{j=1}^{n} |D_j g_i(\mathbf{z}_i)| \le r\lambda_{\mathbf{g}}(Q),$$

y esto implica (20).

NOTA. La desigualdad (20) prueba que $g(Q)$ está contenido en un cubo de contenido

$$(2r\lambda_{\mathbf{g}}(Q))^n = \{\lambda_{\mathbf{g}}(Q)\}^n c(Q).$$

Lema 3. *Si A es un subconjunto compacto de T, medible Jordan, entonces $\mathbf{g}(A)$ es un subconjunto compacto de $\mathbf{g}(T)$, medible Jordan.*

Demostración. La compacidad de $\mathbf{g}(A)$ se sigue de la continuidad de $\mathbf{g}$. Puesto que A es medible Jordan, su frontera ∂A tiene contenido cero. Además, $\partial(\mathbf{g}(A)) = \mathbf{g}(\partial A)$, puesto que $\mathbf{g}$ es uno a uno y continua. Por consiguiente, para completar la demostración, es suficiente demostrar que $\mathbf{g}(\partial A)$ tiene contenido cero.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un número finito de intervalos abiertos $A_1, \ldots, A_m$ contenidos en T, la suma de cuyas medidas es $< \varepsilon$, tal que $\partial A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. En virtud del teorema 15.1 esta unión puede ser expresada como unión $U(\varepsilon)$ de una colección disjunta numerable de cubos la suma de cuyas medidas es $< \varepsilon$. Si $\varepsilon < 1$ podemos suponer que cada cubo en $U(\varepsilon)$ está contenido en $U(1)$. (Si no, los cubos en $U(\varepsilon)$ con $U(1)$ se interceptan y se aplica el teorema 15.1 otra vez.) Puesto que ∂A es compacto, una subcolección finita de los cubos de $U(\varepsilon)$ recubre ∂A, sean éstos $Q_1, \ldots, Q_k$. Por el lema 2, la imagen $\mathbf{g}(\bar{Q}_i)$ está en un cubo de medida $\{\lambda_{\mathbf{g}}(\bar{Q}_i)\}^n c(Q_i)$. Sea $\lambda = \lambda_{\mathbf{g}}(\overline{U(1)})$. Entonces $\lambda_{\mathbf{g}}(\bar{Q}_i) \le \lambda$ ya que $\bar{Q}_i \subseteq \overline{U(1)}$. Entonces $\mathbf{g}(\partial A)$ se puede recubrir por un número finito de cubos, tales que la suma de sus medidas no exceda a $\lambda^n \sum_{i=1}^{k} c(Q_i) < \varepsilon\lambda^n$. Puesto que esto se verifica para todo $\varepsilon < 1$, se sigue que $\mathbf{g}(\partial A)$ tiene contenido de Jordan 0, luego $\mathbf{g}(A)$ es medible Jordan.

El lema que sigue relaciona el contenido de un cubo Q con el de su imagen $\mathbf{g}(Q)$.

Lema 4. *Sea Q un cubo compacto de T y sea $\mathbf{h} = \boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{g}$, en donde $\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es una transformación lineal no singular. Entonces*

$$c[\mathbf{g}(Q)] \le |\det \boldsymbol{\alpha}|^{-1}\{\lambda_{\mathbf{h}}(Q)\}^n c(Q). \tag{21}$$

Demostración. Del lema 2 tenemos $c[\mathbf{g}(Q)] \le \{\lambda_{\mathbf{g}}(Q)\}^n c(Q)$. Aplicando esta desigualdad a la transformación de coordenadas $\mathbf{h}$, obtenemos

$$c[\mathbf{h}(Q)] \le \{\lambda_{\mathbf{h}}(Q)\}^n c(Q).$$

Pero en virtud del teorema 15.15 tenemos $c[\mathbf{h}(Q)] = c[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{g}(Q))] = |\det \boldsymbol{\alpha}|\, c[\mathbf{g}(Q)]$, por lo que

$$c[\mathbf{g}(Q)] = |\det \boldsymbol{\alpha}|^{-1} c[\mathbf{h}(Q)] \le |\det \boldsymbol{\alpha}|^{-1}\{\lambda_{\mathbf{h}}(Q)\}^n c(Q).$$

Lema 5. *Sea Q un cubo compacto de T. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{t}\in Q$ y $\mathbf{a}\in Q$ se tiene*

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1}\circ\mathbf{g}'(\mathbf{t})\| < 1 + \varepsilon \text{ siempre que } \|\mathbf{t} - \mathbf{a}\| < \delta. \tag{22}$$

Demostración. La función $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})^{-1}\|$ es continua y por lo tanto acotada en Q, o sea que $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})^{-1}\| < M$ para todo $\mathbf{t}$ de Q donde $M > 0$. En virtud de la continuidad de $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\|$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{t}) - \mathbf{g}'(\mathbf{a})\| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ siempre que } \|\mathbf{t} - \mathbf{a}\| < \delta.$$

Si $\mathbf{I}$ designa la transformación identidad, entonces

$$\mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1} \circ \mathbf{g}'(\mathbf{t}) - \mathbf{I}(\mathbf{t}) = \mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1} \circ \{\mathbf{g}'(\mathbf{t}) - \mathbf{g}'(\mathbf{a})\},$$

luego si $\|\mathbf{t} - \mathbf{a}\| < \delta$ tenemos

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1} \circ \mathbf{g}'(\mathbf{t}) - \mathbf{I}(\mathbf{t})\| \le \|\mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1}\| \, \|\mathbf{g}'(\mathbf{t}) - \mathbf{g}'(\mathbf{a})\| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

La desigualdad triangular nos proporciona $\|\boldsymbol{\alpha}\| \le \|\boldsymbol{\beta}\| + \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|$. Haciendo

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{g}'(\mathbf{a})^{-1} \circ \mathbf{g}'(\mathbf{t}) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{I}(\mathbf{t}),$$

obtenemos (22).

Lema 6. *Sea Q un cubo compacto de T. Entonces tenemos*

$$c[\mathbf{g}(Q)] \le \int_Q |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t}.$$

Demostración. La integral de la derecha existe como integral de Riemann puesto que el integrando es una función continua y acotada en Q. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de Q tal que para cada suma de Riemann $S(P, |J_{\mathbf{g}}|)$ con P más fina que P_ε tenemos

$$\left| S(P, |J_{\mathbf{g}}|) - \int_Q |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t} \right| < \varepsilon.$$

Elegimos la partición P tal que esté constituida por un número finito de cubos $Q_1, \ldots, Q_m$ de longitud lateral $< \delta$, en donde δ es el número (dependiente de ε) dado por el lema 5. Sea $\mathbf{a}_i$ el centro de Q_i y apliquemos el lema 4 a Q_i con $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{g}'(\mathbf{a}_i)^{-1}$ a fin de obtener la desigualdad

$$c[\mathbf{g}(Q_i)] \le |\det \mathbf{g}'(\mathbf{a}_i)| \, \{\lambda_{\mathbf{h}}(Q_i)\}^n \, c(Q_i), \tag{23}$$

donde $\mathbf{h} = \boldsymbol{\alpha} \circ \mathbf{g}$. En virtud de la regla de la cadena tenemos $\mathbf{h}'(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\alpha}'(\mathbf{x}) \circ \mathbf{g}'(\mathbf{t})$, en donde $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{t})$. Pero $\boldsymbol{\alpha}'(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}$ puesto que $\boldsymbol{\alpha}$ es una función lineal, luego

$$\mathbf{h}'(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\alpha} \circ \mathbf{g}'(\mathbf{t}) = \mathbf{g}'(\mathbf{a}_i)^{-1} \circ \mathbf{g}'(\mathbf{t}).$$

Pero por el lema 5 tenemos $\|\mathbf{h}'(\mathbf{t})\| < 1 + \varepsilon$ si $\mathbf{t} \in Q_i$, luego

$$\lambda_{\mathbf{h}}(Q_i) = \sup_{\mathbf{t} \in Q_i} \|\mathbf{h}'(\mathbf{t})\| \le 1 + \varepsilon.$$

Luego (23) nos da

$$c[\mathbf{g}(Q_i)] \le |\det \mathbf{g}'(\mathbf{a}_i)| \, (1 + \varepsilon)^n \, c(Q_i).$$

Sumando para todos los i, hallamos

$$c[\mathbf{g}(Q)] \le (1 + \varepsilon)^n \sum_{i=1}^{m} |\det \mathbf{g}'(\mathbf{a}_i)| \, c(Q_i).$$

Puesto que $\det \mathbf{g}'(\mathbf{a}_i) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{a}_i)$, la suma del segundo miembro es una suma de Riemann $S(P, |J_{\mathbf{g}}|)$, y dado que $S(P, |J_{\mathbf{g}}|) < \int_Q |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t} + \varepsilon$, obtenemos

$$c[\mathbf{g}(Q)] \le (1 + \varepsilon)^n \left\{ \int_Q |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t} + \varepsilon \right\}.$$

Pero ε es arbitrario, por lo tanto esto implica $c[\mathbf{g}(Q)] \le \int_Q |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t}$.

Lema 7. *Sea K un cubo compacto de $\mathbf{g}(T)$. Entonces*

$$\mu(K) \le \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t}. \tag{24}$$

Demostración. La integral existe como integral de Riemann puesto que el integrando es continuo en el conjunto compacto $\mathbf{g}^{-1}(K)$. Además, por el lema 3, la integral sobre $\mathbf{g}^{-1}(K)$ es igual a la que se obtiene sobre el interior de $\mathbf{g}^{-1}(K)$. Por el teorema 15.1 podemos escribir

$$\operatorname{int} \mathbf{g}^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

en donde $\{A_1, A_2, \ldots\}$ es una colección numerable disjunta de cubos cuya adherencia está contenida en el interior de $\mathbf{g}^{-1}(K)$. Luego $\operatorname{int} \mathbf{g}^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ en donde cada Q_i es la adherencia de A_i. Puesto que la integral de (24) es también una integral de Lebesgue, podemos utilizar la aditividad numerable junto con el lema 6 para escribir

$$\int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{Q_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t} \ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu[\mathbf{g}(Q_i)] = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{g}(Q_i) \right) = \mu(K).$$

Lema 8. *Sea K un cubo compacto de* $\mathbf{g}(T)$*. Entonces para cada función superior no negativa f acotada en K, la integral* $\int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}$ *existe, y se tiene la desigualdad*

$$\int_K f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \le \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}. \tag{25}$$

Demostración. Sea s una función escalonada no negativa en K. Entonces existe una partición de K constituida de un número finito de cubos $K_1, \ldots, K_r$ tal que s es constante en el interior de cada K_i, o sea $s(\mathbf{x}) = a_i \ge 0$ si $\mathbf{x} \in \operatorname{int} K_i$. Aplicamos (24) a cada cubo K_i, multiplicamos por a_i y sumamos, obteniendo

$$\int_K s(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \le \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} s[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}. \tag{26}$$

Sea ahora $\{s_k\}$ una sucesión creciente de funciones escalonadas no negativas convergente casi en todo K hacia la función superior f. Entonces (26) se verifica para cada s_k, y si hacemos que $k \to \infty$ obtenemos (25). La existencia de la integral de la derecha se sigue del teorema de convergencia acotada de Lebesgue puesto que tanto $f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]$ como $|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|$ están acotadas en el conjunto compacto $\mathbf{g}^{-1}(K)$.

Teorema 15.16. *Sea K un cubo compacto de* $\mathbf{g}(T)$*. Entonces se tiene*

$$\mu(K) = \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}. \tag{27}$$

Demostración. En vista del lema 7, basta probar la desigualdad

$$\int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t} \le \mu(K). \tag{28}$$

Igual como en la demostración del lema 7, escribimos

$$\operatorname{int} \mathbf{g}^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i,$$

en donde $\{A_1, A_2, \ldots\}$ es una colección numerable disjunta de cubos y Q_i es la adherencia de A_i. Entonces

$$\int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{Q_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}. \tag{29}$$

Apliquemos ahora el lema 8 a cada una de las integrales $\int_{Q_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}$, tomando $f = |J_{\mathbf{g}}|$ y utilizando la transformación de coordenadas $\mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1}$. Esto nos proporciona la desigualdad

$$\int_{Q_i} |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t} \le \int_{\mathbf{g}(Q_i)} |J_{\mathbf{g}}[\mathbf{h}(\mathbf{u})]|\,|J_{\mathbf{h}}(\mathbf{u})|\,d\mathbf{u} = \int_{\mathbf{g}(Q_i)} d\mathbf{u} = \mu[\mathbf{g}(Q_i)],$$

que, usada en (29), da (28).

15.13 COMPLEMENTO DE LA DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLES

Ahora es relativamente fácil completar la demostración de la fórmula

$$\int_{\mathbf{g}(T)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_T f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}, \tag{30}$$

en las condiciones establecidas en el teorema 15.11. Esto es, suponemos que T es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, que $\mathbf{g}$ es una transformación de coordenadas en T, y que existe la integral de la izquierda de (30). Vamos a demostrar que la integral del segundo miembro existe y que ambas son iguales. Esto se deducirá del caso particular en el que la integral del primer miembro está extendida sobre un cubo K.

Teorema 15.17. *Sea K un cubo compacto de* $\mathbf{g}(T)$ *y supongamos que existe la integral de Lebesgue* $\int_K f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$*. Entonces existe también la integral de Lebesgue* $\int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}$ *y ambas son iguales.*

Demostración. Es suficiente demostrar el teorema cuando f es una función superior en K. Entonces existe una sucesión creciente de funciones escalonadas $\{s_k\}$ tal que $s_k \to f$ casi en todo K. Por el teorema 15.16 tenemos

$$\int_K s_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} s_k[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t},$$

para cada función escalonada s_k. Cuando $k \to \infty$, tenemos $\int_K s_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \to \int_K f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$.

Sea ahora

$$f_k(\mathbf{t}) = \begin{cases} s_k[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\,|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| & \text{si } \mathbf{t} \in \mathbf{g}^{-1}(K), \\ 0 & \text{si } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n - \mathbf{g}^{-1}(K). \end{cases}$$

Entonces

$$\int_{\mathbf{R}^n} f_k(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} s_k[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} = \int_K s_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

luego

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = \lim_{k\to\infty} \int_K s_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_K f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Por el teorema de Levi (el análogo al teorema 10.24), la sucesión $\{f_k\}$ converge casi en todo $\mathbf{R}^n$ hacia una función de $L(\mathbf{R}^n)$. Puesto que se tiene

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{t}) = \begin{cases} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})| & \text{si } \mathbf{t} \in \mathbf{g}^{-1}(K), \\ 0 & \text{si } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n - \mathbf{g}^{-1}(K), \end{cases}$$

casi en todo $\mathbf{R}^n$, se sigue la existencia de la integral $\int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}$ y que es igual a $\int_K f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Esto completa la demostración del teorema 15.17.

Demostración del teorema 15.11. Supongamos ahora que la integral $\int_{\mathbf{g}(T)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ existe. Puesto que $\mathbf{g}(T)$ es abierto, podemos escribir

$$\mathbf{g}(T) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

en donde $\{A_1, A_2, \ldots\}$ es una colección disjunta numerable de cubos cuya adherencia está en $\mathbf{g}(T)$. Sea K_i la adherencia de A_i. Utilizando la aditividad numerable y el teorema 15.17 tenemos

$$\int_{\mathbf{g}(T)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{K_i} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{g}^{-1}(K_i)} f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}$$

$$= \int_T f[\mathbf{g}(\mathbf{t})]\, |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}.$$

EJERCICIOS

15.1 Si $f \in L(T)$, en donde T es la región triangular de $\mathbf{R}^2$ de vértices en (0, 0), (1, 0), (0, 1), probar que

$$\int_T f(x, y)\, d(x, y) = \int_0^1 \left[\int_0^x f(x, y)\, dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_y^1 f(x, y)\, dx\right] dy.$$

15.2 Fijado c, $0 < c < 1$, definimos f en $\mathbf{R}^2$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} (1 - y)^c/(x - y)^c & \text{si } 0 \le y \le x,\ 0 < x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Probar que $f \in L(\mathbf{R}^2)$ y calcular la integral doble $\int_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, d(x, y)$.

15.3 Sea S un subconjunto medible de $\mathbf{R}^2$ con medida $\mu(S)$ finita. Utilizar la notación de la definición 15.4 para probar que

$$\mu(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(S^x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(S_y)\, dy.$$

15.4 Sea $f(x, y) = e^{-xy} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ si $x \ge 0$, $y \ge 0$, y sea $f(x, y) = 0$ en otro caso. Probar que las dos integrales reiteradas

$$\int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dx\right] dy \quad \text{y} \quad \int_{\mathbf{R}^1} \left[\int_{\mathbf{R}^1} f(x, y)\, dy\right] dx$$

existen y son iguales, pero que en cambio no existe la integral doble de f en $\mathbf{R}^2$. Explicar, además, por qué este resultado no contradice el criterio de Tonelli-Hobson (teorema 15.8).

15.5 Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ para $0 \le x \le 1$, $0 < y \le 1$, y sea $f(0; 0) = 0$. Probar que las dos integrales reiteradas

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y)\, dy\right] dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y)\, dx\right] dy$$

existen pero no son iguales. Esto prueba que f no es integrable de Lebesgue en $[0, 1] \times [0, 1]$.

15.6 Sea $I = [0, 1] \times [0, 1]$, sea $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$ si $(x, y) \in I$, $(x, y) \ne (0, 0)$, y sea $f(0, 0) = 0$. Probar que $f \notin L(I)$ considerando las integrales reiteradas

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y)\, dy\right] dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y)\, dx\right] dy.$$

15.7 Sea $I = [0, 1] \times [1, +\infty]$ y sea $f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$ si $(x, y) \in I$. Probar que $f \notin L(I)$ considerando las integrales reiteradas

$$\int_0^1 \left[\int_1^\infty f(x, y)\, dy\right] dx \qquad \text{y} \qquad \int_1^\infty \left[\int_0^1 f(x, y)\, dx\right] dy.$$

15.8 Las fórmulas de transformación de integrales dobles y triples que siguen, aparecen en Cálculo elemental. Obtenerlas como consecuencia del teorema 15.11 y dar las restricciones a que hay que someter T y T' para la validez de dichas fórmulas.

a) $$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{T'} f(r \cos \theta,\, r \operatorname{sen} \theta) r\, dr\, d\theta.$$

b) $$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{T'} f(r \cos \theta,\, r \operatorname{sen} \theta,\, z) r\, dr\, d\theta\, dz.$$

c) $$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_{T'} f(\rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi,\, \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi,\, \rho \cos \varphi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

15.9 a) Probar que $\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x, y) = \pi$ transformando la integral a coordenadas polares.

b) Utilizar la parte (a) para demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

c) Utilizar la parte (b) para demostrar que $\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2}\, d(x_1, \dots, x_n) = \pi^{n/2}$.

d) Utilizar la parte (b) para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}\, dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-tx^2}\, dx$, $t > 0$.

15.10 Sea $V_n(a)$ la medida n dimensional de la n-bola $B(\mathbf{0}, a)$ de radio a. El ejercicio esboza una demostración de la fórmula

$$V_n(a) = \frac{\pi^{n/2} a^n}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)}.$$

a) Utilizar un cambio lineal de variables para probar que $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

b) Suponiendo $n \geq 3$, expresar la integral para $V_n(1)$ como la reiteración de una integral de orden $n - 2$ y una integral doble, y utilizar la parte (a) para una $(n-2)$-bola, para obtener la fórmula

$$V_n(1) = V_{n-2}(1) \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1 - r^2)^{n/2 - 1} r\, dr\right] d\theta = V_{n-2}(1) \frac{2\pi}{n}.$$

c) De la fórmula de reiteración dada en (b) deducir que

$$V_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)}.$$

15.11 Referirse al ejercicio 15.10 y demostrar que

$$\int_{B(\mathbf{0}; 1)} x_k^2\, d(x_1, \dots, x_n) = \frac{V_n(1)}{n + 2}$$

para cada $k = 1, 2, \dots, n$.

15.12 Referirse al ejercicio 15.10 y expresar la integral para $V_n(1)$ como la reiteración de una integral de orden $n - 1$ y una integral unidimensional, para obtener la fórmula de reiteración

$$V_n(1) = 2V_{n-1}(1) \int_0^1 (1 - x^2)^{(n-1)/2}\, dx.$$

Hacer $x = \cos t$ en la integral y utilizar la fórmula del ejercicio 15.10 para deducir

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)}$$

15.13 Si $a > 0$, sea $S_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_1| + \dots + |x_n| \leq a\}$, y sea $V_n(a)$ la medida n dimensional de $S_n(a)$. Este ejercicio esboza una demostración de la fórmula $V_n(a) = 2^n a^n / n!$.

a) Utilizar un cambio de variables lineal para demostrar que $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

b) Suponiendo $n \geq 2$, expresar la integral de $V_n(1)$ como integral reiterada de una integral unidimensional y de una integral de orden $n - 1$, y usar (a) para demostrar que

$$V_n(1) = V_{n-1}(1) \int_{-1}^1 (1 - |x|)^{n-1}\, dx = 2V_{n-1}(1)/n,$$

Deducir además que $V_n(1) = 2^n/n!$.

15.14 Si $a > 0$ y $n \geq 2$, sea $S_n(a)$ el siguiente conjunto de $\mathbf{R}^n$:

$$S_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_i| + |x_n| \leq a \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n - 1\}.$$

Sea $V_n(a)$ la medida n-dimensional de $S_n(a)$. Utilizar un método sugerido por el ejercicio 15.13 para probar que $V_n(a) = 2^n a^n / n$.

15.15 $Q_n(a)$ indica el «cuadrante primero» de la n-bola $B(\mathbf{0} : a)$ dado por $Q_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) : \|\mathbf{x}\| \leq a \;\; \text{y} \;\; 0 \leq x_i \leq a \;\; \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n\}$. Sea $f(\mathbf{x}) = x_1 \cdots x_n$ y probar que

$$\int_{Q_n(a)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{a^{2n}}{2^n n!}.$$

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

15.1 Asplund, E., y Bungart, L., *A First Course in Integration*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.
15.2 Bartle, R., *The Elements of Integration*. Wiley, New York, 1966.
15.3 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration*. Oxford University Press, 1937.
15.4 Korevaar, J., *Mathematical Methods*, Vol. 1. Academic Press, New York, 1968.
15.5 Riesz, F., y Sz.-Nagy, B., *Functional Analysis*. Traductor: L. Boron. Ungar, New York, 1955.

CAPÍTULO 16

Teorema de Cauchy y cálculo de residuos

16.1 FUNCIONES ANALÍTICAS

El concepto de derivada para funciones de una variable compleja se introdujo en el capítulo 5 (sección 5.15). Las funciones más importantes en la teoría de variable compleja son las que poseen derivada continua en cada uno de los puntos de un conjunto abierto. Se llaman *funciones analíticas*.

Definición 16.1. *Sea $f = u + iv$ una función compleja definida en un conjunto abierto S del plano complejo $\mathbf{C}$. Se dice que f es analítica en S si existe y es continua* la derivada f' en cada punto de S.*

NOTA. Si T es un subconjunto arbitrario de S (no necesariamente abierto), la terminología «f es analítica en T» significa que f es analítica en algún conjunto abierto que contiene a T. En particular, f es analítica en un punto z si existe un disco abierto en torno de z en el que f es analítica.

Es posible que una función posea derivada en un punto sin que sea analítica en dicho punto. Por ejemplo, si $f(z) = |z|^2$, entonces f tiene derivada en 0 pero carece de ella en cualquier otro punto de $\mathbf{C}$.

En el capítulo 5 se hallaron ejemplos de funciones analíticas. Si $f(z) = z^n$ (en donde n es un entero positivo), entonces f es analítica en todo en $\mathbf{C}$ y su derivada es $f'(z) = nz^{n-1}$. Cuando n es un entero negativo, la ecuación $f(z) = z^n$ si $z \neq 0$ define una función analítica en todo salvo en 0. Las funciones polinómicas son analíticas en todo $\mathbf{C}$, y las funciones racionales son analíticas en todo $\mathbf{C}$ salvo en los puntos en los que se anula el denominador. La función exponencial, definida por la fórmula $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, en donde $z = x + iy$,

* Puede demostrarse que la existencia de f' en S implica automáticamente la continuidad de f' en S (hecho descubierto por Goursat en 1900). De aquí que una función analítica puede definirse como la que meramente posee una derivada por todo S. Sin embargo, incluimos la continuidad de f' como parte de la definición de analiticidad, ya que permite facilitar algunas demostraciones.

es analítica en todo **C** y es igual a su derivada. Las funciones seno y coseno complejos (al ser combinaciones lineales de funciones exponenciales) son también analíticas en todo **C**.

Sea $f(z) = \ln z$ si $z \neq 0$, en donde $\ln z$ designa el logaritmo principal de z (ver definición 1.53). Entonces f es analítica en todo **C** excepto en aquellos puntos $z = x + iy$ para los que $x \leq 0$ e $y = 0$. En estos puntos, el logaritmo principal deja de ser continuo. La analiticidad en los otros puntos es fácilmente comprobable verificando que las partes real e imaginaria de f satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (teorema 12.6).

Más adelante veremos que la analiticidad en un punto z introduce una restricción muy fuerte a una función. Implica la existencia de todas las derivadas de orden superior en un entorno de z y también garantiza la existencia de una serie de potencias convergente que representa la función en un entorno de z. Esto está en marcado contraste con el comportamiento de las funciones reales, las que es posible que exista la derivada primera y que sea continua sin que por ello se pueda deducir la existencia de la segunda derivada.

16.2 CAMINOS Y CURVAS EN EL PLANO COMPLEJO

Muchas de las propiedades fundamentales de las funciones analíticas se deducen más fácilmente con la ayuda de integrales calculadas a lo largo de curvas del plano complejo. Estas integrales se llaman *integrales de contorno* (o *integrales de línea, complejas*) y serán estudiadas en la sección que sigue. Esta sección enumera cierta terminología utilizada para diferentes tipos de curvas, como las de la figura 16.1.

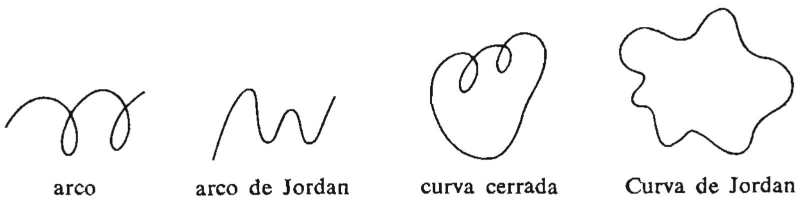


Figura 16.1

Recordemos que un *camino* en el plano complejo es una función compleja γ, continua sobre un intervalo compacto $[a, b]$. La imagen de $[a, b]$ por γ (la gráfica de γ) se llama *curva* descrita por γ y se dice que une los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$.

Si $\gamma(a) \neq \gamma(b)$, la curva se llama *arco* de extremos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$.

Si γ es uno a uno en $[a, b]$, la curva se llama *arco simple* o *arco de Jordan*.

Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, la curva se llama *curva cerrada*. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ y si γ es uno a uno en el intervalo semiabierto $[a, b)$, la curva se llama *curva cerrada simple*, o *curva de Jordan*.

El camino γ es *rectificable* si tiene longitud de arco finita, como se definió en la sección 6.10 .Recordemos que γ es rectificable si, y sólo si, γ es de variación acotada en $[a, b]$. (Ver sección 7.27 y teorema 6.17.)

Un camino γ es *regular a trozos* en $[a, b]$ si posee derivada acotada γ' continua en todo $[a, b]$ excepto (quizás) en un número finito de puntos. En estos puntos excepcionales se requiere que existan las dos derivadas laterales, la derivada por la derecha y la derivada por la izquierda. Un camino regular a trozos es rectificable y la longitud de su arco la da la integral $\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$.

Un camino cerrado regular a trozos se llamará un *circuito*.

Definición 16.2. *Si $a \in \mathbf{C}$ y $r > 0$, el camino γ definido por la ecuación*

$$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

se llama círculo de centro a y radio r, orientado positivamente.

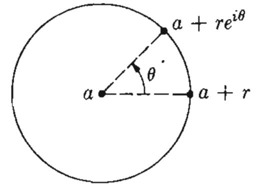


Figura 16.2

NOTA. El significado geométrico de $\gamma(\theta)$ se halla representado en la figura 16.2. Dado que θ varía de 0 a 2π, el punto $\gamma(\theta)$ se mueve a lo largo del círculo en sentido contrario al de las agujas del reloj.

16.3 INTEGRALES DE CONTORNO

Las integrales de contorno se definen en términos de integrales de Riemann-Stieltjes complejas, discutidas en la sección 7.27.

Definición 16.3. *Sea γ un camino en el plano complejo con dominio $[a, b]$, y sea f una función compleja definida en la gráfica de γ. La integral de contorno de f a lo largo de γ, designada por medio de $\int_\gamma f$ se define por la ecuación*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f[\gamma(t)]\, d\gamma(t),$$

siempre que la integral de Riemann-Stieltjes de la derecha exista

NOTACIÓN. Para designar la integral se escribe también

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

o

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(z)\,dz,$$

La variable muda z se puede sustituir por cualquier otro símbolo conveniente. Por ejemplo, $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(w)\,dw$.

Si γ es rectificable, entonces una condición suficiente para que exista $\int_\gamma f$ es que f sea continua en la gráfica de γ (teorema 7.27).

El efecto obtenido al reemplazar γ por un camino equivalente (tal como se definió en la sección 6.12) es, en el peor de los casos, un cambio de signo. En efecto, se tiene:

Teorema 16.4. *Sean γ y δ dos caminos equivalentes que describen una misma curva Γ. Si existe $\int_\gamma f$ entonces existe también $\int_\delta f$. Además se verifica*

$$\int_\gamma f = \int_\delta f,$$

si γ y δ recorren la curva Γ en la misma dirección, mientras que

$$\int_\gamma f = -\int_\delta f,$$

si γ y δ recorren la curva Γ en direcciones opuestas.

Demostración. Supongamos que $\delta(t) = \gamma[u(t)]$ en donde u es estrictamente monótona en $[c, d]$. Aplicando la fórmula del cambio de variables para integrales de Riemann-Stieltjes (teorema 7.7) tenemos

$$\int_{u(c)}^{u(d)} f[\gamma(t)]\,d\gamma(t) = \int_c^d f[\delta(t)]\,d\delta(t) = \int_\delta f. \tag{1}$$

Si u es creciente entonces $u(c) = a$, $u(d) = b$ y (1) nos da $\int_\gamma f = \int_\delta f$.
Si u es decreciente entonces $u(c) = b$, $u(d) = a$ y (1) nos da $\int_\gamma f = -\int_\delta f$.

El lector puede verificar fácilmente las siguientes propiedades aditivas de las integrales de contorno.

Teorema 16.5. *Sea γ un camino con dominio $[a, b]$.*

i) *Si existen las integrales $\int_\gamma f$ y $\int_\gamma g$, entonces existe la integral $\int_\gamma(\alpha f + \beta g)$ para cada par de números complejos α, β, y se tiene*

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\gamma f + \beta \int_\gamma g.$$

ii) *Sean γ_1 y γ_2 las restricciones de γ a $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente, en donde $a < c < b$. Si existen dos de las tres integrales que intervienen en (2), entonces también existe la tercera y se tiene*

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f. \tag{2}$$

En la práctica, muchos de los caminos de integración son rectificables. Para tales caminos se utiliza a menudo el siguiente teorema para dar una acotación del valor absoluto de la integral de contorno.

Teorema 16.6. *Sea γ un camino rectificable de longitud $\Lambda(\gamma)$. Si existe la integral $\int_\gamma f$, y si $|f(z)| \le M$ para todo z de la gráfica de γ, entonces tenemos la desigualdad*

$$\left|\int_\gamma f\right| \le M\Lambda(\gamma).$$

Demostración. Basta observar que todas las sumas de Riemann-Stieltjes que intervienen en la definición de $\int_a^b f[\gamma(t)]\,d\gamma(t)$ tienen un valor absoluto que no excede a $M\Lambda(\gamma)$.

Las integrales de contorno tomadas sobre curvas regulares a trozos pueden expresarse como integrales de Riemann. El teorema que sigue es consecuencia fácil del teorema 7.8.

Teorema 16.7. *Sea γ un camino regular a trozos con dominio $[a, b]$. Si existe la integral de contorno $\int_\gamma f$, se tiene*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f[\gamma(t)]\,\gamma'(t)\,dt.$$

16.4 LA INTEGRAL A LO LARGO DE CAMINOS CIRCULARES EXPRESADA EN FUNCIÓN DEL RADIO

Consideremos un camino circular γ de radio $r \geq 0$ y centro a, dado por

$$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

En esta sección estudiamos la integral $\int_\gamma f$ en función del radio r.

Sea $\varphi(r) = \int_\gamma f$. Como $\gamma'\theta = ire^{i\theta}$, el teorema 16.7 nos da

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})ire^{i\theta}\, d\theta. \tag{3}$$

Cuando r varía en el intervalo $[r_1, r_2]$, en donde $0 \leq r_1 < r_2$, los puntos $\gamma(\theta)$ dibujan un *anillo* que se designa por medio de $A(a; r_1, r_2)$ (Ver fig. 16.3.) Luego,

$$A(a; r_1, r_2) = \{z : r_1 \leq |z - a| \leq r_2\}.$$

Si $r_1 = 0$, el anillo es un disco cerrado de radio r_2. Si f es continua en el anillo, entonces φ es continua en el intervalo $[r_1, r_2]$. Si f es analítica en el anillo, entonces φ es diferenciable en $[r_1, r_2]$. El próximo teorema demuestra que φ es *constante* en $[r_1, r_2]$ si f es analítica en todo el anillo excepto quizás en un subconjunto finito, en el supuesto de que f sea continua en dicho subconjunto.

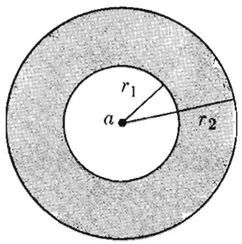


Figura 16.3

Teorema 16.8. *Suponemos que f es analítica en el anillo $A(a; r_1, r_2)$, excepto quizás en un número finito de puntos. Suponemos que, en estos puntos excepcionales, f es continua. Entonces la función φ definida por* (3) *es constante en el intervalo $[r_1, r_2]$. Además, si $r_1 = 0$, la constante es* 0.

Demostración. Si $z_1, \ldots, z_n$ designa los puntos excepcionales en los que falla la analiticidad de f, enumeremos estos puntos de acuerdo con el crecimiento de distancias al centro, es decir

$$|z_1 - a| \leq |z_2 - a| \leq \cdots \leq |z_n - a|,$$

y sea $R_k = |z_k - a|$. Igualmente sean $R_0 = r_1$, $R_{n+1} = r_2$. La unión de los intervalos $[R_k, R_{k+1}]$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$ es el intervalo $[r_1, r_2]$. Probaremos que φ es constante en cada uno de los intervalos $[R_k, R_{k+1}]$. Escribimos (3) en la forma

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} g(r, \theta)\, d\theta, \text{ en donde } g(r, \theta) = f(a + re^{i\theta})ire^{i\theta}.$$

Aplicando la regla de la cadena se obtiene fácilmente

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = ir\,\frac{\partial g}{\partial r}. \tag{4}$$

(El lector puede verificar dicha fórmula.) La continuidad de f' implica la continuidad de las derivadas parciales $\partial g/\partial r$ y $\partial g/\partial \theta$. Por consiguiente, en cada intervalo abierto (R_k, R_{k+1}) podemos calcular $\varphi'(r)$ diferenciando bajo el signo de integración (teorema 7.40) y entonces utilizar (4) y el segundo teorema fundamental del Cálculo (teorema 7.34) para obtener

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}\, d\theta = \frac{1}{ir}\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \theta}\, d\theta = \frac{1}{ir}\{g(r, 2\pi) - g(r, 0)\} \quad 0.$$

Aplicando el teorema 12.10 vemos que φ es constante en cada subintervalo abierto (R_k, R_{k+1}). Por la continuidad, φ es constante en cada subintervalo cerrado $[R_k, R_{k+1}]$ y por lo tanto en su unión $[r_1, r_2]$. En virtud de (3) vemos que $\varphi(r) \to 0$ cuando $r \to 0$, luego el valor constante de φ es 0 si $r_1 = 0$.

16.5 EL TEOREMA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY PARA UN CÍRCULO

El caso especial del teorema 16.8 que damos a continuación es de particular importancia.

Teorema 16.9 (Teorema de la integral de Cauchy para un círculo). *Si f es analítica en un disco $B(a; R)$ excepto quizás para un número finito de puntos en los que es continua, entonces*

$$\int_\gamma f = 0,$$

para cada camino circular γ con centro en a y radio $r < R$.

Demostración. Elegimos r_2 tal que $r < r_2 < R$ y aplicamos el teorema 16.8 con $r_1 = 0$.

NOTA. Existe una forma más general del teorema de la integral de Cauchy en que el camino circular γ se substituye por un camino cerrado más general. Estos caminos más generales se introducirán a través del concepto de *homotopía*.

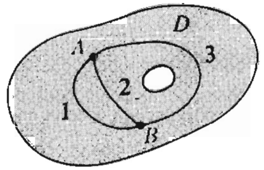


Figura 16.4

16.6 CURVAS HOMOTÓPICAS

La figura 16.4 muestra tres arcos que tienen los mismos puntos extremos A y B situados en la región abierta D. El arco 1 puede ser deformado con continuidad hasta transformarse en el arco 2 por medio de una colección de arcos intermedios, cada uno de los cuales pertenece a D. Dos arcos que posean esta propiedad se llaman *homotópicos* en D. El arco 1 no se puede deformar en el arco 3 (puesto que existe un agujero que los separa), luego no son homotópicos en D.

En esta sección damos una definición formal de homotopía. A continuación vemos que, si f es analítica en D, la integral de contorno de f de A a B tiene el mismo valor a lo largo de dos caminos homotópicos en D. En otras palabras, el valor de una integral de contorno $\int_A^B f$ permanece inalterado en las deformaciones continuas del camino, en el supuesto de que los contornos intermedios permanezcan en el interior de la región de analiticidad de f. Esta propiedad de las integrales de contorno es de máxima importancia en las aplicaciones de la integración compleja.

Definición 16.10. *Sean γ_0 y γ_1 dos caminos con dominio común $[a, b]$. Supongamos que o bien*

a) *γ_0 y γ_1 tienen los mismos extremos*: $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ *y* $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, *o bien*
b) *γ_0 y γ_1 son ambos caminos cerrados*: $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$ *y* $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$.

Sea D un subconjunto de C que contenga las gráficas de γ_0 y γ_1. Entonces γ_0 y γ_1 son homotópicas en D si existe una función h, continua en el rectángulo $[0, 1] \times [a, b]$, *y con valores en D, tal que*

1) $h(0, t) = \gamma_0(t)$ *si* $t \in [a, b]$,
2) $h(1, t) = \gamma_1(t)$ *si* $t \in [a, b]$.

Además exigimos que cada s de $[0, 1]$ *verifique*

3a) $h(s, a) = \gamma_0(a)$ *y* $h(s, b) = \gamma_0(b)$, *en el caso* (a);
o bien
3b) $h(s, a) = h(s, b)$, *en el caso* (b).

La función h se llama una homotopía.

El concepto de homotopía admite una interpretación geométrica simple. Para cada s de $[0, 1]$, fijo, sea $\gamma_s(t) = h(s, t)$. Entonces γ_s se puede entender como un camino intermedio que se deforma desde γ_0 cuando $s = 0$ hasta γ_1 cuando $s = 1$.

Ejemplo 1. *Homotopía en un punto.* Si γ_1 es una función constante, por lo que su gráfico es un solo punto, y si γ_0 es homotópico en γ_1 en D, decimos que γ_0 es *homotópico a un punto* en D.

Ejemplo 2. *Homotopía lineal.* Si para cada t en $[a, b]$ el segmento de recta que une $\gamma_0(t)$ con $\gamma_1(t)$ está situado en D, entonces γ_0 y γ_1 son homotópicos en D por que la función $h(s, t) = s\gamma_1(t) + (1 - s)\gamma_0(t)$ sirve como homotopía. En este caso se dice que γ_0 y γ_1 son *homotópicas linealmente* en D. En particular, dos caminos con dominio $[a, b]$ son homotópicos lineales en $\mathbf{C}$ (el plano complejo) o, generalizando, en cualquier conjunto convexo conteniendo sus grafos.

NOTA. La homotopía es una relación de equivalencia.

El teorema que sigue demuestra que entre dos caminos homotópicos cualesquiera se puede interpolar un número finito de caminos poligonales intermedios, cada uno de los cuales es linealmente homotópico a su vecino.

Teorema 16.11 (Teorema de interpolación poligonal). *Sean γ_0 y γ_1 caminos homotópicos en un conjunto abierto D. Entonces existe un número finito de caminos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que:*

a) $\alpha_0 = \gamma_0$ *y* $\alpha_n = \gamma_1$,
b) *α_j es un camino poligonal para* $1 \leq j \leq n - 1$,
c) *α_j es linealmente homotópico en D a α_{j+1} para* $0 \leq j \leq n - 1$.

Demostración. Puesto que γ_0 y γ_1 son homotópicos en D, existe una homotopía h que satisface las condiciones de la definición 16.10. Consideremos las particiones

$$\{s_0, s_1, \dots, s_n\} \quad \text{de } [0, 1] \quad \text{y} \quad \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad \text{de } [a, b],$$

en n partes iguales, eligiendo n suficientemente grande para que la imagen por h de cada rectángulo $[s_j, s_{j+1}] \times [t_k, t_{k+1}]$ esté contenida en el disco abierto D_{jk} contenido en D. (El lector verificará que esto es posible puesto que h es uniformemente continua.)

En el camino intermedio γ_{s_j} dado por medio de

$$\gamma_{s_j}(t) = h(s_j, t) \quad \text{para } 0 < j < n,$$

inscribimos un camino poligonal α_j con vértices en los puntos $h(s_j, t_k)$. Esto es,

$$\alpha_j(t_k) = h(s_j, t_k) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n,$$

y α_j es lineal en cada subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$ para $0 \le k \le n-1$. Definimos también $\alpha_0 = \gamma_0$ y $\alpha_n = \gamma_1$. (En la figura 16.5 puede verse un ejemplo.)

Los cuatro vértices $\alpha_j(t_k)$, $\alpha_j(t_{k+1})$, $\alpha_{j+1}(t_k)$, y $\alpha_{j+1}(t_{k+1})$ pertenecen todos al disco D_{jk}. Puesto que D_{jk} es convexo, el segmento rectilíneo que los une pertenece asimismo a D_{jk} y por lo tanto los puntos

$$s\alpha_{j+1}(t) + (1 - s)\alpha_j(t), \tag{5}$$

pertenecen a D_{jk} para cada (s, t) de $[0,1] \times [t_k, t_{k+1}]$. Por lo tanto los puntos de (5) pertenecen a D para cada (s, t) de $[0, 1] \times [a, b]$, luego α_{j+1} es linealmente homotópico a α_j en D.

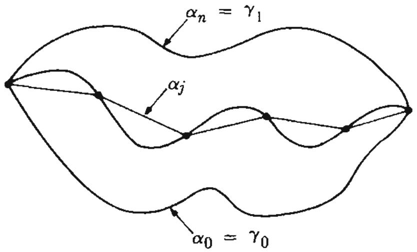


Figura 16.5

16.7 INVARIANCIA DE LAS INTEGRALES DE CONTORNO EN LAS HOMOTOPÍAS

Teorema 16.12. *Supongamos que f es analítica en un conjunto abierto D, excepto quizás para un número finito de puntos en los que es continua. Si γ_0 y γ_1 son caminos regulares a trozos que, además, son homotópicos en D, se tiene*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Demostración. Consideremos ante todo el caso en que γ_0 y γ_1 son *linealmente* homotópicos. Para cada s de $[0, 1]$ sea

$$\gamma_s(t) = s\gamma_1(t) + (1 - s)\gamma_0(t) \quad \text{si } t \in [a, b].$$

Entonces γ_s es regular a trozos y su gráfica pertenece a D. Escribimos

$$\gamma_s(t) = \gamma_0(t) + s\alpha(t), \text{ en donde } \alpha(t) = \gamma_1(t) - \gamma_0(t),$$

y definimos

$$\varphi(s) = \int_{\gamma_s} f = \int_a^b f[\gamma_s(t)]\, d\gamma_0(t) + s\int_a^b f[\gamma_s(t)]\, d\alpha(t),$$

para $0 \le s \le 1$. Queremos demostrar que $\varphi(0) = \varphi(1)$. Realmente lo que probaremos es que φ es constante en $[0, 1]$.

Utilizamos el teorema 7.40 para calcular $\varphi'(s)$, diferenciando bajo signo de integración. Puesto que

$$\frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t) = \alpha(t),$$

esto nos da

$$\begin{aligned}
\varphi'(s) &= \int_a^b f'[\gamma_s(t)]\alpha(t)\, d\gamma_0(t) + s\int_a^b f'[\gamma_s(t)]\alpha(t)\, d\alpha(t) + \int_a^b f[\gamma_s(t)]\, d\alpha(t) \\
&= \int_a^b \alpha(t)f'[\gamma_s(t)]\, d\gamma_s(t) + \int_a^b f[\gamma_s(t)]\, d\alpha(t) \\
&= \int_a^b \alpha(t)f'[\gamma_s(t)]\gamma_s'(t)\, dt + \int_a^b f[\gamma_s(t)]\, d\alpha(t) \\
&= \int_a^b \alpha(t)\, d\{f[\gamma_s(t)]\} + \int_a^b f[\gamma_s(t)]\, d\alpha(t) \\
&= \alpha(b)f[\gamma_s(b)] - \alpha(a)f[\gamma_s(a)],
\end{aligned}$$

aplicando la fórmula de integración por partes (teorema 7.6). Pero como puede verificar el lector fácilmente, la última expresión se anula, puesto que γ_0 y γ_1 son homotópicas, luego $\varphi'(s) = 0$ para todo s de $[0, 1]$. Por consiguiente φ es constante en $[0, 1]$. Esto demuestra el teorema cuando γ_0 y γ_1 son linealmente homotópicos en D.

Si son homotópicos en D en una homotopía general, interpolamos caminos poligonales α_j tal como hemos descrito en el teorema 16.11. Puesto que cada camino poligonal es regular a trozos, podemos aplicar repetidamente el resultado ya demostrado para obtener

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\alpha_0} f = \int_{\alpha_1} f = \cdots = \int_{\alpha_n} f = \int_{\gamma_1} f.$$

16.8 FORMA GENERAL DEL TEOREMA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY

La forma general del teorema de Cauchy enunciada anteriormente se puede ahora deducir fácilmente de los teoremas 16.9 y 16.12. Recordamos al lector que un *circuito* es un camino cerrado regular a trozos.

Teorema 16.13 (teorema de la integral de Cauchy para circuitos homotópicos a un punto). *Supongamos que f es analítica en un conjunto abierto D, excepto quizás en un número finito de puntos en los que suponemos que f es continua. Entonces, para cada circuito γ homotópico a un punto en D, tenemos*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Demostración. Puesto que γ es homotópico a un punto en D, γ es también homotópico en D a un camino circular δ de radio suficientemente pequeño. Por lo tanto $\int_\gamma f = \int_\delta f$, e $\int_\delta = 0$ en virtud del teorema 16.9.

Definición 16.14. *Un conjunto abierto y conexo D es llamado simplemente conexo si cada camino cerrado en D es homotópico a un punto en D.*

Geométricamente, una región simplemente conexa es la que carece de agujeros. El teorema de Cauchy prueba que, *en una región D simplemente conexa la integral de una función analítica a lo largo de cualquier circuito contenido en D es cero.*

16.9 FÓRMULA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY

El teorema que damos a continuación pone de manifiesto una propiedad muy notable de las funciones analíticas. Relaciona el valor de una función analítica en un punto con los valores en una curva cerrada que no contenga al punto.

Teorema 16.15 (fórmula de la integral de Cauchy). *Supongamos que f es analítca en un conjunto abierto D, y sea γ un circuito cualquiera homotópico a un punto en D. Entonces, para cada punto z de D que no pertenezca a la gráfica de γ tenemos*

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = f(z) \int_\gamma \frac{1}{w - z}\, dw. \tag{6}$$

Demostración. Definimos una nueva función g en D como sigue:

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z. \end{cases}$$

Entonces g es analítica en cada punto $w \neq z$ de D y, en el mismo punto z, g es continua. Aplicando el teorema de la integral de Cauchy a g tenemos $\int_\gamma g = 0$ para cada circuito γ homotópico a un punto de D. Pero si z no pertenece a la gráfica de γ podemos escribir

$$\int_\gamma g = \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw - f(z) \int_\gamma \frac{1}{w - z}\, dw,$$

que prueba (6).

NOTA. La misma demostración prueba que (6) es también válida si existe un subconjunto finito T de D en el que f no es analítica, en el supuesto de que f sea continua en T y de que z no pertenezca a T.

La integral $\int_\gamma (w - z)^{-1}\, dw$ que aparece en (6) juega un papel importante en la teoría de la integración y será estudiada más ampliamente en la próxima sección. Podemos calcular fácilmente su valor para un camino circular.

Ejemplo. Si γ es un camino circular con centro en z y radio r orientado positivamente, podemos escribir $\gamma(\theta) = z + re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Entonces $\gamma'(\theta) = ire^{i\theta} = i\{\gamma(\theta) - z\}$, y obtenemos

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(\theta)}{\gamma(\theta)-z}\, d\theta = \int_0^{2\pi} i\, d\theta = 2\pi i.$$

NOTA. En este caso la fórmula de la integral de Cauchy (6) toma la forma

$$2\pi i f(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Escribiendo de nuevo $\gamma(\theta) = z + re^{i\theta}$, podemos poner la anterior expresión en la forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta. \tag{7}$$

Esto se puede interpretar como un *teorema del valor medio* que expresa el valor de f en el centro de un disco como un promedio de los valores que toma en la frontera del disco. La función f se ha supuesto analítica en la adherencia del disco, excepto quizás para un subconjunto finito en el que es continua.

16.10 NÚMERO DE GIROS DE UN CIRCUITO CON RESPECTO A UN PUNTO

Teorema 16.16. *Sea γ un circuito y sea z un punto que no pertenezca a la gráfica de γ. Entonces existe un entero n (que depende de γ y de z) tal que*

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 2\pi i n. \tag{8}$$

Demostración. Supongamos que γ tiene dominio $[a, b]$. En virtud del teorema 16.7 podemos expresar la integral de (8) como una integral de Riemann,

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)\, dt}{\gamma(t)-z}.$$

Definimos una función compleja en el intervalo $[a, b]$ por medio de la ecuación

$$F(x) = \int_a^x \frac{\gamma'(t)\, dt}{\gamma(t)-z} \qquad \text{si } a \le x \le b.$$

Para demostrar el teorema debemos probar que $F(b) = 2\pi i n$ para un entero n. Ahora bien, F es continua en $[a, b]$ y tiene una derivada

$$F'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z},$$

en cada punto de continuidad de γ'. Por consiguiente la función G definida por

$$G(t) = e^{-F(t)}\{\gamma(t) - z\} \qquad \text{si } t \in [a, b],$$

es también continua en $[a, b]$. Sin embargo, en cada uno de los puntos de continuidad de γ' tenemos

$$G'(t) = e^{-F(t)}\gamma'(t) - F'(t)e^{-F(t)}\{\gamma(t) - z\} = 0.$$

Por consiguiente $G'(t) = 0$ para cada t de $[a, b]$ excepto (quizás) para un número finito de puntos. Por la continuidad, G es constante en todo $[a, b]$. Por lo tanto, $G(b) = G(a)$. En otras palabras, tenemos

$$e^{-F(b)}\{\gamma(b) - z\} = \gamma(a) - z.$$

Dado que $\gamma(b) = \gamma(a) \neq z$, obtenemos

$$e^{-F(b)} = 1,$$

que implica $F(b) = 2\pi i n$, en donde n es un entero. Esto termina la demostración.

Definición 16.17. *Si γ es un circuito cuya gráfica no contiene a z, entonces el entero n definido por* (8) *se llama número de giros (o índice) de γ con respecto a z, y se designa por medio de $n(\gamma, z)$. Así pues,*

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}.$$

NOTA. La fórmula de la integral de Cauchy (6) se puede establecer ahora en la forma

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

El término «número de giros» se usa puesto que $n(\gamma, z)$ da un método matemático preciso para contar el número de veces que el punto $\gamma(t)$ «gira alrededor» del punto z cuando t recorre el intervalo $[a, b]$. Por ejemplo, si γ es un círculo orientado positivamente dado por $\gamma(\theta) = z + re^{i\theta}$, en donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ya hemos visto que el número de giros es 1. Esto está de acuerdo con la interpretación física del hecho de que el punto $\gamma(\theta)$ recorre una vez una circunferencia en sentido positivo cuando θ varía de 0 a 2π. Si θ varía sobre el intervalo $[0, 2\pi n]$, el punto $\gamma(\theta)$ recorre n veces la circunferencia siguiendo la dirección positiva y constituye un cálculo fácil comprobar que el número de giros es n. Por otro lado, si $\delta(\theta) = z + re^{-i\theta}$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi n$, entonces $\delta(\theta)$ recorre n veces la circunferencia en la dirección opuesta y el número de giros es $-n$. Un camino tal como δ se llama camino *orientado negativamente*.

16.11 LA NO ACOTACIÓN DEL CONJUNTO DE PUNTOS CON NÚMERO DE GIROS IGUAL A CERO

Designemos por medio de Γ la gráfica de un circuito γ. Dado que Γ es un conjunto compacto, su complementario $\mathbf{C} - \Gamma$ es un conjunto abierto que, por el teorema 4.44, es la unión de una infinidad numerable de regiones abiertas disjuntas (las componentes de $\mathbf{C} - \Gamma$). Si consideramos las componentes como subconjuntos del plano ampliado $\mathbf{C}^*$, una de ellas y sólo una contiene el punto ideal ∞. En otras palabras, una y sólo una de las componentes de $\mathbf{C} - \Gamma$ está no acotada. El próximo teorema prueba que el número de vueltas $n(\gamma, z)$ es 0 para cada z de la componente no acotada.

Teorema 16.18. *Sea γ un circuito de gráfica Γ. Dividimos el conjunto $\mathbf{C} - \Gamma$ en dos subconjuntos:*

$$E = \{z : n(\gamma, z) = 0\} \qquad e \qquad I = \{z : n(\gamma, z) \neq 0\}.$$

Entonces tanto E como I son abiertos. Además, E está no acotado e I está acotado.

Demostración. Definimos una función g en $\mathbf{C} - \Gamma$ por medio de la fórmula

$$g(z) = n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Por el teorema 7.38, g es continua en $\mathbf{C} - \Gamma$ y, dado que $g(z)$ es siempre un entero, se sigue que g es constante en cada una de las componentes de $\mathbf{C} - \Gamma$. Por consiguiente, tanto E como I son abiertos puesto que cada uno de ellos es unión de componentes de $\mathbf{C} - \Gamma$.

Designemos por U la componente no acotada de $\mathbf{C} - \Gamma$. Si probamos que E contiene a U habremos demostrado que E no está acotado y que

I sí lo está. Sea K una constante tal que $|\gamma(t)| < K$ para todo t del dominio de γ, y sea c un punto de U tal que $|c| > K + \Lambda(\gamma)$ en donde $\Lambda(\gamma)$ es la longitud de γ. Entonces tenemos

$$\left|\frac{1}{\gamma(t) - c}\right| \leq \frac{1}{|c| - |\gamma(t)|} < \frac{1}{|c| - K}.$$

Acotando la integral que nos da $n(\gamma, c)$, por medio del teorema 16.6 obtenemos

$$0 \leq |g(c)| \leq \frac{\Lambda(\gamma)}{|c| - K} < 1.$$

Dado que $g(c)$ es un entero debemos tener $g(c) = 0$, luego g toma el valor 0 en U. Por lo tanto E contiene al punto c, y por consiguiente E contiene a todos los puntos de U.

Existe un teorema general, llamado el *teorema de la curva de Jordan*, que establece que si Γ es una curva de Jordan (curva cerrada simple) descrita por γ, entonces cada uno de los conjuntos E e I del teorema 16.18 es conexo. En otras palabras, una curva de Jordan Γ divide a $\mathbf{C} - \Gamma$ *exactamente* en *dos* componentes E e I que tienen a Γ por frontera común. El conjunto I se llama la *región interior* (o *interior*) de Γ, y se dice que sus puntos están *dentro* de Γ. El conjunto E se llama la *región exterior* (o *exterior*) de Γ, y se dice que sus puntos están *fuera* de Γ.

A pesar de que el teorema de la curva de Jordan es intuitivamente evidente y es fácil de demostrar para cierto tipo familiar de curvas de Jordan tales como círculos, triángulos y rectángulos, la demostración para una curva de Jordan arbitraria no es sencilla. (Pueden hallarse demostraciones en las referencias 16.3 y 16.5.)

No necesitaremos en absoluto el teorema de la curva de Jordan para demostrar los teoremas de este capítulo. Sin embargo, el lector debe observar que las curvas de Jordan que intervienen en las aplicaciones ordinarias de la teoría de la integración compleja se hallan usualmente constituidas de un número finito de segmentos rectilíneos y arcos circulares, y para tales ejemplos es, en general, totalmente obvio que $\mathbf{C} - \Gamma$ consta exactamente de dos componentes. Para los puntos z del interior de tales curvas el número de giros $n(\gamma, z)$ es $+1$ o -1 ya que γ es homotópico en I a un camino circular δ con centro en z, luego $n(\gamma, z) = n(\delta, z)$, y $n(\delta, z)$ es $+1$ o -1 según que el camino circular esté orientado positiva o negativamente. Por esta razón decimos que un circuito de Jordan γ está *orientado positivamente* si, para algún z del interior de Γ, tenemos $n(\gamma, z) = +1$, y *orientado negativamente* si $n(\gamma, z) = -1$.

16.12 FUNCIONES ANALÍTICAS DEFINIDAS POR INTEGRALES DE CONTORNO

La fórmula de la integral de Cauchy, que establece

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw,$$

tiene muchas consecuencias importantes. Algunas de ellas se deducen del próximo teorema que maneja integrales de un tipo ligeramente más general en las que el integrando $f(w)/(w - z)$ se substituye por $\varphi(w)/(w - z)$, en donde φ sólo es continua y no necesariamente analítica, y γ es un camino rectificable y no necesariamente un circuito.

Teorema 16.19. *Sea γ un camino rectificable de gráfica Γ. Sea φ una función compleja continua en Γ, y sea f definida en $\mathbf{C} - \Gamma$ por la ecuación*

$$f(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\,dw \qquad si\ z \notin \Gamma.$$

Entonces f posee las siguientes propiedades:

a) *Para cada punto a de $\mathbf{C} - \Gamma$, f posee un desarrollo en serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n, \tag{9}$$

en donde

$$c_n = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - a)^{n+1}}\,dw \qquad para\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

b) *La serie de* (a) *posee un radio de convergencia positivo $\geq R$, en donde*

$$R = \inf\{|w - a| : w \in \Gamma\}. \tag{11}$$

c) *Para cada n, la función f posee derivada de orden n en $\mathbf{C} - \Gamma$ dada por*

$$f^{(n)}(z) = n!\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}}\,dw \qquad si\ z \notin \Gamma. \tag{12}$$

Demostración. Obsérvese, ante todo, que el número R definido por medio de (11) es positivo puesto que la función $g(w) = |w - a|$ tiene un mínimo en el

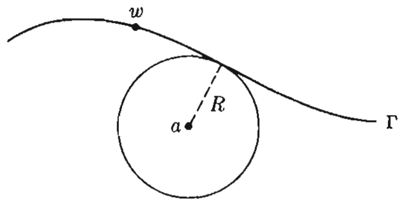


Figura 16.6

conjunto compacto Γ, y este mínimo no es cero ya que $a \notin \Gamma$. Entonces, R es la distancia de a al punto más próximo de Γ. (Ver fig. 16.6.)

Para demostrar (a) consideremos la identidad

$$\frac{1}{1 - t} = \sum_{n=0}^{k} t^n + \frac{t^{k+1}}{1 - t}, \tag{13}$$

válida para todo $t \neq 1$. Tomemos $t = (z - a)/(w - a)$ en donde $|z - a| < R$ y $w \in \Gamma$. Entonces tenemos $1/(1 - t) = (w - a)/(w - z)$. Multiplicando (13) por $\varphi(w)/(w - a)$ e integrando a lo largo de γ, obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\,dw \\ &= \sum_{n=0}^{k}(z - a)^n \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - a)^{n+1}}\,dw + \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\left(\frac{z - a}{w - a}\right)^{k+1} dw \\ &= \sum_{n=0}^{k} c_n(z - a)^n + E_k, \end{aligned}$$

en donde c_n viene dada por (10) y E_k por

$$E_k = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\left(\frac{z - a}{w - a}\right)^{k+1} dw. \tag{14}$$

Vemos ahora, acotando el integrando de (14), que $E_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Tenemos

$$\left|\frac{z - a}{w - a}\right| \leq \frac{|z - a|}{R}$$

y

$$\frac{1}{|w - z|} = \frac{1}{|w - a + a - z|} \leq \frac{1}{R - |a - z|}.$$

Sea $M = \max \{|\varphi(w)| : w \in \Gamma\}$, y sea $\Lambda(\gamma)$ la longitud de γ. Entonces (14) nos da

$$|E_k| \le \frac{M\Lambda(\gamma)}{R - |a - z|}\left(\frac{|z - a|}{R}\right)^{k+1}.$$

Puesto que $|z - a| < R$ obtenemos que $E_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Ello prueba (a) y (b).

Aplicando el teorema 9.23 a (9) vemos que f posee derivadas de todos los órdenes en el disco $B(a; R)$ y que $f^{(n)}(a) = n!c_n$. Puesto que a es un punto arbitrario de $\mathbf{C} - \Gamma$, (c) queda demostrado.

NOTA. La serie de (9) puede tener un radio de convergencia mayor que R, en cuyo caso puede o no representar a f en los puntos más distantes.

16.13 DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS

Una combinación de la fórmula de la integral de Cauchy con el teorema 16.19 nos proporciona:

Teorema 16.20. *Supongamos que f es analítica en un conjunto abierto S de $\mathbf{C}$, y sea a un punto de S. Entonces existen todas las derivadas $f^{(n)}(a)$, y f se puede representar por medio de la serie de potencias convergente*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n, \tag{15}$$

en cada disco $B(a; R)$ cuya adherencia esté en S. Además, para cada $n \ge 0$ tenemos

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}}\,dw, \tag{16}$$

en donde γ es un camino circular de centro en a y radio $r < R$, orientado positivamente.

NOTA. La serie dada en (15) se conoce con el nombre de *desarrollo de Taylor* de f en torno de a. La ecuación dada en (16) se llama *fórmula de la integral de Cauchy* para $f^{(n)}(a)$.

Demostración. Sea γ un circuito homotópico a un punto de S, y sea Γ la gráfica de γ. Definimos g en $\mathbf{C} - \Gamma$ por medio de la ecuación

$$g(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw \qquad \text{si } z \notin \Gamma.$$

Si $z \in B(a; R)$, la fórmula de la integral de Cauchy nos dice que $g(z) = 2\pi i n(\gamma, z) f(z)$. Luego,

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw \qquad \text{si } |z - a| < R.$$

Sea ahora $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$, en donde $|z - a| < r < R$ y $0 \le \theta \le 2\pi$. Entonces $n(\gamma, z) = 1$, luego aplicando el teorema 16.19 a $\varphi(w) = f(w)/(2\pi i)$ obtenemos una representación en serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n,$$

convergente para $|z - a| < R$, en donde $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Luego la parte (c) del teorema 16.19 da (16).

Los teoremas 16.20 y 9.23 considerados simultáneamente nos dicen que una condición necesaria y suficiente para que una función compleja f sea analítica en un punto a es que f se pueda representar como serie de potencias en un cierto entorno de a. Cuando tal serie de potencias existe, su radio de convergencia es por lo menos tan grande como el radio de cualquier disco $B(a)$ contenido en la región de analiticidad de f. Dado que el círculo de convergencia no puede contener en su interior puntos en los que la analiticidad de f no se verifique, se deduce que el radio de convergencia es exactamente igual a la distancia de a al punto más próximo en el que f deja de ser analítica.

Esta observación nos da un conocimiento profundo acerca de los desarrollos en serie de potencias de las funciones reales de variable real. Por ejemplo, sea $f(x) = 1/(1 + x^2)$ si x es real. Esta función está definida en todo $\mathbf{R}^1$ y tiene derivada de cualquier orden en cada uno de los puntos de $\mathbf{R}^1$. Además, admite un desarrollo en serie de potencias en torno al origen, a saber,

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

No obstante, esta representación es válida sólo en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Desde el punto de vista de la teoría de la variable real, no hay nada en el comportamiento de f que explique este hecho. Pero cuando examinamos la situación en el plano complejo, vemos al momento que la función $f(z) = 1/(1 + z^2)$ es analítica en todo $\mathbf{C}$ excepto en los puntos $z = \pm i$. Por consiguiente el radio de convergencia del desarrollo en serie de potencias en torno del 0 debe ser 1, que es la distancia de 0 a i y a $-i$.

Ejemplos. Los siguientes desarrollos en serie de potencias son válidos para todo z en $\mathbf{C}$:

a) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, b) $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

c) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

16.14 DESIGUALDADES DE CAUCHY. TEOREMA DE LIOUVILLE

Si f es analítica en un disco cerrado $B(a; R)$, la fórmula de la integral de Cauchy (16) prueba que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw,$$

en donde γ es un camino circular con centro en a y radio $r < R$, orientado positivamente. Podemos escribir $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ y ponerla en la forma

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta. \tag{17}$$

Esta fórmula expresa la n-ésima derivada en a como promedio ponderado de los valores de f en un círculo con centro en a. El caso especial $n = 0$ fue obtenido anteriormente en la sección 16.9.

Sea ahora $M(r)$ el valor máximo de $|f|$ sobre la gráfica de γ. Considerando la integral dada en (17), obtenemos inmediatamente las *desigualdades de Cauchy:*

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{M(r)n!}{r^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

El próximo teorema es una consecuencia fácil del caso $n = 1$.

Teorema 16.21 (teorema de Liouville). *Si f es analítica en todo $\mathbf{C}$ y acotada en $\mathbf{C}$, entonces f es constante.*

Demostración. Supongamos $|f(z)| \le M$ para todo z de $\mathbf{C}$. La desigualdad de Cauchy con $n = 1$ nos da $|f'(a)| \le M/r$ para cada $r > 0$. Si hacemos que $r \to +\infty$, obtenemos $f'(a) = 0$ para todo a de $\mathbf{C}$ y entonces, por el teorema 5.23, f es constante.

NOTA. Una función analítica en todo $\mathbf{C}$ se llama una función *entera.* Ejemplos de ellas son las funciones polinómicas, el seno y el coseno y la función exponencial. El teorema de Liouville establece que *toda función entera acotada es constante.*

El teorema de Liouville nos conduce a una demostración simple del teorema fundamental del Álgebra.

Teorema 16.22 (teorema fundamental del Álgebra). *Todo polinomio de grado $n \ge 1$ tiene un cero.*

Demostración. Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, en donde $n \ge 1$ y $a_n \ne 0$. Suponemos que P no tiene ningún cero y probamos que P es constante. Sea $f(z) = 1/P(z)$. Entonces f es analítica en todo $\mathbf{C}$ ya que P carece de ceros. Además, puesto que

$$P(z) = z^n\left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n\right),$$

vemos que $|P(z)| \to +\infty$ cuando $|z| \to +\infty$, luego $f(z) \to 0$ cuando $|z| \to +\infty$. Por consiguiente f está acotada en $\mathbf{C}$ y, por el teorema de Liouville, f y por lo tanto P, son constantes.

16.15 SEPARACIÓN DE LOS CEROS DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA

Si f es analítica en a y si $f(a) = 0$, el desarrollo de Taylor de f en torno de a tiene término constante igual a cero y por lo tanto toma la forma siguiente:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Esto es válido para cada z de un cierto disco $B(a)$. Si f es idénticamente igual a cero en este disco [esto es, si $f(z) = 0$ para cada z de $B(a)$], entonces cada $c_n = 0$, ya que $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Si f no es idénticamente cero en este entorno, existirá un primer coeficiente no nulo c_k en el desarrollo en serie de potencias, en cuyo caso el punto a se llama un *cero de orden k.* Ahora demostraremos que existe un entorno de a que no contiene otros ceros de f. Esta propiedad se describe diciendo que los ceros de una función analítica son *aislados.*

Teorema 16.23. *Supongamos que f es analítica en un conjunto abierto S de $\mathbf{C}$. Supongamos que $f(a) = 0$ para cierto punto a de S y que f no es idénticamente nula en ningún entorno de a. Entonces existe un disco $B(a)$ en el que f no posee ningún otro cero.*

Demostración. El desarrollo de Taylor en torno de a nos da $f(z) = (z - a)^k g(z)$, en donde $k \geq 1$,

$$g(z) = c_k + c_{k+1}(z - a) + \cdots,$$

y

$$g(a) = c_k \neq 0.$$

Ya que g es continua en a, existe un disco $B(a) \subseteq S$ en el que g no se anula. Por lo tanto, $f(z) \neq 0$ para todo $z \neq a$ en $B(a)$.

Este teorema tiene algunas consecuencias importantes. Por ejemplo, podemos utilizarlo para demostrar que una función que es analítica en una región abierta S no puede ser nula en ningún subconjunto abierto no vacío de S sin ser idénticamente nula en todo S. Recordemos que una región abierta es un conjunto abierto *conexo.* (Ver las definiciones 4.34 y 4.45.)

Teorema 16.24. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de $\mathbf{C}$. Designemos por medio de A el conjunto de los puntos z de S para los que existe un disco $B(z)$ en el que f es idénticamente cero, y sea $B = S - A$. Entonces uno de los dos conjuntos A o B es vacío y el otro es todo S.*

Demostración. Tenemos $S = A \cup B$, en donde A y B son conjuntos disjuntos. El conjunto A es abierto en virtud de su misma definición. Si demostramos que B también es abierto, se seguirá de la conexión de S que uno por lo menos de los conjuntos A o B es vacío.

Para demostrar que B es abierto, sea a un punto de B y consideremos las dos posibilidades siguientes: $f(a) \neq 0$, $f(a) = 0$. Si $f(a) \neq 0$, existe un disco $B(a) \subseteq S$ en el que f no se anula. Por lo tanto, cada uno de los puntos de $B(a)$ deberá pertenecer a B. Luego a es un punto interior de B si $f(a) \neq 0$. Y si $f(a) = 0$, el teorema 16.23 nos suministra un disco $B(a)$ que no contiene otros ceros de f. Esto significa que $B(a) \subseteq B$. Luego, tanto en un caso como en el otro, a es un punto interior de B. Por consiguiente, B es abierto y uno de los dos conjuntos A o B debe ser vacío.

16.16 EL TEOREMA DE IDENTIDAD PARA FUNCIONES ANALÍTICAS

Teorema 16.25. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de $\mathbf{C}$. Sea T un subconjunto de S que tenga un punto de acumulación a en S. Si $f(z) = 0$ para cada z de T, entonces $f(z) = 0$ para todo z de S.*

Demostración. Existe una sucesión **infinita** $\{z_n\}$, cuyos términos son puntos de T, tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Por continuidad, $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Probaremos ahora que existe un entorno de a en el que f es idénticamente nula. Supongamos que no existe dicho entorno. Entonces el teorema 16.23 nos dice que debe existir un disco $B(a)$ en el que $f(z) \neq 0$ si $z \neq a$. Pero esto es imposible, ya que cada disco $B(a)$ contiene puntos de T distintos de a. Por consiguiente debe existir un entorno de a en el que f se anule idénticamente. Por lo tanto, el conjunto A del teorema 16.24 no puede ser vacío. Luego $A = S$, y esto significa que $f(z) = 0$ para todo z de S.

Como corolario tenemos el siguiente resultado importante, llamado a veces el *teorema de identidad para funciones analíticas:*

Teorema 16.26. *Sean f y g analíticas en una región abierta S de $\mathbf{C}$. Si T es un subconjunto de S que posea un punto de acumulación a en S, y si $f(z) = g(z)$ para cada z de T, entonces $f(z) = g(z)$ para todo z de S.*

Demostración. Apliquemos el teorema 16.25 a $f - g$.

16.17 MÓDULOS MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA

El valor absoluto o módulo $|f|$ de una función analítica f es una función real no negativa. Los teoremas de esta sección se refieren a los máximos y mínimos de $|f|$.

Teorema 16.27 (principio del máximo local del módulo). *Supongamos que f es analítica y que no es constante en una región abierta S. Entonces $|f|$ carece de máximos locales en S. Esto es, cada disco $B(a; R)$ de S contiene puntos z tales que $|f(z)| > |f(a)|$.*

Demostración. Supongamos que exista un disco $B(a; R)$ de S en el que $|f(z)| \leq |f(a)|$ y veamos entonces que f es constante en S. Consideremos el disco concéntrico $B(a;\ r)$ con $0 < r \leq R$. De la fórmula de la integral de Cauchy, tal como se halla expresada en (7), tenemos

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|\, d\theta. \tag{19}$$

Ahora bien, $|f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)|$ para todo θ. Vemos a continuación que no es posible que se dé la desigualdad *estricta* $|f(a + re^{i\theta})| < |f(a)|$ para ningún θ. En otro caso, por continuidad tendríamos $|f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)| - \varepsilon$ para cierto $\varepsilon > 0$ y para todo θ de un cierto subintervalo I de $[0, 2\pi]$ de longitud positiva, que llamaremos h. Sea $J = [0, 2\pi] - I$. Entonces J tiene medida $2\pi - h$, y (19) nos da

$$\begin{aligned} 2\pi|f(a)| &\leq \int_I |f(a + re^{i\theta})|\, d\theta + \int_J |f(a + re^{i\theta})|\, d\theta \\ &\leq h\{|f(a)| - \varepsilon\} + (2\pi - h)\,|f(a)| = 2\pi\,|f(a)| - h\varepsilon < 2\pi\,|f(a)|. \end{aligned}$$

Esto nos lleva a la contradicción $|f(a)| < |f(a)|$. Esto prueba que, si $r \leq R$, no es posible que se dé la desigualdad estricta $|f(a + re^{i\theta})| < |f(a)|$ para ningún θ. Luego $|f(z)| = |f(a)|$ para todo z de $B(a;\ R)$. Por consiguiente $|f|$ es constante en este disco y, por el teorema 5.23, f es asimismo constante en este disco. Por el teorema de identidad, f es constante en S.

Teorema 16.28 (principio del máximo absoluto del módulo). *Sea T un subconjunto compacto del plano complejo* **C**. *Supongamos que f es continua en T y analítica en el interior de T. Entonces el máximo absoluto de $|f|$ en T se alcanza en ∂T, frontera de T.*

Demostración. Dado que T es compacto, $|f|$ alcanza su máximo absoluto en algún punto de T, llamémosle a. Si $a \in \partial T$ no hay nada que demostrar. Si $a \in \operatorname{int} T$, sea S la componente del int T que contiene a a. Puesto que $|f|$ tiene un máximo local en a, el teorma 16.27 implica que f es constante en S. Por continuidad, f es constante en $\partial S \subseteq T$, luego el valor máximo, $|f(a)|$, se alcanza en ∂S. Pero $\partial S \subseteq \partial T$ (¿por qué?) implica que el máximo es alcanzado en ∂T.

Teorema 16.29 (principio del módulo mínimo). *Supongamos que f es analítica y que no es constante en una región abierta S. Si $|f|$ tiene un mínimo local en S en un punto a, entonces $f(a) = 0$.*

Demostración. Si $f(a) \neq 0$ aplicamos el teorema 16.27 a la función $g = 1/f$. Entonces g es analítica en un cierto disco abierto $B(a;\ R)$ y $|g|$ tiene un máximo local en a. Por consiguiente g y también f son constantes en este disco y por lo tanto en S, lo cual contradice la hipótesis.

16.18 EL TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA

Las funciones analíticas no constantes son aplicaciones abiertas; esto es, aplican conjuntos abiertos en conjuntos abiertos. Demostramos esto basándonos en el principio del módulo mínimo.

Teorema 16.30 (teorema de la aplicación abierta). *Si f es analítica y no es constante en una región abierta S, entonces f es abierta.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de S. Probaremos que $f(A)$ es abierto. Sea b un elemento de $f(A)$ y escribamos $b = f(a)$, en donde $a \in A$. Observemos ante todo que a es un punto aislado de la imagen inversa $f^{-1}(\{b\})$. (Si no, por el teorema de la identidad f sería constante en S.) Luego existe un disco $B = B(a;\ r)$ cuya adherencia $\bar{B}$ está contenida en A y no contiene puntos de $f^{-1}(\{b\})$ si exceptuamos a a. Puesto que $f(\bar{B}) \subseteq f(A)$ la demostración quedará terminada si probamos que $f(\bar{B})$ contiene un disco centrado en b.

Designemos por medio de ∂B la frontera de B, $\partial B = \{z : |z - a| = r\}$. Entonces $f(\partial B)$ es un conjunto compacto que no contiene a b. Entonces el número m definido por

$$m = \inf\{|f(z) - b| : z \in \partial B\},$$

es positivo. Probaremos que $f(\bar{B})$ contiene al disco $B(b;\ m/2)$. Para ello, tomamos un punto w de $B(b;\ m/2)$ y vemos que $w = f(z_0)$ para un z_0 de $\bar{B}$.

Sea $g(z) = f(z) - w$ si $z \in \bar{B}$. Probaremos que $g(z_0) = 0$ para un cierto z_0 de $\bar{B}$. Dado que $|g|$ es continua en $\bar{B}$ y, puesto que $\bar{B}$ es compacto, existe un punto z_0 de $\bar{B}$ en el que $|g|$ alcanza su mínimo. Como $a \in \bar{B}$, tenemos

$$|g(z_0)| \leq |g(a)| = |f(a) - w| = |b - w| < \frac{m}{2}.$$

Pero si $z \in \partial B$, tenemos

$$|g(z)| = |f(z) - b + b - w| \geq |f(z) - b| - |w - b| > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}.$$

Luego $z_0 \notin \partial B$, por lo que z_0 es un punto interior de $\bar{B}$. En otras palabras, $|g|$ tiene un mínimo local en z_0. Pero g es analítica y no constante en B, luego el principio del módulo mínimo prueba que $g(z_0) = 0$ y la demostración queda terminada.

16.19 DESARROLLOS DE LAURENT PARA FUNCIONES ANALÍTICAS EN UN ANILLO

Consideremos dos funciones f_1 y g_1, ambas analíticas en un punto a, con $g_1(a) = 0$. Tenemos entonces los siguientes desarrollos en series de potencias

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^n, \qquad \text{para } |z-a| < r_1,$$

y

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad \text{para } |z-a| < r_2. \tag{20}$$

Sea f_2 la función compuesta dada por

$$f_2(z) = g_1\left(\frac{1}{z-a} + a\right).$$

Entonces f_2 está definida y es analítica en la región $|z-a| > r_1$ y se halla representada en dicha región por medio de la serie convergente

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}, \qquad \text{para } |z-a| > r_1. \tag{21}$$

Ahora si $r_1 < r_2$, las series que aparecen en (20) y (21) tendrán en común una cierta región de convergencia, a saber el conjunto de los z para los que

$$r_1 < |z-a| < r_2.$$

En esta región, el interior del anillo $A(a;\ r_1, r_2)$, tanto f_1 como f_2 son analíticas y su suma $f_1 + f_2$ viene dada por

$$f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}.$$

La suma del segundo miembro se escribe más brevemente por medio de

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

en donde $c_{-n} = b_n$ para $n = 1, 2, \ldots$ Una serie de potencias de este tipo, formada de potencias positivas y negativas de $z - a$, se llama *serie de Laurent*. Se dice que es convergente si lo son su parte positiva y su parte negativa, separadamente.

Cada serie convergente de Laurent representa una función analítica en el interior del anillo $A(a;\ r_1, r_2)$. Probaremos ahora que, recíprocamente, cada función f, analítica en un anillo, admite una representación en el interior del anillo por medio de una serie convergente de Laurent.

Teorema 16.31. *Supongamos que f es analítica en el anillo $A(a;\ r_1, r_2)$. Entonces para cada punto interior z de este anillo tenemos*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \tag{22}$$

en donde

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad y \qquad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}.$$

Los coeficientes vienen dados por las fórmulas

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{23}$$

en donde γ es un camino circular de centro en a con radio r, y $r_1 < r < r_2$, orientado positivamente. La función f_1 (llamada la parte regular de f en a) es analítica en el disco $B(a;\ r_2)$. La función f_2 (llamada la parte principal de f en a) es analítica fuera de la adherencia del disco $B(a;\ r_1)$.

Demostración. Elegimos un punto interior z del anillo, fijamos el punto z y definimos una función g en $A(a;\ r_1, r_2)$ como sigue:

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z, \\ f'(z) & \text{si } w = z. \end{cases}$$

Entonces g es analítica en w si $w \neq z$ y g es continua en z. Sea

$$\varphi(r) = \int_{\gamma_r} g(w)\, dw,$$

en donde γ_r es un camino circular con centro en a y radio r, con $r_1 \leq r \leq r_2$, orientados positivamente. Por el teorema 16.8, $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$, luego

$$\int_{\gamma_1} g(w)\, dw = \int_{\gamma_2} g(w)\, dw, \tag{24}$$

en donde $\gamma_1 = \gamma_{r_1}$ y $\gamma_2 = \gamma_{r_2}$. Dado que z no pertenece ni a la gráfica de γ_1 ni a la de γ_2, en cada una de las integrales podemos escribir

$$g(w) = \frac{f(w)}{w - z} - \frac{f(z)}{w - z}.$$

Substituyendo en (24) y trasponiendo términos, obtenemos

$$f(z)\left\{\int_{\gamma_2} \frac{1}{w - z}\, dw - \int_{\gamma_1} \frac{1}{w - z}\, dw\right\} = \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw. \tag{25}$$

Pero $\int_{\gamma_1} (w - z)^{-1}\, dw = 0$ puesto que el integrando es analítico en el disco $B(a;\, r_1)$, e $\int_{\gamma_2} (w - z)^{-1}\, dw = 2\pi i$ ya que $n(\gamma_2, z) = 1$. Por consiguiente, (25) nos da la ecuación

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

en donde

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \qquad \text{y} \qquad f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Por el teorema 16.19, f_1 es analítica en el disco $B(a;\, r_2)$ y entonces tenemos un desarrollo de Taylor

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n \qquad \text{para } |z - a| < r_2,$$

en donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}}\, dw. \tag{26}$$

Además, por el teorema 16.8, el camino γ_2 se puede substituir por cualquier camino γ_r siempre que r pertenezca al intervalo $r_1 \le r \le r_2$.

Para obtener un desarrollo en serie para $f_2(z)$, argüimos como en la demostración del teorema 16.19, utilizando la identidad (13) con $t = (w - a)/(z - a)$. Esto nos da

$$\frac{1}{1 - (w - a)/(z - a)} = \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{w - a}{z - a}\right)^n + \left(\frac{w - a}{z - a}\right)^{k+1} \left(\frac{z - a}{z - w}\right). \tag{27}$$

Si w está en la gráfica de γ_1, tenemos $|w - a| = r_1 < |z - a|$, luego $|t| < 1$. Multiplicamos ahora (27) por $-f(w)/(z - a)$, integrando a lo largo de γ_1, y haciendo $k \to \infty$ obtenemos

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - a)^{-n} \qquad \text{para } |z - a| > r_1$$

en donde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w - a)^{1-n}}\, dw. \tag{28}$$

En virtud del teorema 16.8, el camino γ_1 se puede substituir por el camino γ_r para todo r de $[r_1, r_2]$. Si tomamos el mismo camino γ_r tanto en (28) como en (26) y si utilizamos c_{-n} para designar b_n, es posible combinar ambas fórmulas en una sola tal como indicábamos en (23). Como sea que z designaba un punto arbitrario del interior del anillo, la demostración está terminada.

NOTA. La fórmula (23) prueba que una función puede tener, a lo sumo, un desarrollo de Laurent en un anillo dado.

16.20 SINGULARIDADES AISLADAS

Un disco $B(a;\, r)$ menos su centro, esto es, el conjunto $B(a;\, r) - \{a\}$, se llama un *entorno perforado* de a y se designa por medio de $B'(a;\, r)$ o $B'(a)$.

Definición 16.32. *Un punto a se llama una singularidad aislada de f si*

a) *f es analítica en un entorno perforado de a,*

y

b) *f no es analítica en a.*

NOTA. No es preciso que f esté definida en a.

Si a es una singularidad aislada de f, existe un anillo $A(a;\, r_1, r_2)$ en el que f es analítica. Luego f admite un desarrollo en serie de Laurent, determinado de forma unívoca, a saber:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - a)^{-n}. \tag{29}$$

Dado que el radio interior r_1 puede ser tan pequeño como se quiera, la expresión dada en (29) es válida en el entorno perforado $B'(a;\, r_2)$. La singularidad a

se clasifica en uno de los tres tipos siguientes (según la forma de la parte principal):

Si en (29) no aparecen potencias negativas, esto es, si $c_{-n} = 0$ para cada $n = 1, 2, \ldots$, el punto a se llama *singularidad evitable.* En este caso, $f(z) \to c_0$ cuando $z \to a$ y la singularidad puede evitarse definiendo f en a por medio de $f(a) = c_0$. (Ver el ejemplo 1 que sigue.)

Si sólo aparece un número finito de potencias negativas, esto es si $c_{-n} \neq 0$ para algún n pero $c_{-m} = 0$ para todo $m > n$, el punto a se llama *polo* de orden n. En este caso, la parte principal se reduce a una suma finita, a saber

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}.$$

Un polo de orden 1 se llama usualmente polo *simple.* Si existe un polo en a, entonces $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to a$.

Finalmente, si $c_{-n} \neq 0$ para infinitos valores de n, el punto a se llama *singularidad esencial.* En este caso, $f(z)$ carece de límite cuando $z \to a$.

Ejemplo 1. *Singularidad evitable.* Sea $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$. Esta función es analítica en todo punto excepto en el 0. (Es discontinua en el 0, ya que $(\operatorname{sen} z)/z \to 1$ cuando $z \to 0$.) El desarrollo de Laurent en torno de 0 tiene la forma

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - + \cdots$$

Puesto que no aparecen potencias negativas de z, el punto 0 es una singularidad evitable. Si volvemos a definir f de forma que tome el valor 1 en 0, la función modificada es analítica en 0.

Ejemplo 2. *Polo.* Sea $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z^5$ si $z \neq 0$. El desarrollo de Laurent en torno del 0 es

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^5} = z^{-4} - \frac{1}{3!} z^{-2} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} z^2 + \cdots$$

En este caso, el punto 0 es un polo de orden 4. Obsérvese que no se ha dicho nada acerca del valor de f *en* 0.

Ejempo 3. *Singularidad esencial.* Sea $f(z) = e^{1/z}$ si $z \neq 0$. El punto 0 es una singularidad esencial, ya que

$$e^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \cdots + \frac{1}{n!} z^{-n} + \cdots$$

Teorema 16.33. *Supongamos que f es analítica en una región abierta S de* **C** *y definamos g por la ecuación $g(z) = 1/f(z)$ si $f(z) \neq 0$. Entonces f tiene un cero de orden k en un punto a de S si, y sólo si, g tiene un polo de orden k en a.*

Demostración. Si f tiene un cero de orden k en a, existe un entorno perforado $B'(a)$ en el que f no se anula. En el entorno $B(a)$ tenemos $f(z) = (z-a)^k h(z)$, en donde $h(z) \neq 0$ si $z \in B(a)$. Luego $1/h$ es analítica en $B(a)$ y posee un desarrollo

$$\frac{1}{h(z)} = b_0 + b_1(z-a) + \cdots, \text{ en donde } b_0 = \frac{1}{h(a)} \neq 0$$

Por consiguiente, si $z \in B'(a)$, tenemos

$$g(z) = \frac{1}{(z-a)^k h(z)} = \frac{b_0}{(z-a)^k} + \frac{b_1}{(z-a)^{k-1}} + \cdots,$$

y por lo tanto a es un polo de orden k de g. El recíproco se demuestra análogamente.

16.21 RESIDUO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO SINGULAR AISLADO

Si a es un punto singular aislado de f, existe un entorno perforado $B'(a)$ en el que f admite un desarrollo de Laurent, a saber

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}. \tag{30}$$

El coeficiente c_{-1} que multiplica a $(z-a)^{-1}$ se llama *residuo* de f en a y se designa por medio del símbolo

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

La fórmula (23) nos dice que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z), \tag{31}$$

si γ es un camino circular con centro en a, orientado positivamente y cuya gráfica esté contenida en el disco $B(a)$.

En muchos casos es relativamente fácil calcular el residuo en un punto sin necesidad de utilizar la integración. Por ejemplo, si a es un polo simple, podemos utilizar la fórmula (30) a fin de obtener

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} (z - a)f(z). \tag{32}$$

Análogamente, si a es un polo de orden 2, es fácil probar que

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = g'(a), \text{ en donde } g(z) = (z - a)^2 f(z).$$

En casos como éstos, en los que el residuo se puede obtener muy simplemente, (31) nos da un método simple para calcular las integrales de contorno alrededor de circuitos.

Cauchy fue el primero en explotar esta idea y la desarrolló obteniendo un poderoso método conocido como *cálculo de residuos*. Está fundamentado en el *teorema de Cauchy del residuo*, que es una generalización de (31).

16.22 TEOREMA DE CAUCHY DEL RESIDUO

Teorema 16.34. *Sea f analítica en una región abierta S excepto para un número finito de singularidades aisladas $z_1, \ldots, z_n$ de S. Sea γ un circuito homotópico a un punto de S, y supongamos que ninguna de las singularidades pertenece a la gráfica de γ. Entonces se tiene*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, z_k) \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \tag{33}$$

en donde $n(\gamma, z_k)$ es el número de giros de γ con respecto a z_k.

Demostración. La demostración está basada en la siguiente fórmula, en la que m designa un entero (positivo, negativo o cero):

$$\int_\gamma (z - z_k)^m\,dz = \begin{cases} 2\pi i n(\gamma, z_k) & \text{si } m = -1, \\ 0 & \text{si } m \neq -1. \end{cases} \tag{34}$$

La fórmula para $m = -1$ es, precisamente, la definición del número de giros $n(\gamma, z_k)$. Sea $[a, b]$ el dominio de γ. Si $m \neq -1$, sea $g(t) = \{\gamma(t) - z_k\}^{m+1}$ para t de $[a, b]$. Entonces tenemos

$$\int_\gamma (z - z_k)^m\,dz = \int_a^b \{\gamma(t) - z_k\}^m \gamma'(t)\,dt = \frac{1}{m+1}\int_a^b g'(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{m+1}\{g(b) - g(a)\} = 0,$$

ya que $g(b) = g(a)$. Esto prueba (34).

Para demostrar el teorema del residuo, sea f_k la parte principal de f en el punto z_k. Por el teorema 16.31, f_k es analítica en todo $\mathbf{C}$ excepto en z_k. Por consiguiente, $f - f_1$ es analítica en S excepto en $z_2, \ldots, z_n$. Análogamente, $f - f_1 - f_2$ es analítica en S excepto en $z_3, \ldots, z_n$, y, por inducción, obtenemos que $f - \sum_{k=1}^n f_k$ es analítica en todo S. Por consiguiente, por el teorema de la integral de Cauchy, $\int_\gamma (f - \sum_{k=1}^n f_k) = 0$, o

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma f_k.$$

Ahora expresamos f_k como una serie de Laurent en torno de z_k e integramos esta serie término a término, y obtenemos (33), utilizando (34) y la definición de residuo.

NOTA. Si γ es una curva de Jordan orientada positivamente con gráfica Γ, entonces $n(\gamma, z_k) = 1$ para cada z_k interior a Γ, y $n(\gamma, z_k) = 0$ para cada z_k del exterior de Γ. En este caso, la integral de f a lo largo de γ es $2\pi i$ veces la suma de los residuos de las singularidades que se hallan en el interior de Γ.

Algunas de las aplicaciones del teorema de Cauchy del residuo se dan en las secciones que siguen.

16.23 NÚMEROS DE CEROS Y DE POLOS EN UNA REGIÓN

Si f es analítica o bien si tiene un polo en a, y si f no es idénticamente 0, el desarrollo de Laurent en torno de a tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

en donde $c_m \neq 0$. Si $m > 0$ existe un cero de orden m en a; si $m < 0$ existe un polo de orden $-m$ en a, si $m = 0$ no existe ni cero ni polo en a.

NOTA. Se usa también $m(f; a)$ para poner de manifiesto que m depende tanto de f como de a.

Teorema 16.35. *Sea f una función, no idénticamente nula, analítica en una región abierta S, excepto quizás en un número finito de polos. Sea γ un circuito que sea homotópico a un punto en S y cuya gráfica no contenga ni ceros ni polos de f. Entonces tenemos*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{a\in S} n(\gamma, a)m(f; a), \tag{35}$$

en donde la suma de la derecha contiene sólo un número finito de términos no nulos.

NOTA. Si γ es una curva de Jordan orientada positivamente con gráfica Γ, entonces $n(\gamma, a) = 1$ para cada a del interior de Γ y la expresión (35) se escribe normalmente en la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P, \tag{36}$$

en donde N designa el número de ceros y P el número de polos de f interiores a Γ, cada uno de ellos contado tantas veces como indica su orden.

Demostración. Supongamos que en un entorno perforado de un punto a tenemos $f(z) = (z - a)^m g(z)$, en donde g es analítica en a y $g(a) \neq 0$, siendo m un entero (positivo o negativo). Entonces existe un entorno perforado de a en el que podemos escribir

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

en donde el cociente g'/g es analítico en a. Esta ecuación nos dice que un cero de f de orden m es un polo simple de f'/f con residuo m. Análogamente, un polo de f de orden m es un polo simple de f'/f con residuo $-m$. Este hecho, junto con el teorema de Cauchy del residuo, nos proporciona (35).

16.24 CÁLCULO DE INTEGRALES REALES POR MEDIO DE RESIDUOS

El teorema de Cauchy del residuo se puede utilizar para calcular integrales de Riemann reales. Se dispone de varias técnicas, que dependen de la forma de la integral. Describiremos brevemente dos de dichos métodos.

El primer método trata de integrales de la forma $\int_0^{2\pi} R(\text{sen }\theta, \cos\theta)\,d\theta$, en donde R es una función racional * de dos variables.

* Una función P definida en $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ por una ecuación de la forma

$$P(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} a_{m,n} z_1^m z_2^n$$

es llamada *polinomio con dos variables*. Los coeficientes $a_{m,n}$ pueden ser reales o complejos. Un cociente de dos de estos polinomios es una *función racional de dos variables*.

Teorema 16.36. *Sea R una función racional de dos variables y sea*

$$f(z) = R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right),$$

siempre que la expresión del segundo miembro sea finita. Sea γ la circunferencia orientada positivamente con centro en O. Entonces

$$\int_0^{2\pi} R(\text{sen }\theta, \cos\theta)\,d\theta = \int_\gamma \frac{f(z)}{iz}\,dz, \tag{37}$$

en el supuesto de que f carezca de polos en la gráfica de γ.

Demostración. Puesto que $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tenemos

$$\gamma'(\theta) = i\gamma(\theta), \qquad \frac{\gamma(\theta)^2 - 1}{2i\gamma(\theta)} = \text{sen }\theta \qquad \frac{\gamma(\theta)^2 + 1}{2\gamma(\theta)} = \cos\theta,$$

y (37) se sigue inmediatamente del teorema 16.7.

NOTA. Para calcular la integral del segundo miembro de (37), necesitamos tan sólo calcular los residuos del integrando en aquellos de sus polos que se hallen en el interior del círculo unidad.

Ejemplo. Calcular $I = \int_0^{2\pi} d\theta/(a + \cos\theta)$, en donde a es un número real, $|a| > 1$. Aplicando (37), obtenemos

$$I = -2i\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

El integrando posee polos simples en las raíces de la ecuación $z^2 + 2az + 1 = 0$. Son los puntos

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1},$$

$$z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

Los residuos correspondientes R_1 y R_2 vienen dados por

$$R_1 = \lim_{z\to z_1} \frac{z - z_1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{z_1 - z_2},$$

$$R_2 = \lim_{z\to z_2} \frac{z - z_2}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{z_2 - z_1}.$$

Si $a > 1$, z_1 es interior al círculo unidad, z_2 es exterior, e $I = 4\pi/(z_1 - z_2) = 2\pi/\sqrt{a^2 - 1}$. Si $a < -1$, z_2 es interior, z_1 es exterior, y obtenemos $I = -2\pi/\sqrt{a^2 - 1}$.

Muchas integrales impropias pueden tratarse por medio del siguiente teorema:

Teorema 16.37. *Sea $T = \{x + iy : y \geq 0\}$ el semiplano superior. Sea S una región abierta de $\mathbf{C}$ que contenga a T y supongamos que f es analítica en S, excepto, quizás, en un número finito de polos. Supongamos además que ninguno de estos polos está sobre el eje real. Si*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^\pi f(Re^{i\theta})\, Re^{i\theta}\, d\theta = 0, \tag{38}$$

entonces

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{39}$$

en donde $z_1, \ldots, z_n$ son los polos de f que están en T.

Demostración. Sea γ un camino orientado positivamente formado tomando una porción de eje real desde $-R$ a R y una semicircunferencia en T que tenga a $[-R, R]$ como diámetro, habiendo tomado R lo bastante grande para que incluya todos los polos $z_1, \ldots, z_n$. Entonces

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + i \int_0^\pi f(Re^{i\theta})\, Re^{i\theta}\, d\theta.$$

Cuando $R \to +\infty$, la última integral tiende a cero en virtud de (38) y obtenemos (39).

NOTA. La ecuación (38) se satisface automáticamente si f es el cociente de dos polinomios, por ejemplo $f = P/Q$, con la condición de que el grado de Q exceda al grado de P en 2, por lo menos. (Ver ejercicio 16.36.)

Ejemplo. Para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} dx/(1 + x^4)$, sea $f(z) = 1/(z^4 + 1)$. Entonces $P(z) = 1$, $Q(z) = 1 + z^4$, y entonces (38) se verifica. Los polos de f son las raíces de la ecuación $1 + z^4 = 0$. Estas raíces son z_1, z_2, z_3, z_4, donde

$$z_k = e^{(2k-1)\pi i/4} \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

De éstas sólo z_1 y z_2 pertenecen al semiplano superior. El residuo en z_1 es

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4i}.$$

Análogamente, encontramos que $\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = (1/4i)e^{\pi i/4}$. Por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{2\pi i}{4i}(e^{-\pi i/4} + e^{\pi i/4}) = \pi \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

16.25 CÁLCULO DE LA SUMA DE GAUSS POR EL MÉTODO DE LOS RESIDUOS

El teorema del residuo es utilizado a menudo para calcular sumas por medio de integración. Ilustramos esto con un famoso ejemplo llamado *suma de Gauss* $G(n)$, definida por la fórmula

$$G(n) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{2\pi i r^2/n}, \tag{40}$$

en donde $n \geq 1$. Esta suma aparece en varias partes de la Teoría de Números. Para valores pequeños de n es fácil calcularla a partir de su definición. Por ejemplo, tenemos

$$G(1) = 1, \qquad G(2) = 0, \qquad G(3) = i\sqrt{3}, \qquad G(4) = 2(1 + i).$$

A pesar de que cada término de la suma tiene valor absoluto 1, la suma tiene valor absoluto 0, $\sqrt{n}$, o $\sqrt{2n}$. De hecho, Gauss demostró la notable fórmula

$$G(n) = \tfrac{1}{2}\sqrt{n}(1 + i)(1 + e^{-\pi i n/2}), \tag{41}$$

para cada $n \geq 1$. Se conocen algunas demostraciones diferentes de la fórmula (41). Nosotros la deduciremos considerando una suma más general $S(a, n)$, introducida por Dirichlet,

$$S(a, n) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{\pi i a r^2/n},$$

en donde n y a son enteros positivos. Si $a = 2$, entonces $S(2, n) = G(n)$. Dirichlet demostró (41) como corolario de una ley de reciprocidad para $S(a, n)$ que se puede establecer como sigue:

Teorema 16.38. *Si el producto na es par, tenemos*

$$S(a, n) = \sqrt{\frac{n}{a}}\left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)\overline{S(n, a)}, \tag{42}$$

en donde la barra designa el complejo conjugado.

NOTA. Para deducir la fórmula de Gauss (41), hagamos $a = 2$ en (42), y observemos que

$$\overline{S(n, 2)} = 1 + e^{-\pi i n/2}.$$

Demostración. La demostración que damos aquí es particularmente instructiva, puesto que ilustra varias técnicas utilizadas en análisis complejo. Algunos de los detalles de cálculo de menor importancia se dejan al lector como ejercicio.

Sea g una función definida por medio de la ecuación

$$g(z) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{\pi i a(z+r)^2/n}. \tag{43}$$

Entonces g es analítica en todo el plano complejo, y $g(0) = S(a, n)$. Puesto que na es par se obtiene

$$g(z + 1) - g(z) = e^{\pi i a z^2/n}(e^{2\pi i a z} - 1) = e^{\pi i a z^2/n}(e^{2\pi i z} - 1)\sum_{m=0}^{a-1} e^{2\pi i m z},$$

(ejercicio 16.41). Definimos f por medio de la ecuación

$$f(z) = g(z)/(e^{2\pi i z} - 1).$$

Entonces f es analítica en todo $\mathbf{C}$ excepto para un polo de primer orden en cada entero, y f satisface la ecuación

$$f(z + 1) = f(z) + \varphi(z), \tag{44}$$

en donde

$$\varphi(z) = e^{\pi i a z^2/n}\sum_{m=0}^{a-1} e^{2\pi i m z}. \tag{45}$$

La función φ es analítica en todo $\mathbf{C}$.

En $z = 0$ el residuo de f es $g(0)/(2\pi i)$ (ejercicio 16.41), y entonces

$$S(a, n) = g(0) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \int_\gamma f(z)\, dz, \tag{46}$$

en donde γ es un camino cerrado simple orientado positivamente cuya gráfica contiene sólo al polo $z = 0$ en su región interior. Eligiremos γ tal que describa un paralelogramo de vértices A, $A+1$, $B+1$, B, en donde

$$A = -\tfrac{1}{2} - Re^{\pi i/4} \quad \text{y} \quad B = -\tfrac{1}{2} + Re^{\pi i/4},$$

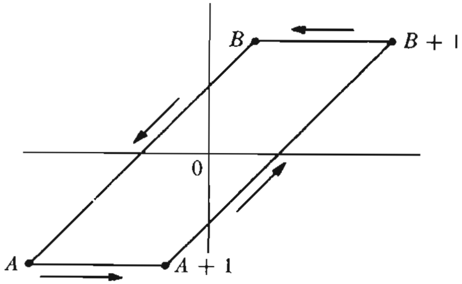


Figura 16.7

tal como hemos representado en la figura 16.7. Integrando f a lo largo de γ tenemos

$$\int_\gamma f = \int_A^{A+1} f + \int_{A+1}^{B+1} f + \int_{B+1}^{B} f + \int_B^A f.$$

En la integral $\int_{A+1}^{B+1} f$ realizamos el cambio de variable $w = z + 1$ y utilizamos (44) a fin de obtener

$$\int_{A+1}^{B+1} f(w)\, dw = \int_A^B f(z + 1)\, dz = \int_A^B f(z)\, dz + \int_A^B \varphi(z)\, dz.$$

Por lo tanto (46) se transforma en

$$S(a, n) = \int_A^B \varphi(z)\, dz + \int_A^{A+1} f(z)\, dz - \int_B^{B+1} f(z)\, dz. \tag{47}$$

Demostraremos ahora que las integrales a lo largo de los segmentos horizontales que unen A con $A+1$ y B con $B+1$ tienden a 0 cuando $R \to +\infty$. Para ello calculamos el integrando en estos segmentos. Escribimos

$$|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|e^{2\pi i z} - 1|}, \tag{48}$$

y acotamos separadamente el numerador y el denominador.

En el segmento que une B con $B+1$ obtenemos

$$\gamma(t) = t + Re^{\pi i/4}, \quad \text{en donde } -\tfrac{1}{2} \leq t \leq \tfrac{1}{2}.$$

De (43) obtenemos

$$|g[\gamma(t)]| \leq \sum_{r=0}^{n-1} \left| \exp \left\{ \frac{\pi i a(t + Re^{\pi i/4} + r)^2}{n} \right\} \right|, \tag{49}$$

en donde $\exp z = e^z$. La expresión contenida entre llaves tiene como parte real (ejercicio 16.41)

$$-\pi a(\sqrt{2}tR + R^2 + \sqrt{2}rR)/n.$$

Puesto que $|e^{x+iy}| = e^x$ y $\exp\{-\pi a\sqrt{2}rR/n\} \leq 1$, cada uno de los términos de (49) tiene un valor absoluto que no excede a $\exp\{-\pi aR^2/n\} \exp\{-\sqrt{2}\pi atR/n\}$. Pero $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$, luego obtenemos la acotación

$$|g[\gamma(t)]| \leq n\, e^{\pi\sqrt{2}aR/(2n)}\, e^{-\pi aR^2/n}.$$

Para el denominador de (48) utilizamos la desigualdad triangular en la forma

$$|e^{2\pi iz} - 1| \geq \big|\, |e^{2\pi iz}| - 1 \big|.$$

Dado que $|\exp\{2\pi i\gamma(t)\}| = \exp\{-2\pi R \operatorname{sen}(\pi/4)\} = \exp\{-\sqrt{2}\pi R\}$, obtenemos

$$|e^{2\pi i\gamma(t)} - 1| \geq 1 - e^{-\sqrt{2}\pi R}.$$

Por consiguiente, sobre el segmento rectilíneo que une B con $B+1$ tenemos la acotación

$$|f(z)| \leq \frac{n e^{\pi\sqrt{2}aR/(2n)}\, e^{-\pi aR^2/n}}{1 - e^{-\sqrt{2}\pi R}} = o(1) \quad \text{cuando } R \to +\infty.$$

Aquí $o(1)$ designa una función de R que tiende a 0 cuando $R \to +\infty$.

Un argumento análogo prueba que el integrando tiende a 0 en el segmento rectilíneo que une A con $A+1$ cuando $R \to +\infty$. Puesto que la longitud del camino de integración es 1 en cada uno de los casos, todo esto demuestra que la segunda y tercera integrales que aparecen en el segundo miembro de (47) tienden a 0 cuando $R \to +\infty$. Por consiguiente, la expresión de (47) se puede escribir en la forma

$$S(a, n) = \int_A^B \varphi(z)\, dz + o(1) \quad \text{cuando } R \to +\infty. \tag{50}$$

Para tratar la integral $\int_A^B \varphi$ aplicamos el teorema de la integral de Cauchy, integrando φ a lo largo del paralelogramo de vértices A, B, α, $-\alpha$, en donde

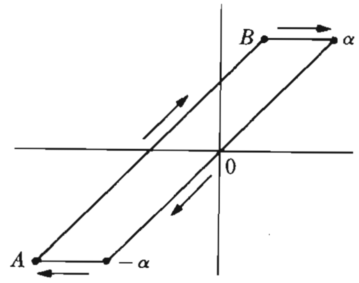


Figura 16.8

$\alpha = B + \frac{1}{2} = Re^{\pi i/4}$. (Ver fig. 16.8.) Puesto que φ es analítica en todas partes, su integral en torno a este paralelogramo es 0, luego

$$\int_A^B \varphi + \int_B^\alpha \varphi + \int_\alpha^{-\alpha} \varphi + \int_{-\alpha}^A \varphi = 0. \tag{51}$$

A causa del factor exponencial $e^{\pi iaz^2/n}$ que aparece en (45), un argumento análogo al dado anteriormente prueba que la integral de φ a lo largo de cada segmento horizontal $\to 0$ cuando $R \to +\infty$. Por consiguiente (51) nos da

$$\int_A^B \varphi = \int_{-\alpha}^\alpha \varphi + o(1) \quad \text{cuando } R \to +\infty.$$

y (50) se transforma en

$$S(a, n) = \int_{-\alpha}^\alpha \varphi(z)\, dz + o(1) \quad \text{cuando } R \to +\infty. \tag{52}$$

en donde $\alpha = Re^{\pi i/4}$. Utilizando (45) se obtiene

$$\int_{-\alpha}^\alpha \varphi(z)\, dz = \sum_{m=0}^{a-1} \int_{-\alpha}^\alpha e^{\pi iaz^2/n}\, e^{2\pi imz}\, dz = \sum_{m=0}^{a-1} e^{-\pi inm^2/a}\, I(a, m, n, R),$$

en donde
$$I(a, m, n, R) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \exp\left\{\frac{\pi i a}{n}\left(z + \frac{nm}{a}\right)^2\right\} dz.$$

Aplicando de nuevo el teorema de Cauchy al paralelogramo de vértices $-\alpha$, α, $\alpha - nm/a$, $-\alpha - nm/a$, obtenemos como antes que las integrales a lo largo de los segmentos horizontales $\to 0$ cuando $R \to +\infty$, luego

$$I(a, m, n, R) = \int_{-\alpha - nm/a}^{\alpha - mn/a} \exp\left\{\frac{\pi i a}{n}\left(z + \frac{nm}{a}\right)^2\right\} dz + o(1) \quad \text{cuando } R \to \infty.$$

El cambio de variables $w = \sqrt{a/n}(z + nm/a)$ transforma esto en

$$I(a, m, n, R) = \sqrt{\frac{n}{a}} \int_{-\alpha\sqrt{a/n}}^{\alpha\sqrt{a/n}} e^{\pi i w^2}\, dw + o(1) \quad \text{cuando } R \to +\infty.$$

Si hacemos que $R \to +\infty$ en (52), obtenemos

$$S(a, n) = \sum_{m=0}^{a-1} e^{-\pi i n m^2/a} \sqrt{\frac{n}{a}} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R\sqrt{a/n}e^{\pi i/4}}^{R\sqrt{a/n}e^{\pi i/4}} e^{\pi i w^2}\, dw. \tag{53}$$

Escribiendo $T = \sqrt{a/n}R$, vemos que el último límite es igual a

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{-Te^{\pi i/4}}^{Te^{\pi i/4}} e^{\pi i w^2}\, dw = I.$$

donde se ha indicado con I un número independiente de a y de n. Por consiguiente (53) nos da

$$S(a, n) = \sqrt{\frac{n}{a}}\, I\overline{S(n, a)}. \tag{54}$$

Para calcular I hacemos $a = 1$ y $n = 2$ en (54). Entonces $S(1, 2) = 1 + i$ y $S(2, 1) = 1$, luego (54) implica $I = (1+i)/\sqrt{2}$, y (54) se reduce a (42).

16.26 APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL RESIDUO A LA FÓRMULA DE INVERSIÓN PARA TRANSFORMADAS DE LAPLACE

El teorema que sigue es, en muchos casos, el método más fácil para calcular el límite que aparece en la fórmula de inversión para transformadas de Laplace. (Ver ejercicio 11.38.)

Teorema 16.39. *Sea F una función analítica en todo* **C** *excepto, quizá, en un número finito de polos. Supongamos que existen tres constantes positivas, M, b, c tales que*

$$|F(z)| < \frac{M}{|z|^c} \quad \textit{siempre que } |z| \geq b.$$

Sea a un número positivo tal que la línea vertical $x = a$ no contenga polos de F y sean $z_1, \ldots, z_n$ los polos de F que se hallan a la izquierda de esta línea. Entonces, para cada número real $t > 0$, tenemos

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} e^{(a+iv)t} F(a + iv)\, dv = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \{e^{zt}F(z)\}. \tag{55}$$

Demostración. Aplicamos el teorema de Cauchy del residuo al camino Γ orientado positivamente representado en la figura 16.9, en donde el radio T de la parte circular se toma lo suficientemente grande para que en ella queden in-

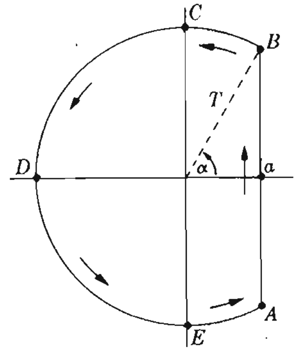


Figura 16.9

cluidos todos los polos de F que están a la izquierda de la línea $x = a$ y también $T > b$. El teorema del residuo nos da

$$\int_\Gamma e^{zt} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \{e^{zt}F(z)\}. \tag{56}$$

Escribimos

$$\int_\Gamma = \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^E + \int_E^A,$$

en donde A, B, C, D E son los puntos indicados en la figura 16.9, y designamos por medio de I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 estas integrales. Probaremos que $I_k \to 0$

si $T \to +\infty$ cuado $k > 1$.

Tenemos, en primer lugar,

$$|I_2| < \frac{M}{T^c}\int_\alpha^{\pi/2} e^{tT\cos\theta}\, T\, d\theta \leq \frac{Me^{at}}{T^{c-1}}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{Me^{at}}{T^c} T \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{a}{T}\right).$$

Puesto que T arc sen $(a/T) \to a$ cuando $T \to +\infty$, se tiene que $I_2 \to 0$ cuando $T \to +\infty$. De la misma manera se demuestra que $I_5 \to 0$ cuando $T \to +\infty$.

Consideremos a continuación I_3. Tenemos

$$|I_3| < \frac{M}{T^{c-1}}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{tT\cos\theta}\, d\theta = \frac{M}{T^{c-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-tT\operatorname{sen}\varphi}\, d\varphi.$$

Pero sen $\varphi \geq 2\varphi/\pi$ si $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, y entonces

$$|I_3| < \frac{M}{T^{c-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-2tT\varphi/\pi}\, d\varphi = \frac{\pi M}{2tT^c}(1 - e^{-tT}) \to 0 \quad \text{cuando } T \to +\infty.$$

Análogamente, tenemos que $I_4 \to 0$ cuando $T \to +\infty$. Pero cuando $T \to +\infty$ el segundo miembro de (56) permanece inalterable. Luego $\lim_{T\to+\infty} I_1$ existe y se tiene

$$\lim_{T\to+\infty} I_1 = \lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} e^{(a+iv)t} F(a+iv)\, i\, dv = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\{e^{zt}F(z)\}.$$

Ejemplo. Sea $F(z) = z/(z^2 + \alpha^2)$, en donde α es real. Entonces F tiene polos simples en $\pm i\alpha$. Puesto que $z/(z^2 + \alpha^2) = \frac{1}{2}[1/(z + i\alpha) + 1/(z - i\alpha)]$, obtenemos

$$\operatorname*{Res}_{z=i\alpha}\{e^{zt}F(z)\} = \tfrac{1}{2}e^{i\alpha t}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=-i\alpha}\{e^{zt}F(t)\} = \tfrac{1}{2}e^{-i\alpha t}.$$

Por consiguiente el límite que aparece en (55) tiene el valor $2\pi i$ cos αt. A partir del ejercicio 11.38 vemos que la función f, continua en $(0, +\infty)$, cuya transformada de Laplace es F, viene dada por $f(t) = \cos \alpha t$.

16.27 APLICACIONES CONFORMES

Una función analítica f aplicará dos segmentos rectilíneos, convergentes en un punto c, en dos curvas que se cortarán en $f(c)$. En esta sección probaremos que

las rectas tangentes a dichas curvas se cortan según el mismo ángulo que los segmentos rectilíneos si $f'(c) \neq 0$.

Esta propiedad es geométricamente evidente para funciones lineales. Por ejemplo, supongamos que $f(z) = z + b$. Representa una traslación que mueve cada línea paralelamente a sí misma, y es claro que se conservan los ángulos. Otro ejemplo es $f(z) = az$, en donde $a \neq 0$. Si $|a| = 1$, entonces $a = e^{i\alpha}$ y representa una rotación de centro en el origen y ángulo α. Si $|a| \neq 1$, entonces $a = Re^{i\alpha}$ y f representa una rotación seguida de una dilatación (si $R > 1$) o de una contracción (si $R < 1$). De nuevo se conservan los ángulos. Una función lineal general $f(z) = az + b$, con $a \neq 0$, es una composición de estos tipos y por tanto conserva también los ángulos.

En el caso general, la diferenciabilidad en c significa que se dispone de una aproximación lineal en las proximidades de c, a saber $f(z) = f(c) + f'(c)(z - c) + o(z - c)$, y si $f'(c) \neq 0$ podemos esperar que se conserven los ángulos en las proximidades de c.

Para formalizar estas ideas, sean γ_1 y γ_2 dos caminos regulares a trozos con gráficas rspectivas Γ_1 y Γ_2, secantes en c. Supongamos que γ_1 es uno a uno en un intervalo que contiene a t_1, y que γ_2 es uno a uno en un intervalo que contiene a t_2, en donde $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = c$. Supongamos también que $\gamma_1'(t_1) \neq 0$ y $\gamma_2'(t_2) \neq 0$. La diferencia

$$\arg[\gamma_2'(t_2)] - \arg[\gamma_1'(t_1)],$$

se llama el *ángulo* formado por Γ_1 y Γ_2 en c.

Supongamos ahora que $f'(c) \neq 0$. Entonces (por el teorema 13.4) existe un disco $B(c)$ en el que f es uno a uno. Luego las funciones compuestas.

$$w_1(t) = f[\gamma_1(t)] \qquad \text{y} \qquad w_2(t) = f[\gamma_2(t)],$$

serán localmente uno a uno en las proximidades de t_1 y t_2, respectivamente, y describirán arcos C_1 y C_2 que se cortarán en $f(c)$. (Ver fig. 16.10.) Por la regla

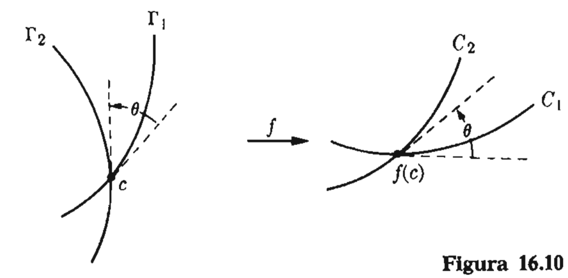


Figura 16.10

de la cadena tenemos

$$w_1'(t_1) = f'(c)\gamma_1'(t_1) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad w_2'(t_2) = f'(c)\gamma_2'(t_2) \neq 0.$$

Por consiguiente, por el teorema 1.48 existen enteros n_1 y n_2 tales que

$$\arg[w_1'(t_1)] = \arg[f'(c)] + \arg[\gamma_1'(t_1)] + 2\pi n_1,$$
$$\arg[w_2'(t_2)] = \arg[f'(c)] + \arg[\gamma_2'(t_2)] + 2\pi n_2,$$

luego el ángulo formado por C_1 y C_2 en $f(c)$ es igual al ángulo formado por Γ_1 y Γ_2 en c más un múltiplo entero de 2π. Por esta razón decimos que f *conserva los ángulos* en c. Una tal función se llama también una *función conforme* en c.

Los ángulos no se conservan en aquellos puntos en los que la derivada es cero. Por ejemplo, si $f(z) = z^2$, una recta que pase por el origen y forme con el eje real un ángulo α se transforma por medio de f en una línea recta que forma con el eje real un ángulo 2α. En general, cuando $f'(c) = 0$, el desarrollo de Taylor de f toma la forma

$$f(z) - f(c) = (z - c)^k[a_k + a_{k+1}(z - c) + \cdots],$$

en donde $k \geq 2$. Utilizando esta ecuación, es fácil ver que los ángulos formados por las curvas que se cortan en c quedan multiplicados por un factor k en la aplicación determinada por f.

Entre los ejemplos importantes de las aplicaciones conformes se hallan las *transformaciones de Möbius*. Son las funciones f definidas como sigue: Si a, b, c, d son cuatro números complejos tales que $ad - bc \neq 0$, definimos

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{57}$$

siempre que $cz + d \neq 0$. Es conveniente definir f en todas partes del plano complejo ampliado $\mathbf{C}^*$ haciendo $f(-d/c) = \infty$ y $f(\infty) = a/c$. (Si $c = 0$, estas dos últimas ecuaciones se tienen que substituir por la ecuación singular $f(\infty) = \infty$.) Ahora (55) se puede resolver en z en términos de $f(z)$, obteniéndose

$$z = \frac{-df(z) + b}{cf(z) - a}.$$

Esto significa que la función inversa f^{-1} existe y está dada por

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a},$$

entendiendo que $f^{-1}(a/c) = \infty$ y $f^{-1}(\infty) = -d/c$. Entonces vemos que las transformaciones de Möbius son aplicaciones uno a uno de $\mathbf{C}^*$ en sí mismo. Son, además, conformes en cada punto finito $z \neq -d/c$, ya que

$$f'(z) = \frac{bc - ad}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

Una de las propiedades más importantes de estas aplicaciones es que aplica circunferencias en circunferencias (incluyendo las líneas rectas como casos especiales de circunferencias). Las demostraciones de lo que acabamos de enunciar se esbozan en el ejercicio 16.46. Otras propiedades de las transformaciones de Möbius se hallan descritas también en los ejercicios al final del capítulo.

EJERCICIOS

Integración compleja; fórmulas de la integral de Cauchy

16.1 Sea γ un camino regular a trozos con dominio $[a, b]$ y gráfica Γ. Supongamos que la integral $\int_\gamma f$ existe. Sea S una región abierta que contenga Γ y sea g una función tal que $g'(z)$ exista y sea igual a $f(z)$ para cada z de Γ. Probar que

$$\int_\gamma f = \int_\gamma g' = g(B) - g(A), \quad \text{en donde } A = \gamma(a) \text{ y } B = \gamma(b).$$

En particular, si γ es un circuito, entonces $A = B$ y la integral es 0. *Indicación*. Aplicar el teorema 7.34 a cada intervalo de continuidad de γ'.

16.2 Sea γ un camino circular de centro O y radio 2, orientado positivamente. Verificar cada una de las siguientes expresiones utilizando alguna de las fórmulas integrales de Cauchy.

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i.$ b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^3}\,dz = \pi i.$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^4}\,dz = \frac{\pi i}{3}.$ d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi i e.$

e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i(e - 1).$ f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)}\,dz = 2\pi i(e - 2).$

16.3 Sea $f = u + iv$ analítica en un disco $B(a; R)$. Si $0 < r < R$, probar que

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})e^{-i\theta}\,d\theta.$$

16.4 a) Probar la siguiente versión más fuerte del teorema de Liouville: *Si f es una función entera tal que* $\lim_{z\to\infty} |f(z)/z| = 0$, *entonces f es constante.*

b) ¿Qué puede afirmarse acerca de una función entera que satisface una desigualdad de la forma $|f(z)| \leq M\,|z|^c$ para todo z del plano complejo, siendo $c > 0$?

16.5 Supongamos que f es analática en $B(0;\ R)$. Sea γ una circunferencia orientada positivamente con centro en 0 y radio r, en donde $0 < r < R$. Si a es interior a γ, probar que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\left\{\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z - r^2/\bar{a}}\right\} dz.$$

Si $a = Ae^{i\alpha}$, probar que esto se reduce a la fórmula

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - A^2)f(re^{i\theta})}{r^2 - 2rA\cos(\alpha - \theta) + A^2}\, d\theta.$$

Igualando las partes reales de esta ecuación se obtiene la expresión conocida con el nombre de *fórmula integral de Poisson.*

16.6 Supongamos que f es analítica en la adherencia del disco $B(0;\ 1)$ Si $|a| < 1$, probar que

$$(1 - |a|^2)f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{1 - z\bar{a}}{z - a}\, dz,$$

en donde γ es una circunferencia unidad con centro 0, orientada positivamente. Deducir la desigualdad

$$(1 - |a|^2)\,|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

16.7 Sea $f(z) = \sum_{n=0}^\infty 2^n z^n/3^n$ si $|z| < 3/2$, y sea $g(z) = \sum_{n=0}^\infty (2z)^{-n}$ si $|z| > \frac{1}{2}$. Sea γ un camino circular de radio 1 y centro 0, orientado positivamente, y definimos $h(a)$ para $|a| \neq 1$ como sigue:

$$h(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{f(z)}{z-a} + \frac{a^2 g(z)}{z^2 - az}\right) dz.$$

Probar que

$$h(a) = \begin{cases} \dfrac{3}{3 - 2a} & \text{si } |a| < 1, \\[2ex] \dfrac{2a^2}{1 - 2a} & \text{si } |a| > 1. \end{cases}$$

Desarrollos de Taylor

16.8 Se define f en el disco $B(0;\ 1)$ por medio de la ecuación $f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n$. Calcular el desarrollo de Taylor de f en las proximidades del punto $a = \frac{1}{2}$ y también en las proximidades del punto $a = -\frac{1}{2}$. Determinar en cada caso el radio de convergencia.

16.9 Supongamos que f posee un desarrollo de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a(n)z^n$, válido en $B(0;\ R)$. Sea

$$g(z) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f(ze^{2\pi ik/p}).$$

Probar que el desarrollo de Taylor de g consta de los términos p-ésimos de f. Esto es, si $z \in B(0;\ R)$ tenemos

$$g(z) = \sum_{n=0}^\infty a(pn)z^{pn}.$$

16.10 Supongamos que f posee el desarrollo de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, válido en $B(0;\ R)$. Sea $s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$. Si $0 < r < R$ y si $|z| < r$, probar que

$$s_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\frac{w^{n+1} - z^{n+1}}{w - z}\, dw,$$

en donde γ es la circunferencia de centro 0 y radio r, orientada positivamente.

16.11 Dados los desarrollos de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$, válidos para $|z| \leq R_1$ y $|z| < R_2$, respectivamente. Probar que, si $|z| < R_1 R_2$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w}\, g\!\left(\frac{z}{w}\right) dw = \sum_{n=0}^\infty a_n b_n z^n,$$

en donde γ es una circunferencia de radio R_1 y centro 0, orientada positivamente.

16.12 Supongamos que f posee un desarrollo de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n$, válido en $B(a;\ R)$.

a) Si $0 \leq r \leq R$, deducimos la *identidad de Parseval*:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 r^{2n}.$$

b) Utilizar (a) para deducir la desigualdad $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2$, en donde $M(r)$ es el máximo de $|f|$ en la circunferencia $|z - a| = r$.

c) Utilizar (b) para obtener otra demostración del principio del máximo local del módulo (teorema 16.27).

16.13 Probar el *lema de Schwarz*: *Sea f analítica en el disco $B(0;\ 1)$. Supongamos que* $f(0) = 0$ *y* $|f(z)| \leq 1$, *si* $|z| < 1$. *Entonces*

$$|f'(0)| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad |f(z)| \leq |z|, \qquad si\ \ |z| < 1.$$

Si $|f'(0)| = 1$ *o si* $|f(z_0)| = |z_0|$ *para uno por lo menos de los* z_0 *de* $B'(0;\ 1)$, *entonces*

$$f(z) = e^{i\alpha}z, \qquad en\ donde\ \alpha\ es\ real.$$

Indicación. Aplicar el teorema del módulo máximo a g, en donde $g(0) = f'(0)$ y $g(z) = f(z)/z$ si $z \neq 0$.

Desarrollos de Laurent, singularidades, residuos

16.14 Sean f y g analíticas en una región abierta S. Sea γ un circuito de Jordan de gráfica Γ tal que tanto Γ como su región interior pertenezcan a S. Supongamos que $|g(z)| < |f(z)|$ para cada z de Γ.

a) Probar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Indicación. Sea $m = \inf\{|f(z)| - |g(z)| : z \in \Gamma\}$. Entonces $m > 0$ y por lo tanto

$$|f(z) + tg(z)| \geq m > 0$$

para cada t de $[0, 1]$ y cada z de Γ. Sea ahora

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}\,dz, \qquad \text{si } 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces ϕ es continua, y por lo tanto constante, en $[0, 1]$. Luego $\phi(0) = \phi(1)$.

b) Utilizar (a) para probar que f y $f + g$ tienen el mismo número de ceros en el interior de Γ. *(Teorema de Rouché.)*

16.15 Sea p un polinomio de grado n, por ejemplo $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, en donde $a_n \neq 0$. Hacer $f(z) = a_n z^n$, $g(z) = p(z) - f(z)$ en el teorema de Rouché, y demostrar que p posee en **C** exactamente n ceros.

16.16 Sea f analítica en la adherencia del disco $B(0; 1)$ y supongamos que $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. Probar que existe un punto z_0 de $B(0, 1)$, y sólo uno, tal que $f(z_0) = z_0$. *Indicación.* Utilizar el teorema de Rouché.

16.17 Si $p_n(z)$ designa la n-ésima suma parcial del desarrollo de Taylor $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$. Utilizar el teorema de Rouché (u otros) para probar que, para cada $r > 0$, existe un N (que depende de r) tal que $n \geq N$ implica $p_n(z) \neq 0$ para cada z de $B(0; r)$.

16.18 Si $a > e$, buscar el número de ceros de la función $f(z) = e^z - az^n$ que se hallan en el interior del círculo $|z| = 1$.

16.19 Dar un ejemplo de una función que verifica todas las propiedades siguientes, o exponer por qué no existe una tal función: f es analítica en todo **C** excepto para un polo de orden 2 en 0 y polos simples en i y $-i$; $f(z) = f(-z)$ para todo z; $f(1) = 1$; la función $g(z) = f(1/z)$ tiene un cero de orden 2 en $z = 0$; y $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 2i$.

16.20 Probar que cada uno de los siguientes desarrollos de Laurent es válido en la región indicada:

a) $$\frac{1}{(z-1)(2-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \qquad \text{si } 1 < |z| < 2.$$

b) $$\frac{1}{(z-1)(2-z)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 - 2^{n-1}}{z^n} \qquad \text{si } |z| > 2.$$

16.21 Para cada t fijo de **C**, definimos $J_n(t)$ como el coeficiente de z^n en el desarrollo de Laurent

$$e^{(z-1/z)t/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) z^n.$$

Probar que para $n \geq 0$ tenemos

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t \operatorname{sen}\theta - n\theta)\,d\theta$$

y que $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$. Deducir el desarrollo en serie de potencias

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{1}{2}t)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!} \qquad (n \geq 0).$$

La función J_n se llama *función de Bessel* de orden n.

16.22 Probar el *teorema de Riemann*: *Si z_0 es una singularidad aislada de f y si f está acotada en un entorno perforado $B'(z_0)$, entonces z_0 es una singularidad evitable. Indicación.* Calcular las integrales que dan los coeficientes a_n del desarrollo de Laurent de f y probar que $a_n = 0$ para cada $n < 0$.

16.23 Probar el *teorema de Casorati-Weierstrass*: *Supongamos que z_0 es una singularidad esencial de f y sea c un número complejo cualquiera. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ y cada disco $B(z_0)$, existe un punto z de $B(z_0)$ tal que $|f(z) - f(c)| < \varepsilon$. Indicación.* Supongamos que el teorema es falso y obtengamos una contradicción aplicando el ejercicio 16.22 a g, siendo $g(z) = 1/[f(z) - c]$.

16.24 *El punto del infinito.* Una función f es analítica en el ∞ si la función g definida por medio de la ecuación $g(z) = f(1/z)$ es analítica en el origen. Análogamente, decimos que f tiene un cero, un polo, una singularidad evitable, o una singularidad esencial en ∞ si g tiene un cero, un polo, etc., en 0. El teorema de Liouville establece que una función que es analítica en todo **C*** debe ser constante. Probar que

a) f es un polinomio si, y sólo si, la única singularidad de f en **C*** es un polo en ∞, en cuyo caso el orden del polo es igual al grado del polinomio.

b) f es una función racional si, y sólo si, f carece de singularidades en **C*** que no sean polos.

16.25 Deducir los siguientes «métodos breves» para calcular los residuos:

a) Si a es un polo de primer orden de f, entonces

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} (z-a) f(z).$$

b) Si a es un polo de orden 2 de f, entonces

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = g'(a), \quad \text{en donde } g(z) = (z-a)^2 f(z).$$

c) Supongamos que f y g son analíticas en a, con $f(a) \neq 0$ y a es un cero de primer orden de g. Probar que

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{[g(z)]^2} = \frac{f'(a)g'(a) - f(a)g''(a)}{[g'(a)]^3}.$$

d) Si f y g cumplen las mismas condiciones que en (c), excepto por el hecho de que a es un cero de segundo orden de g, entonces

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{6f'(a)g''(a) - 2f(a)g'''(a)}{3[g''(a)]^2}.$$

16.26 Calcular los residuos en los polos de f si

a) $f(z) = \dfrac{ze^z}{z^2 - 1}$, b) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$,

c) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z \cos z}$, d) $f(z) = \dfrac{1}{1 - e^z}$,

e) $f(z) = \dfrac{1}{1 - z^n}$ (en donde n es un entero positivo).

16.27 Si $\gamma(a; r)$ designa un círculo de centro en a y radio r, orientado positivamente, probar que

a) $\displaystyle\int_{\gamma(0;4)} \frac{3z - 1}{(z+1)(z-3)}\, dz = 6\pi i$, b) $\displaystyle\int_{\gamma(0;2)} \frac{2z}{z^2 + 1}\, dz = 4\pi i$,

c) $\displaystyle\int_{\gamma(0;2)} \frac{z^3}{z^4 - 1}\, dz = 2\pi i$, d) $\displaystyle\int_{\gamma(2;1)} \frac{e^z}{(z-2)^2}\, dz = 2\pi i e^2$.

Calcular las integrales de los ejercicios que van desde el 16.28 al 16.35 por medio de residuos.

16.28 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b\cos t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$ si $0 < b < a$.

16.29 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t\, dt}{1 - 2a\cos t + a^2} = \frac{2\pi a^2}{1 - a^2}$ si $a^2 < 1$.

16.30 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos 3t)\, dt}{1 - 2a\cos t + a^2} = \frac{\pi(a^2 - a + 1)}{1 - a}$ si $0 < a < 1$.

16.31 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 t\, dt}{a + b\cos t} = \frac{2\pi(a - \sqrt{a^2 - b^2})}{b^2}$ si $0 < b < a$.

16.32 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

16.33 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6}{(1 + x^4)^2}\, dx = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$.

16.34 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2(x^2 + 9)}\, dx = \frac{\pi}{200}$.

16.35 a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1 + x^5}\, dx = \frac{\pi}{5}\Big/\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$.

Indicación. Integrar $z/(1 + z^5)$ alrededor de la frontera del sector circular $S = \{re^{i\theta} : 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi/5\}$, y hagamos que $R \to \infty$.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}\, dx = \frac{\pi}{2n}\Big/\operatorname{sen}\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)$, m, n enteros, $0 < m < n$.

16.36 Probar que la fórmula (38) se verifica si f es el cociente de dos polinomios, por ejemplo $f = P/Q$, en donde el grado de Q excede al grado de P en 2 o más unidades.

16.37 Probar que la fórmula (38) se verifica si $f(z) = e^{imz}P(z)/Q(z)$, en donde $m > 0$ y P y Q son polinomios tales que el grado de Q excede al de P en 1 o más unidades. Esto hace posible calcular integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

por el método descrito en el teorema 16.37.

16.38 Utilizar el método sugerido en el ejercicio 16.37 a fin de calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} mx}{x(a^2 + x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-am})$ si $m \ge 0$, $a > 0$.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^4 + a^4}\, dx = \frac{\pi}{2a^3} e^{-ma/\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{ma}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$ si $m > 0$, $a > 0$.

16.39 Sea $w = e^{2\pi i/3}$ y sea γ una circunferencia orientada positivamente cuya gráfica no contenga ni a 1, ni a w, ni a w^2. Los números 1, w, w^2 son las raíces cúbicas de la unidad.) Probar que la integral

$$\int_\gamma \frac{(z+1)}{z^3 - 1}\, dz$$

es igual a $2\pi i(m + nw)/3$, en donde m y n son enteros. Determinar los posibles valores de m y n y determinar en qué forma dependen de γ.

16.40 Sea γ una circunferencia de centro en 0 y radio $< 2\pi$, orientada positivamente. Si a es complejo y n es un entero, sea

$$I(n, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^{n-1}e^{az}}{1 - e^z}\,dz.$$

Probar que

$$I(0, a) = \tfrac{1}{2} - a, \qquad I(1, a) = -1, \qquad \text{y} \qquad I(n, a) = 0 \quad \text{si } n > 1.$$

Calcular $I(-n, a)$ en términos de polinomios de Bernoulli cuando $n \geq 1$ (ver ejercicio 9.38).

16.41 Este ejercicio requiere de ciertos detalles de la demostración del teorema 16.38. Sean

$$g(z) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{\pi i a(z+r)^2/n}, \qquad f(z) = g(z)/(e^{2\pi iz} - 1),$$

en donde a y n son enteros positivos con na par. Probar que:

a) $g(z + 1) - g(z) = e^{\pi iaz^2/n}(e^{2\pi iz} - 1)\sum_{m=0}^{a-1} e^{2\pi imz}$.
b) $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = g(0)/(2\pi i)$.
c) La parte real de $i(t + Re^{\pi i/4} + r)^2$ es $-(\sqrt{2}tR + R^2 + \sqrt{2}rR)$.

Funciones analíticas uno a uno

16.42 Sea S un subconjunto abierto de $\mathbf{C}$ y supongamos que f es analítica y uno a uno en S. Probar que

a) $f'(z) \neq 0$ para cada z de S. (Luego f es conforme en cada punto de S.)
b) Si g es la inversa de f, entonces g es analítica en $f(S)$ y $g'(w) = 1/f'(g(w))$ si $w \in f(S)$.

16.43 Sea $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analítica y uno a uno en $\mathbf{C}$. Probar que $f(z) = az + b$, en donde $a \neq 0$. ¿Qué podemos deducir si f es uno a uno en $\mathbf{C}$ y analítica en $\mathbf{C}$ salvo a lo más en un número finito de polos?

16.44 Si f y g son transformaciones de Möbius, probar que la función compuesta $f \circ g$ es también una transformación de Möbius.

16.45 Describir geométricamente qué le ocurre al punto z cuando se transforma en el punto $f(z)$ por medio de las siguientes transformaciones especiales de Möbius:

a) $f(z) = z + b$ (Traslación).
b) $f(z) = az$, en donde $a > 0$ (Dilatación o contracción).
c) $f(z) = e^{i\alpha}z$, en donde α es real (Rotación).
d) $f(z) = 1/z$ (Inversión).

16.46 Si $c \neq 0$, tenemos

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}.$$

Luego cada transformación de Möbius se puede expresar como una composición de los casos especiales descritos en el ejercicio 16.45. Utilizar este resultado para demostrar que las transformaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias (en donde las líneas rectas se consideran casos especiales de circunferencias).

16.47 a) Probar que todas las transformaciones de Möbius que aplican el semiplano superior $T = \{x + iy : y \geq 0\}$ en la adherencia del disco $B(0;\ 1)$ se pueden expresar en la forma $f(z) = e^{i\alpha}(z - a)/(z - \bar{a})$, en donde α es real y $a \in T$.
b) Probar que a y α se pueden elegir siempre de forma que tres puntos dados cualesquiera del eje real se transformen en tres puntos cualesquiera de la circunferencia unidad.

16.48 Hallar todas las transformaciones de Möbius que aplican el semiplano de la derecha

$$S = \{x + iy : x \geq 0\}$$

en la adherencia de $B(0;\ 1)$.

16.49 Hallar todas las transformaciones de Möbius que aplican la adherencia de $B(0;\ 1)$ en sí misma.

16.50 Los *puntos fijos* de una transformación de Möbius

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

son los puntos z para los que $f(z) = z$. Sea $D = (d - a)^2 + 4bc$.

a) Determinar todos los puntos fijos cuando $c = 0$.
b) Si $c \neq 0$ y $D \neq 0$, probar que f tiene exactamente 2 puntos fijos z_1 y z_2 (ambos finitos) y que satisfacen la ecuación

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = Re^{i\theta}\frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \text{en donde } R > 0 \text{ y } \theta \text{ es real.}$$

c) Si $c \neq 0$ y $D = 0$, probar que f tiene exactamente un punto fijo z_1 y que satisface la ecuación

$$\frac{1}{f(z) - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + C \qquad \text{para un } C \neq 0.$$

d) Dada una transformación de Möbius, investigar las imágenes sucesivas de un punto dado w. Esto es, sea

$$w_1 = f(w), \qquad w_2 = f(w_1), \qquad \ldots, \qquad w_n = f(w_{n-1}), \qquad \ldots,$$

y estudiar el comportamiento de la sucesión $\{w_n\}$. Considerar el caso particular en el que son a, b, c, d, reales, y $ad - bc = 1$.

EJERCICIOS VARIOS

16.51 Determinar todos los complejos z tal que

$$z = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi ikz/n}$$

16.52 Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es una función entera tal que $|f(re^{i\theta})| \le Me^{r^k}$ para todo $r > 0$, donde $M > 0$ y $k > 0$, probar que

$$|a_n| \le \frac{Me^{n/k}}{(n/k)^{n/k}} \quad \text{para } n \ge 1.$$

16.53 Supongamos que f es analítica sobre un entorno perforado $B'(0;\ a)$. Probar que $\lim_{z\to 0} f(z)$ existe (posiblemente infinito) si, y sólo si, existe un entero n y una función g, analítica en $B(0;\ a)$, con $g(0) \neq 0$, tal que $f(z) = z^n g(z)$ en $B(0;\ a)$.

16.54 Sea $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polinomio de grado n con coeficientes reales satisfaciendo $a_0 > a_1 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$. Probar que $p(z) = 0$ implica $|z| > 1$. *Indicación.* Considerar $(1 - z)p(z)$.

16.55 Una función f definida sobre un disco $B(a;\ r)$ se dice tiene un cero de orden infinito en a si, y sólo si, para cada entero $k > 0$ hay una función g_k, analítica en a, tal que $f(z) = (z - a)^k g_k(z)$ en $B(a;\ r)$. Si f tiene un cero de orden infinito en a, probar que $f = 0$ en todo $B(a;\ r)$.

16.56 Probar el teorema de Morera: *Si f es continua en una región abierta S de $\mathbf{C}$ y si $\int_\gamma f = 0$ para todo circuito poligonal γ en S, entonces f es analítica en S.*

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

*16.1 Ahlfors, L. V., *Complex Analysis,* 2.ª ed. McGraw-Hill, New York, 1966.

16.2 Carathéodory, C., *Theory of Functions of a Complex Variable,* 2 vols. Traductor, F. Steinhardt. Chelsea, New York, 1954.

16.3 Estermann, T., *Complex Numbers and Functions.* Athlone Press, London, 1962.

16.4 Heins, M., *Complex Function Theory.* Academic Press, New York, 1968.

16.5 Heins, M., *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable.* Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1962.

16.6 Knopp, K., *Theory of Functions,* 2 vols. Traductor: F. Bagemihl. Dover, New York, 1945.

16.7 Saks, S., y Zygmund, A., *Analytic Functions,* 2.ª ed. Traductor, E. J. Scott. *Monografie Matematyczne* **28**, Warsaw, 1965.

16.8 Sansone, G., y Gerretsen, J., *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable,* 2 vols. P. Noordhoff, Gröningen, 1960.

16.9 Titchmarsh, E. C., *Theory of Functions,* 2.ª ed. Oxford University Press, 1939.

Índice de símbolos especiales

Indice alfabético

D

E

F